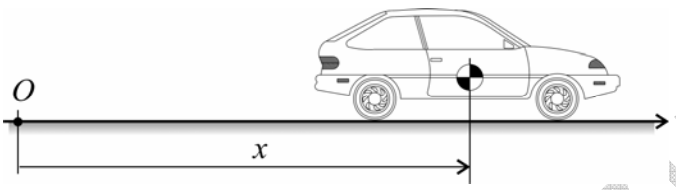
1. Premočrtno gibanje

1.1 Premočrtno gibanje

Točaka se giblje premočrtno, če se giblje po premici. Podobno se telo giblje premočrtno, če se vse njegove točke giblejo po vzporednih premicah..



Slika 1.1 Lega vozila

Kinematične veličine, ki opisujejo premočrtno gibanje so

lega	$x = \hat{x}(t)$
hitrost	$v \equiv \dfrac{dx}{dt}$
pospešek	$a \equiv \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

Hitrost pove kolikšen je premik v časovni enoti, pospešek pove kolikšna je sprememba hitrosti v časovni enoti. Hitrost je vektor. Če je pozitivna se telo giblje v desno, če je negativna se giblje v desno.

Osnovna enota za merjenje hitrost je m/s. Pri gibanju vozil se najpogosteje uporablja enota km/h. Zveza med enotama je naslednja

$$\boxed{1\,\mathrm{m/s} = 3.6\,\mathrm{km/h} \qquad 1\,\mathrm{km/h} = \frac{1}{3.6}\,\mathrm{m/s}}$$

Primer 1.1.

$$35\,\mathrm{km/h} = 35 \times \frac{1}{3.6}\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{9.7\,\mathrm{m/s}}}$$
$$12\,\mathrm{m/s} = 12 \times 3.6\,\mathrm{km/h} = \underline{\underline{43.2\,\mathrm{km/h}}}$$

Za merjenje pospešeka se uporablja enota $\mathrm{m/s^2}$. Večji pospeški se izražajo v enotah zemeljskega gravitacijskega pospeška *g*. Vrednost tega znaša

$$\boxed{1\,g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}}$$

Primer 1.2.

$$0.6\,g = 0.6\times 9.8\,\mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{5.88\,\mathrm{m/s^2}}}$$

$$9.5\,\mathrm{m/s^2} = \frac{9.5}{9.8}\,g = \underline{\underline{0.97\,g}}$$

1.2 Enakomerno gibanje

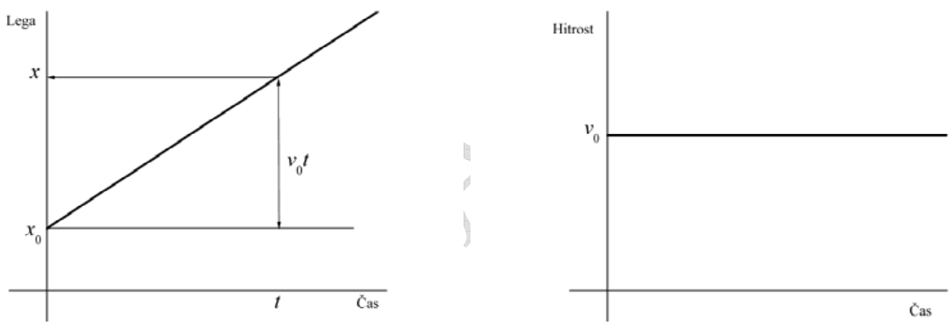
Če je hitrost telesa pri gibanju stalna potem se giblje enakomerno. V tem primeru velja

pospešek $a = 0$

hitrost $v = v_0$

lega $\boxed{x = x_0 + v_0\left(t - t_0\right)}$

Diagrami, ki podajajo so prikazana na sliki 2.



Slika 1.2. Kinematična diagrama enakomernega gibanja

Dolžina poti je enaka kar razdalji med legama

$$\boxed{s = vt \qquad v = \frac{s}{t} \qquad t = \frac{s}{v}}$$

Primer 1.3. Tovornjak se giblje s hitrostjo 88 km/h, iz nasprotne smeri pa vozi osebno vozilo s hitrostjo 125 km/h. Njuna medsebojna razdalja je 1600 m. V kolikšnem času se bosta vozili srečali, če vozita s kontantno hitrostjo ?

Rešitev.

Naj bo t iskani čas. V tem času opravi tovornjak pot $s_1 = v_1 t$, osebno vozilo pa pot $s_2 = v_2 t$. Vsota obeh poti je enaka začetni oddaljenosti med voziloma $s = s_1 + s_2$. Čas srečanja je torej

$$s = s_1 + s_2 = (v_1 + v_2)t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{1600}{88 + 125} \times 3.6 = \underline{\underline{27\,\mathrm{s}}}$$

Primer 1.4. Pešec stopi iz pločnika na cesto in hodi s konstantno hitrostjo 5 km/h. Po 5.5 m poti ga zadane vozilo, ki vozi s konstantno hitrostjo 67 km/h. Kolikšna je bila razdalja do vozilo do mesta trka v trenutku, ko je pešec stopil na cestišče ?

Rešitev.

Od trenutka, ko je pešec stopil na cesto pa do trenutka, ko ga je zadelo vozilo je pretekl čas

$$s_p = v_p t \quad t = \frac{s_p}{v_p} = \frac{5.5 \times 3.6}{5} = \underline{3.96\,\mathrm{s}}$$

V tem času je vozilo opravilo pot

$$s_v = v_v t = \frac{67 \times 3.96}{3.6} = \underline{\underline{73.7\,\mathrm{m}}}$$

Dolžina te poti pa je tudi iskana razdalja.

1.2 Integracija

Če so za obravnavano masno točko podani

pospešek $a = \hat{a}(t)$
začetna lega $x_0 = \hat{x}(t_0)$
začetna hitrost $v_0 = \hat{v}(t_0)$

potem z integracijo določimo hitrost

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt}$$

z ponovno integracijo pa lego

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t}\left(v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt \right) dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = x_0 + v_0\left(t - t_0\right) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a\,dt\,dt}$$

1.3 Gibanje kot funkcija lege

Uporabno formulo dobimo

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v} = v\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

Integracija

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right) = a \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \int_{x_0}^{x} a\,dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a\,dx}$$

1.6 Enakomerno pospešeno gibanje

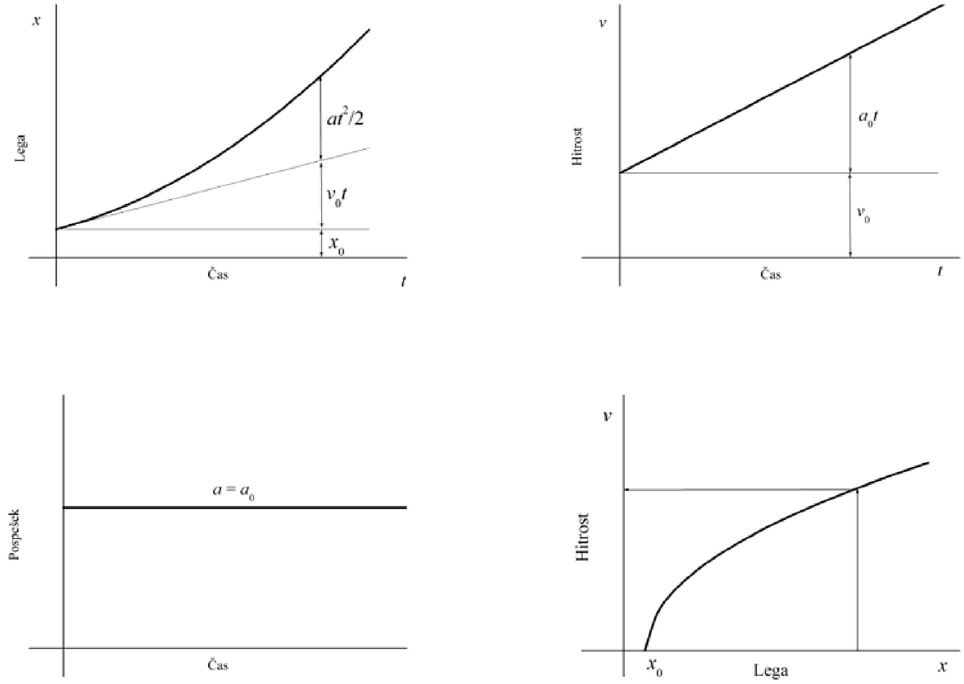
V primeru, ko je pospešek stalen

$$a = \text{const}$$

sta

$$\text{hitrost} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_0 + a\left(t - t_0\right)}$$

$$\text{lega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = x_0 + v_0\left(t - t_0\right) + \frac{a}{2}\left(t^2 - t_0^2\right)}$$



Slika. Kinematični diagrami enakomerno pospešenega gibanja

Primer 2 (Nool str 29): Osebi avto je zbil pešca; hitrost avta ni poznana. Nesreča se je pripetila na prehodu za pešce. V času nesreče je bilo slabo vreme; na cestišču je ležal steptan sneg, ki je prekrival označbe prehoda za pešce.

Na kraju nesreče je bilo moč natančno ugotoviti mesto, kjer je avto zbil pešca. Pregled sledi na cestišču pa je izkazal, da je avto z blokiranimi kolesi drsel 20 m preden je zadel pešca, po trku s pešcem pa še 5 m.

Policisti so na kraju nesreče (isti dan) napravili preizkus, s katerim so želeli ugotoviti, kolikšen je bil koeficient trenja med pnevmatikami vozila in cestiščem v času nesreče. Policijski avto je med preizkusom z zavrtimi kolesi drsel 20 m daleč; hitrost je v trnutku pričetka zaviranja znašala 30 km/h.

Kolikšna je bila hitrost osebnega avtomobila pred pričetkom zaviranja?
Kolikšna je bila hitrost osebnega avtomobila v trenutku, ko je zbil pešca?

Rešitev.

Pojemek pri zaviranju (poskus):

$$a = \frac{v_p^2}{2s_p} = \frac{8.3^2}{2\times 20} = 1.74\,\mathrm{m/s^2}$$

Hitrost vozila pred začetkom zaviranja:

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \times 1.74 \times 25} = \underline{9.3\,\mathrm{m/s}} = \underline{34\,\mathrm{km/h}}$$

Pospešek kot funkcija hitrosti

V primeru, ko je podan pospešek kot funkcija hitrosti lahko izračunamo čas

$$\frac{dv}{dt} = a(v) \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a} = \int_{t_0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a}}$$

ali, če uporabimo pravilo odvajanja posredne funkcije, pot, ki jo opravi telo

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = a(v) \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{a} = \int_{x_0}^{x} dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{a}}$$

Pospešek, kot linearna funkcija hitrosti

Če je pospešek podan kot linearna funkcija hitrosti

$$\boxed{a = a_0\left(1 - \frac{v}{v_{\max}}\right) = a_0(1 - c\,v)}$$

je čas ustavljanja

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a} = \frac{1}{a_0}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1 - c\,v} = \frac{1}{a_0 c}\ln(1 - c\,v)\Big|_{v_0}^{v} = \frac{1}{a_0 c}\ln\left(\frac{1 - c\,v}{1 - c\,v_0}\right)$$

in pot ustavljanja

$$s = x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{a} = -\frac{1}{a_0}\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{1 - c\,v} =$$

$$= \frac{1}{a_0 c}\left[v + \frac{1}{c}\ln(1 - c\,v)\right]\Bigg|_{v_0}^{v} = \frac{1}{a_0 c}\left[v - v_0 + \frac{1}{c}\ln\left(\frac{1 - c\,v}{1 - c\,v_0}\right)\right]$$

Gornji formuli veljata tako za pospeševanje kot za zaviranje. V primeru zaviranja mora biti $a_0 < 0$. Če naj smer pospeška uravnava le a_0 mora veljati

$$1-cv_0>0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c<\frac{1}{v_0}}$$

Interpretacija parametra *c* je v tem primeru enostacna.

Primer. Pojemek vozila je podan kot $a=a_0\left(1-cv\right)$. Določi dolžino pot in čas ustavljanja. Kolikšna je dolžina poti ustavljanja in čas ustavljanja, če je $c=0.05\,\mathrm{s/m}$, začetna hitrost $v_0=12\,\mathrm{m/s}$ in $a_0=-5.0\,\mathrm{m/s^2}$. Kolikšna sta pot in čas ustavljanja za $c=0$?

Rešitev.

Dolžina poti ustavljanja je za končno hitrost $v=0$

$$s=-\frac{1}{a_0c}\left[v_0+\frac{1}{c}\ln\left(1-cv_0\right)\right]=-\frac{1}{5\times 0.05}\times\left[12+\frac{\ln\left(1-0.05\times 12\right)}{0.05}\right]=\underline{\underline{25.30\,\mathrm{m}}}$$

Čas ustavljanja pa

$$t=-\frac{1}{a_0c}\ln\left(1-cv_0\right)=-\frac{1}{5\times 0.05}\times\ln\left(1-0.05\times 12\right)=\underline{\underline{3.67\,\mathrm{s}}}$$

Če upoštevmao konstantno vrednost pojemka pa dobimo dolžino poti ustavljanja

$$s=\frac{v^2}{2a_0}=\frac{12^2}{2\times 5}=\underline{\underline{14.40\,\mathrm{m}}}$$

Čas ustavljanja pa je v tem primeru

$$t=\frac{v}{a_0}=\frac{12}{5}=\underline{\underline{2.4\,\mathrm{s}}}$$

Opomba. Odvisnost pojemka od hitrosti *podaljšuje* pot in čas ustavljanja. To lahko vidimo iz razvoja *s* in *t* v potenčno vrsto po potencah *c*. Tako je dolžina poti ustavljanja

$$s=-\frac{1}{a_0c}\left[v_0+\frac{1}{c}\ln\left(1-cv_0\right)\right]=\frac{v^2}{2a_0}\left(1+\frac{2}{3}vc+\frac{1}{2}v^2c^2+\cdots\right)>\frac{v^2}{2a_0}$$

in čas ustavljanja

$$t = -\frac{1}{a_0 c}\ln\left(1 - c v_0\right) = \frac{v}{a_0}\left(1 + \frac{v}{2}c + \cdots\right) > \frac{v}{a_0}$$