Numerična integracija

Numerični integraciji odvode nadomestimo s končnimi razlikami. Dokler so enačbe linearne lahko pišemo

$$\frac{dv_n}{dt} \approx \frac{v_{n,k+1} - v_{n,k+1}}{\Delta t} = \lambda\left(v_{n-1,k} - v_{n,k}\right)$$

Od tu dobimo zvezo

$$\boxed{\begin{aligned} v_{n,k+1} &= v_{n,k} + \lambda\left(v_{n-1,k} - v_{n,k}\right)\Delta t \\ x_{n,k+1} &= x_{n,k} + v_{n,k}\Delta t \end{aligned}}$$

Vhodni podatki so

$$x_{n,0} = x_{n-1,0} - h_0 \qquad v_{n,0}$$

$$\frac{dv_n}{dt} \approx \frac{v_{n,k+1} - v_{n,k+1}}{\Delta t} = \lambda\left(y_{n-1,k} - y_{n,k} - v_{n,k}T\right)$$

Upoštevanje zakasnitve

Od tu dobimo zvezo

$$\boxed{\begin{aligned} v_{n,k+1} &= v_{n,k} + \lambda\left(v_{n-1,k-m} - v_{n,k-m}\right)\Delta t \\ x_{n,k+1} &= x_{n,k} + v_{n,k}\Delta t \end{aligned}}$$

Vhodni podatki so

Nelinaerni modeli sledenja

Najbolj znan nelinearni model sledenje je model, ki ga je predlagal Bando s sodelavci.

$$\frac{dv_n}{dt} = \lambda\left[\hat{V}\left(h_n\right) - v_n\right]$$

pri čemer je $\hat{V}\left(h_n\right)$ neka optimalna funkcija hitrosti, ki je odvisna od razdalje med vozili oz. gostote toka.

Enačbo analiziramo tho, da je v stacionarni točki lineariziramo. Naj bo $\frac{dv_n}{dt}=0$ potem je $v_{n0}=\hat{V}\left(h_{n0}\right)$. V nestacionarnih pogojih je
$\hat{V}\left(h_{n0}+\eta\right)=\hat{V}\left(h_{n0}\right)+\hat{V}'\left(h_{n0}\right)\eta+...$

$$\frac{dv_n}{dt}=\lambda\left[\hat{V}\left(h_{n0}\right)+\hat{V}'\left(h_{n0}\right)\eta+...-\hat{V}\left(h_{n0}\right)-v_n\right]$$

$$\frac{dv_n}{dt}=\lambda\left[\hat{V}'\left(b\right)\left(x_{n-1}-x_n\right)-v_n\right]$$

$$-\omega^2\varepsilon_n=\lambda\left[\hat{V}'\left(b\right)\left(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n\right)-i\omega\varepsilon_n\right]$$

ali

$$\left[\lambda\hat{V}'\left(b\right)-\omega^2+i\lambda\omega\right]\varepsilon_n=\lambda\hat{V}'\left(b\right)\varepsilon_{n-1}$$

ali

$$\left|\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right|=\frac{\lambda\hat{V}'\left(b\right)}{\left|\lambda\hat{V}'\left(b\right)-\omega^2+i\lambda\omega\right|}<1$$

$$\left[\lambda\hat{V}'\left(b\right)\right]^2<\left[\lambda\hat{V}'\left(b\right)-\omega^2\right]^2+\lambda^2\omega^2=\left[\lambda\hat{V}'\left(b\right)\right]^2-2\omega^2\lambda\hat{V}'\left(b\right)+\omega^4+\lambda^2\omega^2$$

or

$$2\lambda\hat{V}'\left(b\right)<\omega^2+\lambda^2$$

za $\omega\to 0$

$$\hat{V}'\left(b\right)<\frac{\lambda}{2}$$

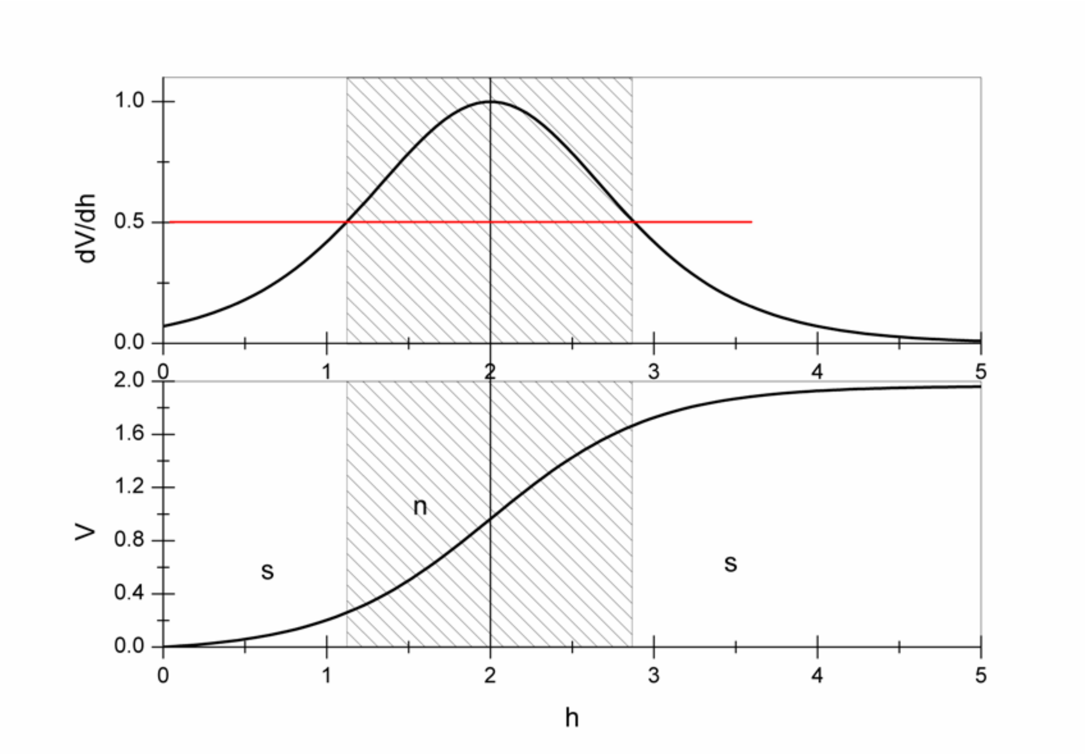
Oglejmo si primer. $N=100$ vozil vozi v krogu dolžin2 $L=200$ pri čemer je optimalna funkcija hitrosti

$$V(h) = \tanh(h-2) + \tan 2$$

Funkcija in njen odvod sta prikazana na sliki

$$V'(h) = 1 - \tanh^2(h-2)$$

Ta funkcija ima ekstrem pri $h = 2$.

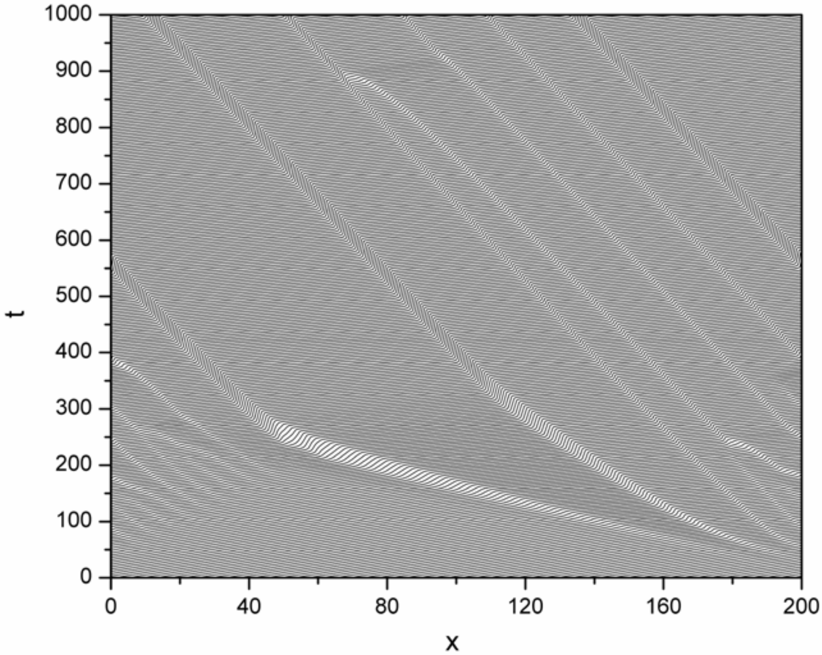


Slika. Model

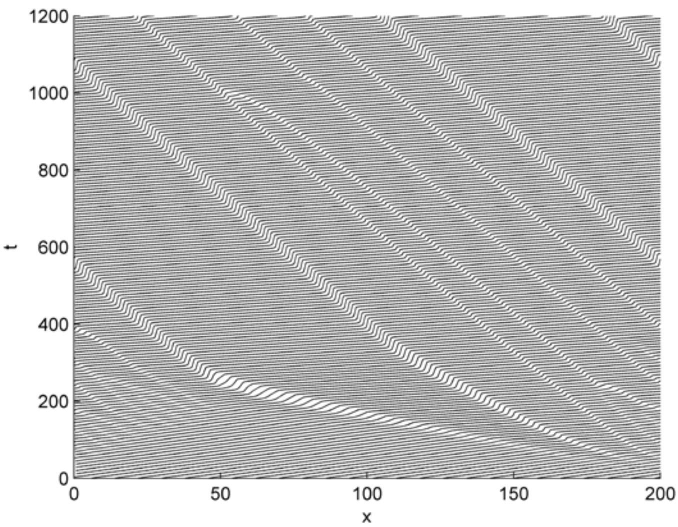
Rezuzltat numerične simulacije. Na sonoi

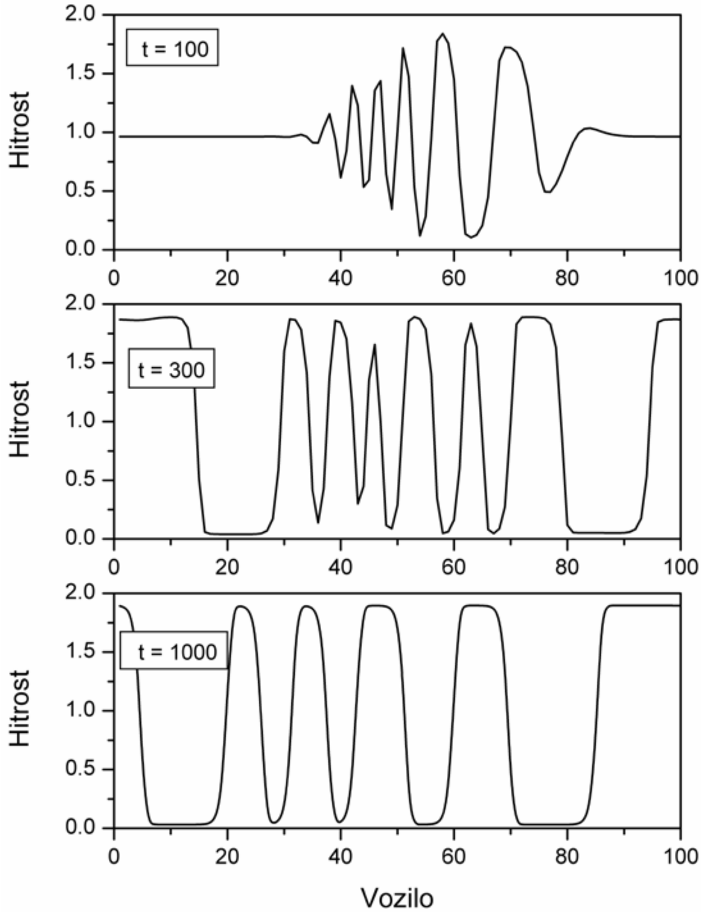
```
clear all
global N
global L
global a
%
% podatki
N = 100;      % stevilo vozil
L = 200.0;    % dolzina ceste
a = 1.0;     % obcutljivost
v0 = 0.0;
nstp = 4;
```

```
% zacetna hitrost vozil
tend = 1200.0; % koncni cas
%
y0 = zeros(2*N,1);  % vektor 1..N lege, N+1..2*N hitrosti
%
% initializacija
for i = 1:N
    y0(i) = (N-i)*L/N;
end
y0(1)=y0(1)+ 0.1;
for i=N+1:2*N
    y0(i) = v0;
end
%
options = odeset('RelTol',1e-8);
[t,y] = ode45(@vfun,[0 tend], y0);
%
hold on
% Risi
nn = size(t,1)
xx = zeros(nn,1);
tt = zeros(nn,1);
hold on
xlim([0 L]);
ylim([0 tend]);
for n = 1:nstp:N % for all cars
    b = L;
    k = 1;
    while k < nn
        j = 0;
        while y(k,n) < b & k < nn
            j = j + 1;
            k = k + 1;
            tt(j) = t(k);
            xx(j) = y(k,n) - (b - L);
        end
        plot(xx(1:j),tt(1:j));
        b = b + L;
    end
end
xlabel('x');
ylabel('t');
return
```

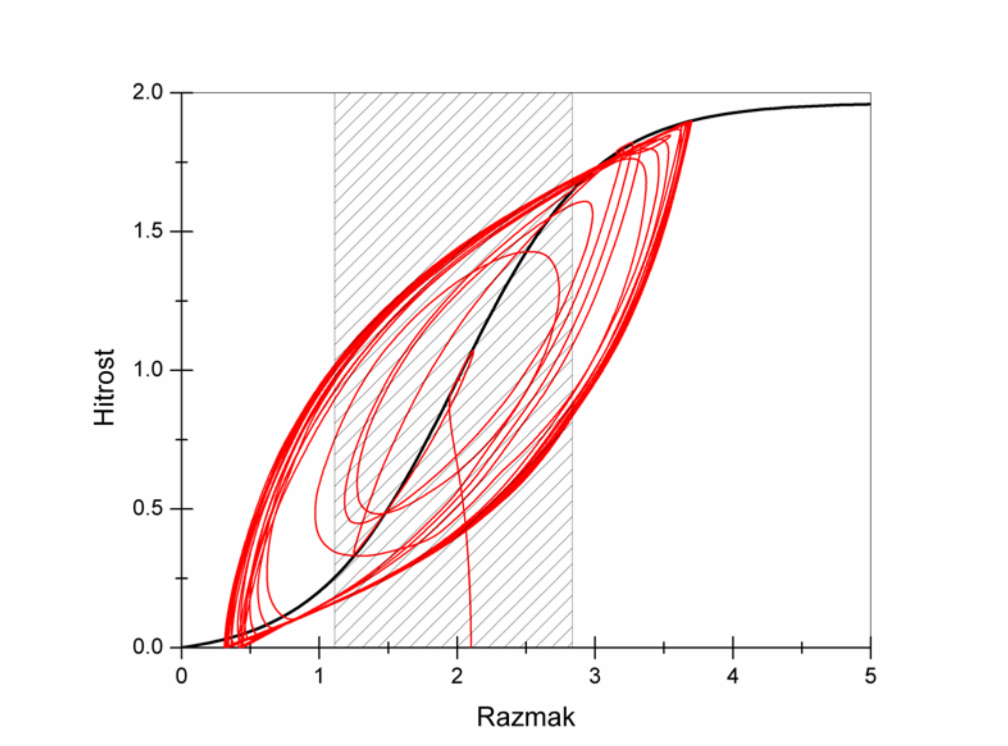


Slika. Razvoj zastojnih valov glede na krožno cesto.

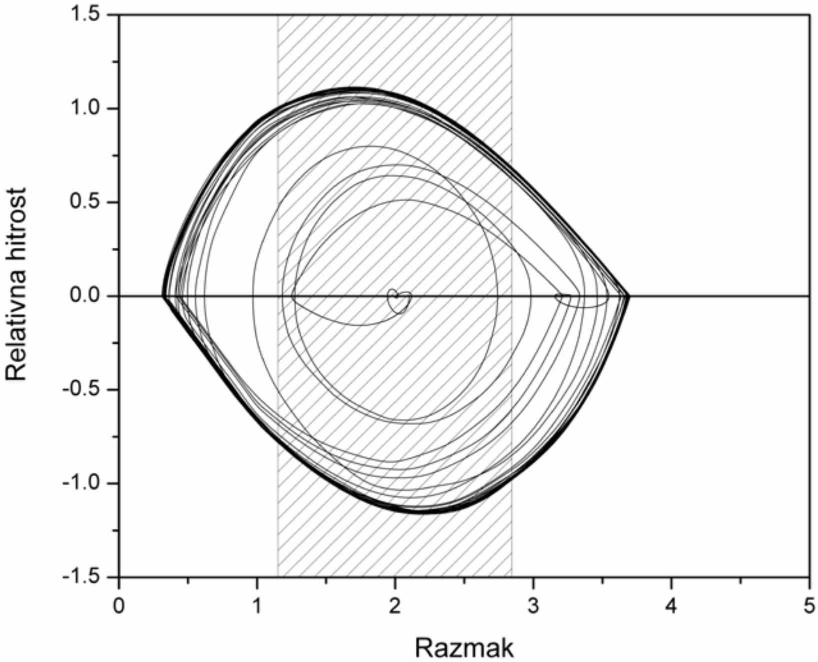




Slika. Hitrost posameznih vozil v različnih časih.



Slika. Hitrost v odvisnosti od razmaka med vozili za drugo vozilo v koloni.



Slika. Relativna hitrost v odvisnost od razmaka med vozili za drugo vozilo v koloni.