

2.4 Naloge

Reši naslednje diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama:

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0;$

2. $(1 + y^2)x dx + (1 + x^2)dy = 0;$

3. $(1 + 2y)x dx + (1 + x^2)dy = 0;$

4. $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2;$

5. $e^x \left(\frac{dy}{dx} + 1 \right) = 1;$

6. $y \frac{dy}{dx} + x = 1;$

7. $xy' + y = y^2;$

8. $(1 + y^2)dx - xy dy = 0, \quad y(2) = 1;$

9. $\sin x y' = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

10. $(2x + 1)dy + y^2 dx = 0, \quad y(4) = 1;$

11. $2\sqrt{y} dx = dy, \quad y(0) = 1;$

Reši naslednje homogene enačbe:

12. $y^2 dx + x(x - y)dy = 0;$

13. $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0;$

14. $xy dx + (x^2 + y^2)dy = 0;$

15. $(x + y)dx + (y - x)dy = 0;$

16. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x};$

17. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0;$

18. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - x dy = 0;$

19. $x(\ln x - \ln y)dy - y dx = 0;$

20. $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}};$

Reši naslednje linearne diferencialne enačbe:

21. $y' + y \cos x = \cos x \sin x;$

22. $y' - y = e^x;$

23. $\frac{dy}{dx} = x + y;$

24. $y' + ay = ce^{bx};$

25. $y' + x^2 y = x^2$;
26. $y' - \frac{n}{x+1} y = e^x (x+1)^n$;
27. $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$;
28. $xy' + y = \ln x$;
29. $y' - \frac{2}{x} y = x^4$;
30. $(1+x^2)y' + xy = \frac{1}{1+x^2}$;
31. $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$;
32. $y' + y \tan x = \sin 2x$;
33. $x \frac{dy}{dx} = (x-1)e^x + y$;
34. $y' = a \sin x + by$;
35. $\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$;

Reši naslednje Bernullijeve enačbe:

36. $y' + 2ax^3 y^3 + 2xy = 0$;
37. $y' + y = xy^3$;
38. $xy' + xy^2 - y = 0$;

39. $y' + y = x\sqrt{y}$;
40. $(x^2 - 1)y' - y(y - x) = 0$;
41. $2xyy' - y^2 + ax = 0$;
42. $y^2 + (1 - xy)y' = 0$;
43. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;
44. $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^5 y^2$.

2.5 Rešitve

1. $y^2 = C(x^2 - 1) - 1$;
2. $\arctan y + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) = C$;
3. $y = \frac{2C - x^2}{2(1 + x^2)}$;
4. $\frac{x}{\sqrt{1 + y^2} \sqrt{1 + x^2}} = C$;
5. $y = -x - e^x + C$;
6. $y^2 + x^2 - 2x = C$;
7. $y = 1 + Ce^x, \quad y = 0$;

8. $y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1};$
9. $\ln y = \frac{1 - \cos x}{\sin x};$
10. $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x}{9}};$
11. $y = (1+x)^2;$
12. $x = \frac{y}{\ln(Cy)};$
13. $x^3 - 2y^3 = Cx;$
14. $x^2 y^2 + \frac{y^4}{2} = C;$
15. $\sqrt{x^2 + y^2} = C \arctan\left(\frac{y}{x}\right);$
16. $x = C \ln \frac{y}{x};$
17. $y^2 + x^2 = Cx;$
18. $x = C e^{\arcsin \frac{y}{x}};$
19. $x = y e^{Cy+1};$
20. $x = C e^{-e^{-\frac{y}{x}}};$

21. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x};$
22. $y = \frac{e^x}{2} + Ce^{-x};$
23. $y = -x - 1 + Ce^x;$
24. $y = \frac{ce^{bx}}{a+b} + Ce^{-ax};$
25. $y = 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}};$
26. $y = (1+x)^n(e^x + C);$
27. $y = x + Cx(x-1);$
28. $y = \ln x - 1 + \frac{C}{x};$
29. $y = \frac{x^5}{3} + Cx^2;$
30. $y = \frac{x + C\sqrt{1+x^2}}{1+x^2};$
31. $y = e^{-\sin x}(x + C);$
32. $y = (C - 2\cos x)\cos x;$
33. $y = e^x + Cx;$
34. $y = -\frac{a(\cos x + b\sin x)}{1+b^2} + Ce^{bx};$

35. $y = \frac{1}{3} \frac{x^3 + 3x + 3C}{(x^2 + 1)^2};$
36. $\frac{1}{y^2} = -a \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) - Ce^{2x^2};$
37. $\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x};$
38. $\frac{1}{y} = \frac{x^2 + C}{2x};$
39. $\sqrt{y} = x - 2 + Ce^{-\frac{x}{2}};$
40. $\frac{1}{y} = x + C\sqrt{x^2 - 1};$
41. $y^2 = -ax \ln x + Cx;$
42. $\frac{x}{y} - \frac{1}{2y^2} = C;$
43. $\sqrt{y} = \tan x + \frac{1}{x} \ln \cos x + \frac{C}{x};$
44. $\frac{1}{y} = -\frac{x^5}{3} + Cx^2.$

3. Diferencialne enačbe drugega in višjega reda

3.1 Nepopolne diferencialne enačbe drugega reda

3.1.1 Najpreprostejša diferencialna enačba drugega reda ima obliko:

$$y'' = f(x).$$

Takšno enačbo rešimo z dvakratno integracijo. Po prvi integraciji dobimo:

$$y' = \int f(x) dx + C_1 = F(x) + C_1,$$

po drugi pa:

$$y = \int F(x) dx + C_1x + C_2.$$

Primer 3.1:

Rešimo diferencialno enačbo $y'' = \sin x$!

REŠITEV:

Dano enačbo integriramo in dobimo

$$y' = -\cos x + C_1.$$

Če zgornjo enačbo ponovno integriramo, dobimo končno rešitev

$$y = -\sin x + C_1x + C_2.$$

□□□

3.1.2 Vzemimo sedaj diferencialno enačbo drugega reda:

$$F(x, y', y'') = 0,$$

v kateri ne nastopa neznana funkcija y . Označimo $y' = p(x)$, pa dobimo enačbo prvega reda:

$$F(x, p, p') = 0.$$

Predpostavimo, da se ta enačba da rešiti in da je njena splošna rešitev

$$p = f(x, C_1).$$

Splošno rešitev prvotne enačbe potem dobimo z integracijo enačbe:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, C_1),$$

od koder sledi:

$$y = \int f(x, C_1) dx + C_2.$$

Primer 3.2:

Rešimo diferencialno enačbo $y'' + \frac{y'}{x} = x$!

REŠITEV:

Postavimo $y' = p$. Ker je zato $y'' = p'$, dobi dana enačba obliko linearne diferencialne enačbe 1. reda

$$p' + \frac{p}{x} = x,$$

ki ima rešitev

$$p = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Na ta način je

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x},$$

zato je splošna rešitev dane enačbe

$$y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2,$$

□□□

3.1.3 Podobno ravnamo, ko enačba ne vsebuje neodvisne spremenljivke x , torej ko ima obliko:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Označimo sedaj:

$$y' = u(y).$$

Ker je drugi odvod:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy},$$

preide prvotna enačba v diferencialno enačbo prvega reda oblike:

$$F\left(y, u, u \frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Če jo uspemo integrirati in zapisati njeno splošno rešitev v obliki:

$$u = f(y, C_1),$$

dobimo splošno rešitev prvotne enačbe z integracijo enačbe:

$$\frac{dy}{dx} = f(y, C_1).$$

Ta diferencialna enačba pa je enačba z ločljivima spremenljivkama in jo moremo zapisati v obliki:

$$\frac{dy}{f(y, C_1)} = dx .$$

Z integracijo dobimo splošno rešitev prvotne enačbe:

$$\int \frac{dy}{f(y, C_1)} = x + C_2 .$$

Primer 3.3:

Rešimo enačbo $y y'' = (y')^2$!

REŠITEV:

Uvedemo novo spremenljivko

$$u = y' = \frac{dy}{dx} .$$

Ker je:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy} ,$$

lahko prvotno enačbo zapišemo v obliki:

$$y u \frac{du}{dy} = u^2 .$$

To pa je enačba z ločljivima spremenljivkama, ki ima rešitev

$$u = C_1 x .$$

V tem izrazu upoštevamo $u = y' = \frac{dy}{dx}$ in dobimo:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x .$$

Dobljena enačba pa je zopet enačba z ločljivima spremenljivkama x in y . Njena rešitev se glasi:

$$y = C_2 e^{C_1 x} .$$

□□□

3.2 Linearna diferencialna enačba drugega reda

Splošna oblika linearne diferencialne enačba drugega reda je takšna:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) .$$

Pri tem so $p(x)$, $q(x)$ in $f(x)$ znane zvezne funkcije. V primeru, ko je $f(x) \equiv 0$, je enačba homogena, v nasprotnem primeru je nehomogena.

Da se pokazati, da za splošno rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe drugega reda velja izrek:

Če je y_0 kakšna partikularna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe drugega reda, z_1 in z_2 pa linearno neodvisni partikularni rešitvi prirejene homogene enačbe, je splošna rešitev nehomogene enačbe množica funkcij:

$$y(x) = y_0(x) + C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) ,$$

pri čemer sta C_1 in C_2 poljubni konstanti.

