Predavanje 04: Stabilnost

Ena od osnovnih nalog teorije sledenja je ugotoviti pogoje pri katerih lahko postane stacionarno gibanje kolone vozil nestabilno. Proučevanje stabilnosti je da v sistem vnesemo majhno motnjo in opoazujemo, kakšen je odziv sistema. Če se motnja ojača je sistem nestabilen, v nasprotnem primeru je stabilen.

Stabilnost modela optimalne razdalje

Naj bo hitrost *n*-tega vozila v koloni podana

$$v_n = v_0 + \varepsilon_n e^{i\omega t}$$

pri čemer je ω frekvenca motnje in ε_n njena velikost. Pospešek je

$$dv_n/dt = i\omega\varepsilon_n e^{i\omega t}$$

Če to vstavimo v enačbo gibanja dobimo

$$i\omega\varepsilon_n e^{i\omega t} = \lambda\left(\varepsilon_{n-1}e^{i\omega t} - \varepsilon_n e^{i\omega t}\right)$$

Iz dobljene enačbe izrazimo razmerje amplitud hitrosti sosednjih vozil

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} = \frac{\lambda}{\lambda + i\omega}$$

Če naj bo vožnja stabilna motnja ne sme naraščati. Torej

$$\left|\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right| = \frac{\lambda}{|\lambda + i\omega|} < 1$$

Uredimo $\lambda^2 < \lambda^2 + \omega^2$ ali $\omega^2 > 0$. Ta pogoj bo v vsakem primeru izpolnjen, torej je vožnja, ko voznik trenutno prilagaja svojo hitrost hitrosti vozila pred sabo v vsakem primeru stabilna.

Upoštevanje zakasnitve. Zato

$$i\omega\varepsilon_n e^{i\omega(t+\tau)} = \lambda\left(\varepsilon_{n-1}e^{i\omega t} - \varepsilon_n e^{i\omega t}\right)$$

od tu

19.12.2014 9:00:27

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} = \frac{\lambda}{\lambda + i\omega e^{i\omega\tau}}$$

Za stabilno vožnjo motnja ne sme naraščati. Torej

$$\left|\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right| = \frac{\lambda}{\left|\lambda - \omega\sin\omega t + i\omega\cos\omega t\right|} < 1$$

Uredimo $\lambda^2 < \left(\lambda - \omega\sin\omega\tau\right)^2 + \omega^2\cos^2\omega\tau = \lambda^2 - 2\lambda\omega\sin\omega\tau + \omega^2$ oz. $2\lambda\sin\omega\tau < \omega$. Ta pogoj naj bi veljal za poljubno še tako majhno frekvenco $\tau\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} < \frac{1}{2\lambda}$. Ta pogoj bo v vsakem primeru izpolnjen, torej jer vožnja stabilna.

$$\tau < \frac{1}{2\lambda}$$

Da bo vožnja stabilna mora biti zakasnitveni čas manjši od.... Če se občutljivost veča, se mora ta čas zmanjševati.

Stabilnost modela optimalne razdalje

Imamo

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} = \mu_n\left(y_{n-1} - y_n - T\frac{dy_n}{dt}\right)$$

Stacionarno stanje je

$$y_{n-1} - y_n - Tv_n = 0 \qquad \frac{dy_n}{dt} = v_n \quad \Rightarrow \quad y_n = v_{n0}t$$

Rešitev

$$y_n = v_{n0}t + \varepsilon_n e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2\varepsilon_n e^{i\omega(t+\tau)} = \mu\left(\varepsilon_{n-1}e^{i\omega t} - \varepsilon_n e^{i\omega t} - i\omega T\varepsilon_n e^{i\omega t}\right)$$

ali

$$\left(\eta-\omega^2 e^{i\omega\tau}+i\omega T\right)\varepsilon_n=\eta\varepsilon_{n-1}$$

ali

$$\left|\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right|=\frac{\eta}{\left|\eta-\omega^2 e^{i\omega\tau}+i\omega T\right|}<1$$

Ker pa je $\eta-\omega^2 e^{i\omega\tau}+i\omega T=\eta-\omega^2\cos\omega\tau+i\left(\omega T-\omega^2\sin\omega\tau\right)$ dobimo pogoj

$$\eta^2<\left(\eta-\omega^2\cos\omega\tau\right)^2+\left(\omega T-\omega^2\sin\omega\tau\right)^2$$
$$=\eta^2-2\eta\omega^2\cos\omega\tau+\omega^4\cos^2\omega\tau+\omega^2T^2-2\omega^3T\sin\omega\tau+\omega^4\sin^2\omega\tau$$

or

$$\eta^2<\left(\eta-\omega^2\cos\omega\tau\right)^2+\left(\omega T-\omega^2\sin\omega\tau\right)^2$$
$$=\eta^2-2\eta\omega^2\cos\omega\tau+\omega^4\cos^2\omega\tau+\omega^2T^2-2\omega^3T\sin\omega\tau+\omega^4\sin^2\omega\tau$$

$$2\eta\cos\omega\tau+2\omega T\sin\omega\tau<\omega^2+T^2$$

$$2\eta\cos\omega\tau+2\omega^2\tau T\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau}<\omega^2+T^2\quad\Rightarrow\quad 2\eta<T^2$$

Nelinaerni modeli sledenja

Najbolj znan nelinearni model sledenje je model, ki ga je predlagal Bando s sodelavci.

$$\frac{dv_n}{dt}=\lambda\left[\hat{V}\left(h_n\right)-v_n\right]$$

pri čemer je $\hat{V}\left(h_n\right)$ neka optimalna funkcija hitrosti, ki je odvisna od razdalje med vozili oz. gostote toka.

Enačbo analiziramo tho, da je v stacionarni točki lineariziramo. Naj bo $\frac{dv_n}{dt}=0$ potem je $v_{n0}=\hat{V}\left(h_{n0}\right)$. V nestacionarnih pogojih je $\hat{V}\left(h_{n0}+\eta\right)=\hat{V}\left(h_{n0}\right)+\hat{V}'\left(h_{n0}\right)\eta+...$

$$\frac{dv_n}{dt}=\lambda\left[\hat{V}\left(h_{n0}\right)+\hat{V}'\left(h_{n0}\right)\eta+...-\hat{V}\left(h_{n0}\right)-v_n\right]$$

$$\frac{dv_n}{dt}=\lambda\left[\hat{V}'\left(b\right)\left(x_{n-1}-x_n\right)-v_n\right]$$

$$-\omega^2\varepsilon_n=\lambda\left[\hat{V}'\left(b\right)\left(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n\right)-i\omega\varepsilon_n\right]$$

ali

$$\left[\lambda\hat{V}'\left(b\right)-\omega^2+i\lambda\omega\right]\varepsilon_n=\lambda\hat{V}'\left(b\right)\varepsilon_{n-1}$$

ali

$$\left|\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right|=\frac{\lambda\hat{V}'\left(b\right)}{\left|\lambda\hat{V}'\left(b\right)-\omega^2+i\lambda\omega\right|}<1$$

$$\left[\lambda\hat{V}'\left(b\right)\right]^2<\left[\lambda\hat{V}'\left(b\right)-\omega^2\right]^2+\lambda^2\omega^2=\left[\lambda\hat{V}'\left(b\right)\right]^2-2\omega^2\lambda\hat{V}'\left(b\right)+\omega^4+\lambda^2\omega^2$$

or

$$2\lambda\hat{V}'\left(b\right)<\omega^2+\lambda^2$$

za $\omega\to 0$

$$\hat{V}'\left(b\right)<\frac{\lambda}{2}$$

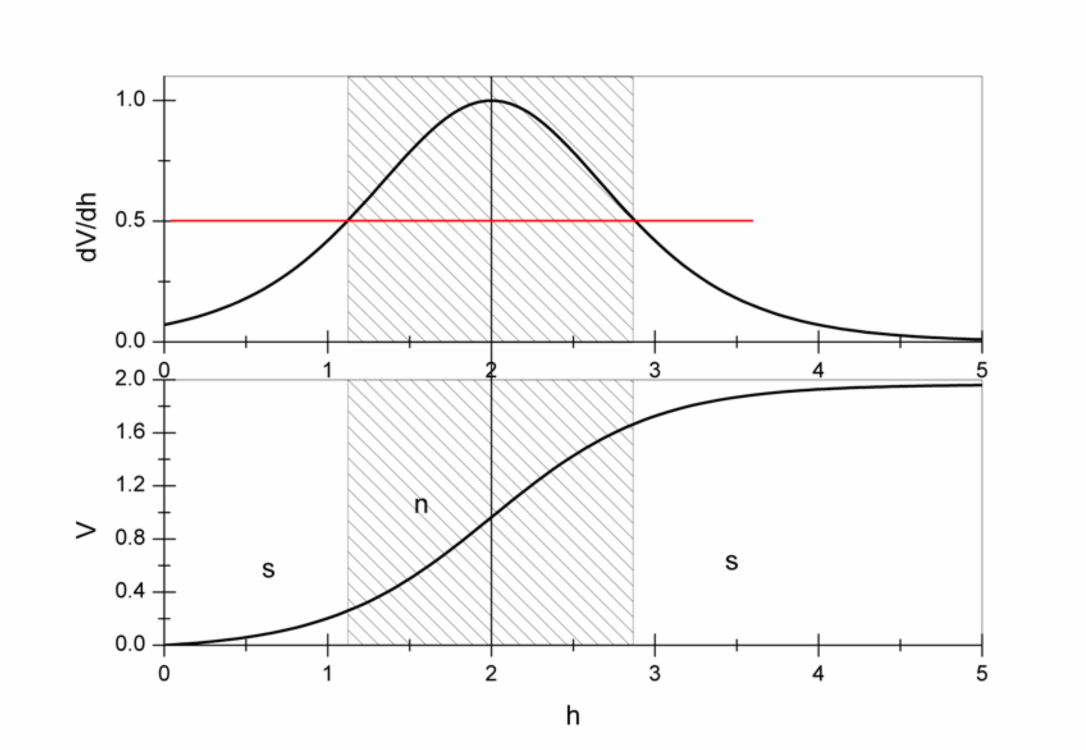
Oglejmo si primer. $N=100$ vozil vozi v krogu dolžin2 $L=200$ pri čemer je optimalna funkcija hitrosti

$$V\left(h\right)=\tanh\left(h-2\right)+\tan 2$$

Funkcija in njen odvod sta prikazana na sliki

$$V'(h) = 1 - \tanh^2(h-2)$$

Ta funkcija ima ekstrem pri $h = 2$.

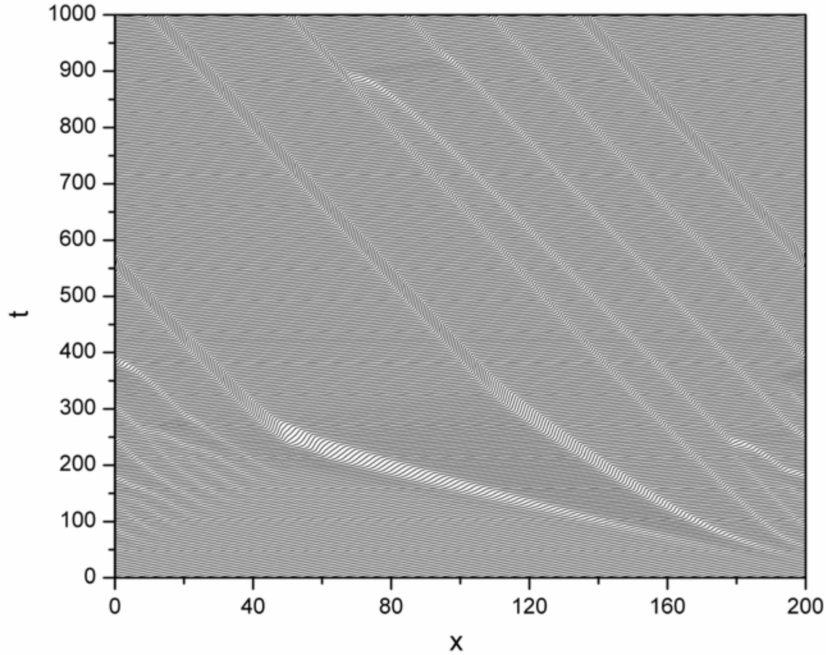


Slika. Model

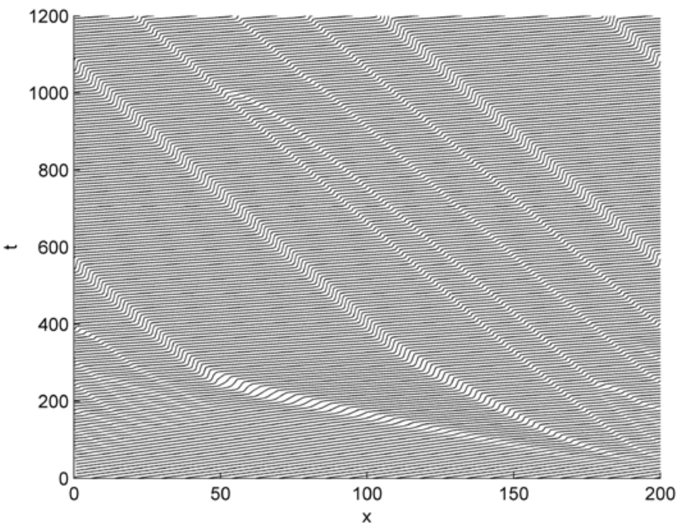
Rezuzltat numerične simulacije. Na sonoi

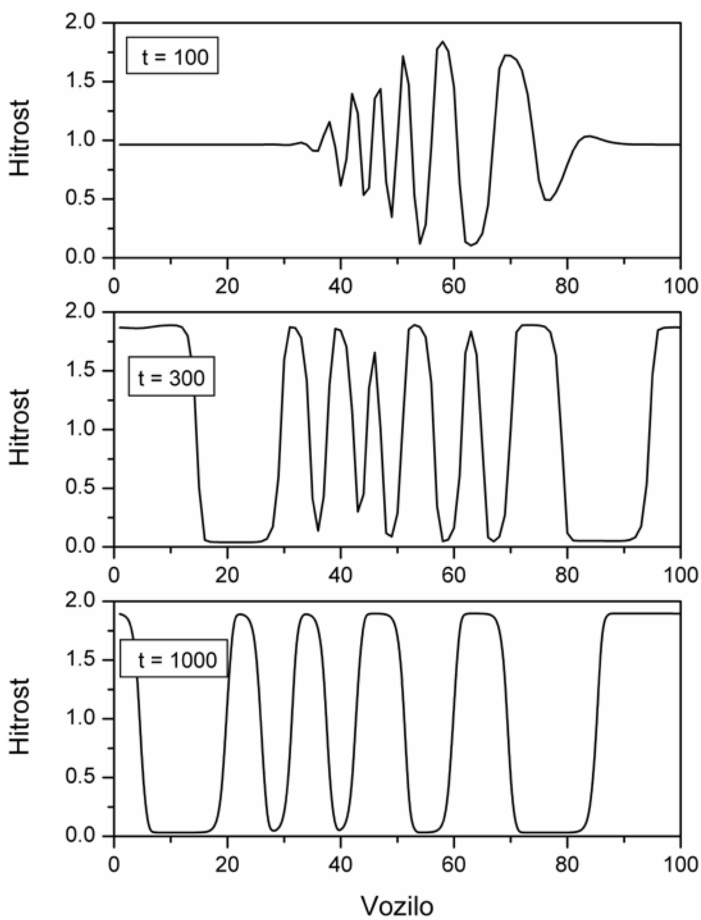
```
clear all
global N
global L
global a
%
% podatki
N = 100;     % stevilo vozil
L = 200.0;   % dolzina ceste
a = 1.0;    % obcutljivost
v0 = 0.0;
nstp = 4;
% zacetna hitrost vozil
tend = 1200.0; % koncni cas
%
y0 = zeros(2*N,1);  % vektor 1..N lege, N+1..2*N hitrosti
```

```
%
% initializacija
for i = 1:N
    y0(i) = (N-i)*L/N;
end
y0(1)=y0(1)+ 0.1;
for i=N+1:2*N
    y0(i) = v0;
end
%
options = odeset('RelTol',1e-8);
[t,y] = ode45(@vfun,[0 tend], y0);
%
hold on
% Risi
nn = size(t,1)
xx = zeros(nn,1);
tt = zeros(nn,1);
hold on
xlim([0 L]);
ylim([0 tend]);
for n = 1:nstp:N % for all cars
    b = L;
    k = 1;
    while k < nn
        j = 0;
        while y(k,n) < b & k < nn
            j = j + 1;
            k = k + 1;
            tt(j) = t(k);
            xx(j) = y(k,n) - (b - L);
        end
        plot(xx(1:j),tt(1:j));
        b = b + L;
    end
end
xlabel('x');
ylabel('t');
return
```

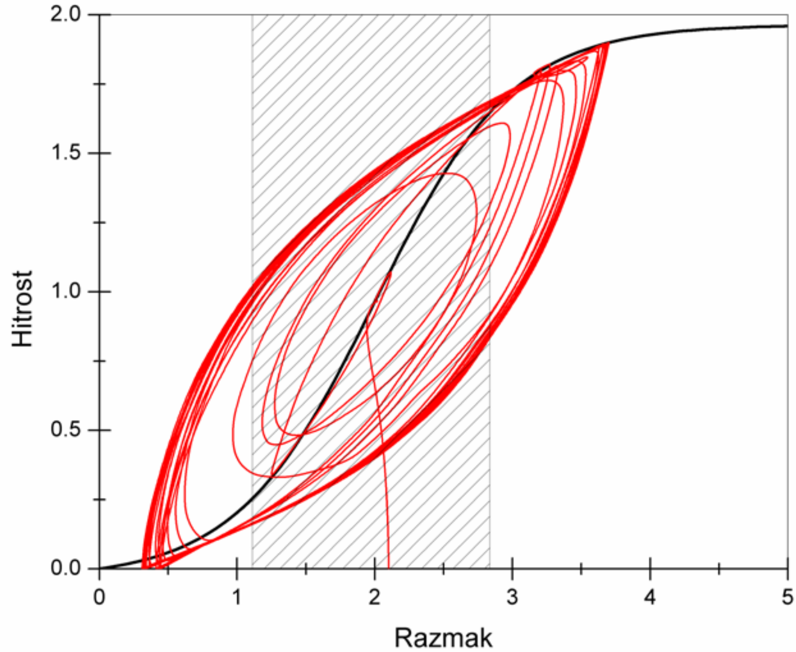


Slika. Razvoj zastojnih valov glede na krožno cesto.

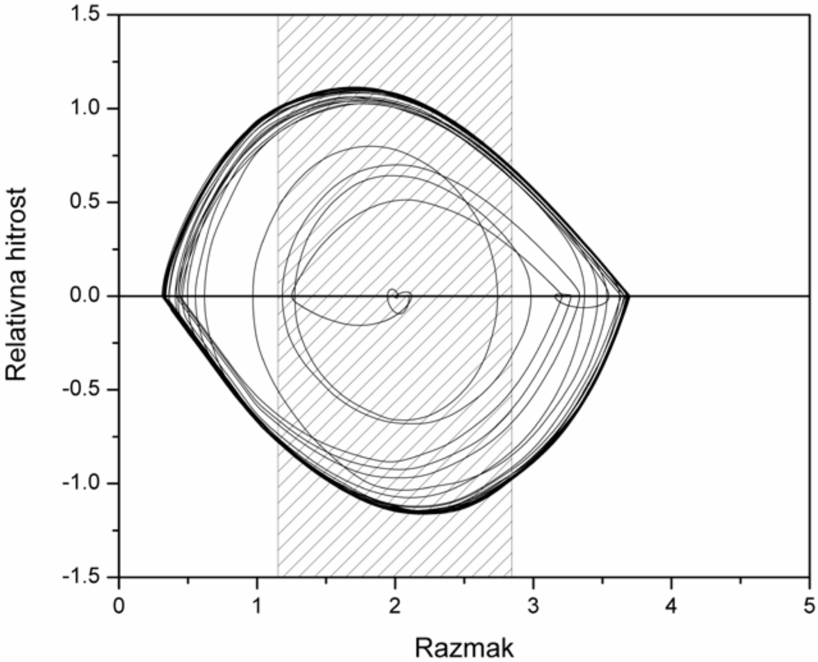




Slika. Hitrost posameznih vozil v različnih časih.



Slika. Hitrost v odvisnosti od razmaka med vozili za drugo vozilo v koloni.



Slika. Relativna hitrost v odvisnost od razmaka med vozili za drugo vozilo v koloni.