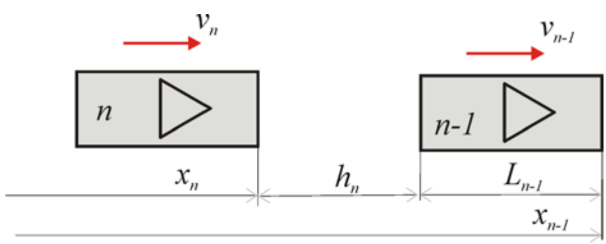
Teorija sledenja

Teorija sledenja obravnava gibanje kolone vozil, pri čemer se vozila ne prehitevajo oz. ne morejo medsebojno prehitevati (npr. tunel). Gibanje posameznega vozila je torej odvisno od gibanja ostalih vozil v koloni. začetki teorije izhajajo iz ugotovitve da lahko v prometu nastaneta dve vrsti nestabilnosti - prometni zastoji in prometne nesreče. Teorija sledenja skuša odgovoriti na vprašanje zakaj pride do nastanka zastojev in prometnih nesreče, ki so posledica notranjih zakonitosti gibanja kolone (t.j. kopičenja vzrokov nad katerimi vozniki nimajo možnosti vplova) in ne npr. slabe presoje voznika ali mehanske okvare.

Ko je razmak med vozili zelo velik se vozniki ne ozirajo na ostala vozila in vozijo po lastni presoji.

Opazujmo kolono vozil, ki jih označimo od 1 (prvo vozilo) do N (zadnje vozilo). Gibanje prvega vozila v koloni mora biti podano. Lega n-tega vozila v koloni naj bo $x_n(t)$ njegova hitrost naj bo

$$v_n = \frac{dx_n}{dt}$$



Slika.

Na kakšen način je gibanje v koloni omejeno razberemo iz slike X. Iz skice lahko razberemo osnovno geometrijsko zvezo, ki podaja legi zaporednih vozil v koloni

$$x_{n-1} = x_n + h_n + L_{n-1}$$

pri čemer je h_n razmak med voziloma, L_n dolžina vozila n. Iz te zveze je razmak med vozili

$$y_n \equiv h_n + L_{n-1} = x_{n-1} - x_n$$

Za varno vožnjo mora biti v vsakem trenutku izpolnjen pogoj

$$h_n \geq 0$$

Iz geometrijske zveze sledi omejitev hitrosti

$$v_{n-1} = v_n + \frac{dh_n}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh_n}{dt} = v_{n-1} - v_n$$

Stacionarni tok

Če je hitrost vseh vozil v koloni stalna je tok stacionaren. Naj bo hitrost *n* tega vozila v_{n0}. Potem je njegova lega v vsakem trenutku časa

$$\frac{dx_n}{dt} = v_{n0} \quad \Rightarrow \quad x_n = x_{n0} + v_{n0}\, t$$

kjer je $x_{n0} = x_n(0)$ izhodiščna lega vozila in $v_{n0} = v_n(0)$. Če to vstavimo v omejitveno enačbo dobimo razmak med vozili

$$x_{n-1,0} + v_{n-1,0}\, t = x_{n0} + v_{n0}\, t + h_n + L_{n-1} \quad \Rightarrow \quad h_n = \left(x_{n-1,0} - x_{n0} - L_{n-1}\right) + \left(v_{n-1,0} - v_{n0}\right)t$$

oz. po ureditvi

$$h_n = h_{n,0} + \left(v_{n-1,0} - v_{n,0}\right)t$$

pri čemer je $h_{n,0} = x_{n-1,0} - x_{n0} - L_{n-1}$ razmak med vozili v začetnem stanju. Ker se pa se razdalja med vozili ne more manjšati, mora biti $v_{n-1,0} - v_{n,0} \geq 0$ oz

$$v_{n-1,0} \geq v_{n,0}$$

Hitrosti vozil v koloni morajo kvečemu zmanjševati. Pri vožnji v krogu seveda velja le enakost.

Nestacionarni tok

kako posamezni voznik prilagaja svojo hitrost razmeram v koloni t.j. legi in hitrosti posameznih vozil v koloni ?

Voznik zazna razdaljo do sosednjega vozila in svojo relativno hitrostz. Njegova reakcija seveda ni trenutna. Odvisna je od njegovega reakcijskega časa in časa v katerem mehanizem vozila (zavora, hitrost) dosežeta poln učinek. V splošpnem je torej sprememba hitrosti

$$\frac{dv_n}{dt} = f\left(x_n, v_n, h_n, v_{n-1} - v_n, ...\right)_{t-\tau}$$

Kakšna je analitična oblika te funkcije ni znano. Pomembh je za konstrukcijo aktivnih tempomatov.

Ločimo dva osnovna primera.

- model optimalne hitrosti
- model optimalne razdalje

V prvem voznik prilagaja svojo hitrost neki izbrani optimalni hitrosti, po drugem skuša držati neke optimalne razdalje.

Model optimalne hitrosti

Po tem modelu se skuša voznik držati neke optimalne hitrosti. Če je hitrost prevelika, voznik zavira, če je premajhna pospešuje. Najenostavnejša zveza je

$$\frac{dv_n}{dt} = \lambda_n \left(v_{n,opt} - v_n\right)$$

pri čemer je λ_n parameter s katerim opišemo občutljivost kontrolnega mehanizma. Čim večja je vrednost tem večja bo sprememba hitrosti, oz. obratno če se vrednost manjša bo odziv sistema majhen.

Najenostavnejši model je $v_{n,opt} = v_{n-1}$ t.j. voznik skuša voziti tako hitro, kot voznik pred njim. Če vzamemo, da so občutljivosti vseh vouzil enake potem je

$$\boxed{\frac{dv_n}{dt} = \lambda\left(v_{n-1} - v_n\right)}$$

Sistem enačb z začetnimi pogoji

$$x_{n,0} = x_{n-1,0} - L_{n-1} - h_{n,0}$$

Primer 1. Voznik prvega vozila spelje s hitrostjo v_0. Kako se odzove vozilo, ki za njim miruje ?

Rešitev. Pot, ki jo opravi prvo vozilo je

$$\frac{dx_0}{dt} = v_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = v_0 t$$

Deferencialni enačbi, ki opisujeta gibanja drugega vozila sta

$$\frac{dv_1}{dt} = \lambda\left(v_0 - v_1\right) \qquad \frac{dx_1}{dt} = v_1$$

pri čemer sta začetna pogoja $x_1\left(0\right) = x_{10}$ in $v_1\left(0\right) = 0$. Enačba je linearna zato jo zapišemo v obliki

$$\int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b}\ln\left(a-bx\right) + C$$

$$\frac{dv_1}{v_0 - v_1} = \lambda\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^{v_1} \frac{dv_1}{v_0 - v_1} = \lambda \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \quad -\ln\left(v_0 - v_1\right)\Big|_0^{v_1} = \lambda t$$

$$\Rightarrow \quad -\ln\left(v_0 - v_1\right) + \ln v_0 = \lambda t$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{v_0}{v_0 - v_1} = \lambda t$$

po antilogaritmiranju je

$$\boxed{v_1 = v_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}$$

Pot, ki jo opravi je

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = v_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

in po integraciji

$$x_1 = x_{10} + v_0\, t - v_0 \int_0^t e^{-\lambda t} dt = x_{10} + v_0\, t + \frac{v_0}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^t$$

oz

$$\boxed{x_1 = x_{10} + v_0\, t - \frac{v_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}$$

Ko gre $t \to \infty$ gre $v_1 \to v_0$ in $h_1 \to h_{10} + \frac{v_0}{\lambda}$. Večja je hitrost večja je razdalja. Razdalja med voziloma je

$$\boxed{h_1 = x_0 - x_1 - L_0 = v_0 t - x_{10} - L_0 - v_0\, t + \frac{v_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = h_{10} + \frac{v_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}$$

□□□

Primer 2. Vozili vozita v krogu s hitrostjo v_0. Kako se odzove vozilo, ki za njim mirujer ?

Rešitev. Gibanje prvega vozila popisujeta enačbi

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \qquad \frac{dv_1}{dt} = \lambda\left(v_2 - v_1\right)$$

gibanja drugega pa enačbi

$$\frac{dv_2}{dt} = \lambda\left(v_1 - v_2\right) \qquad \frac{dx_2}{dt} = v_2$$

pri čemer je začetni pogoj

$$x_1(0) = L/2 \text{ in } v_1(0) = v_{10}$$

$$x_2(0) = 0 \text{ in } v_2(0) = v_{20}$$

Rešitev sistema dobimo s pomočjo programa Maple. Ta je

Legi vozil sta

$$x_1 = \frac{L}{2} + \frac{v_{10} + v_{20}}{2} t + \frac{v_{10} - v_{20}}{4\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right)$$

$$x_2 = \frac{v_{10} + v_{20}}{2} t + \frac{v_{10} - v_{20}}{4\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right)$$

Hitrosti sta

$$v_1 = \frac{1}{2}\left[v_{10} + v_{20} - \left(v_{20} - v_{10}\right)e^{-2\lambda t}\right]$$

$$v_2 = \frac{1}{2}\left[v_{10} + v_{20} + \left(v_{20} - v_{10}\right)e^{-2\lambda t}\right]$$

Razdalja med vozili je

$$h = x_1 - x_2 = \frac{L}{2} + \frac{v_{10} - v_{20}}{2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right)$$

Če sta hitrostui vozil različni, potem po času $t \to \infty$ Pot dobimo z integracijo

$$v_1 = v_2 \to \frac{v_{10} + v_{20}}{2}$$

Razdalja med vozuili pa je

$$h \to \frac{L}{2} + \frac{v_{10} - v_{20}}{2\lambda}$$

□□□

Model optimalne razdalje

Po tem modelu se skuša voznik držati neke optimalno razdaljo. Če je razdalja prevelika, pospešuje, če je premajnja zavira. To lahko zapišemo kot

$$\frac{dv_n}{dt} = \eta_n\left(h_n - h_{n,opt}\right)$$

pri čemer je η_n občutljivost *n* tega vozila. V tem primeru ima občutljivost dimenzijo $[\eta]=\frac{1}{T^2}$ Ker je $h_n = x_{n-1} - x_n - L_{n-1}$ lahko to enačbo zapišemo kot

$$\frac{dv_n}{dt} = \mu_n \left(x_{n-1} - x_n - L_{n-1} - h_{n,opt} \right)$$

$$x_{n,0} = x_{n-1,0} - L_{n-1} - h_{n,0}$$

$$\frac{dv_n}{dt} = \mu_n \left(x_{n-1} - x_n - L_{n-1} - h_{n,opt} \right)$$
$$L_{n-1} = x_{n-1,0} - x_{n,0} - h_{n,0}$$

$$\frac{dv_n}{dt} = \mu_n \left(\left(x_{n-1} - x_{n-1,0} \right) - \left(x_n - x_{n,0} \right) - \left(h_{n,opt} - h_{n,0} \right) \right)$$
$$y_n = x_n - x_{n,0}$$

$$\frac{dv_n}{dt} = \mu_n \left(y_{n-1} - y_n - \eta_n \right)$$
$$y_n = x_n - x_{n,0}$$

Iz same definicije sledi, da je začetni pogoj je $y_n(0) = 0$.

Primer dveh vozil

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \mu y_1 = \mu y_0$$

Naj bo $y_0 = v_0 t$. Potem je

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \mu y_1 = \mu v_0 \, t$$

Partikularna rešitev je $y_1 = v_0 t$, homogena pa

$$y_1 = v_0 t + C_1 \cos \sqrt{\mu} t + C_2 \,\mathrm{sins} \sqrt{\mu} t$$

Začetni pogoj $y_1(0) = 0$ da

19.12.2014 9:00:03

$$y_1 = 0 + C_1 \times 1 + C_2 \times 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$y_1 = v_0 t + C_2 \sin\sqrt{\mu} t$$

Hitrost vozila 1 je

$$v_1 = \frac{dy_1}{dt} = v_0 + C_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu} t$$

Naj bo $v_1(0) = 0$ pote je

$$v_1(0) = v_0 + C_2\sqrt{\eta} \times 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{v_0}{\sqrt{\eta}}$$

Končna rešitev je

$$y_1 = v_0\left(t - \frac{\sin\sqrt{\eta}\, t}{\sqrt{\eta}}\right)$$

Tokovnici vozil sta

$$x_0 = v_0 t$$
$$x_1 = x_{1,0} + v_0\left(t - \frac{\sin\sqrt{\eta}\, t}{\sqrt{\eta}}\right)$$

Kje se sekata

$$x_0 - x_1 = -x_{1,0} + \frac{\sin\sqrt{\eta}\, t}{\sqrt{\eta}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\sqrt{\eta}\, t > x_{1,0}\sqrt{\eta}$$

Ker pa je $1 \geq \sin\sqrt{\eta}\, t > x_{1,0}\sqrt{\eta} \quad \Rightarrow \quad x_{1,0} \leq \frac{1}{\sqrt{\eta}}$. V nasprotnem primeru pride do trčenja.

Primer vozil, ki vozita v krogu

Enačbi sta

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \mu y_2 = \mu y_1 \qquad \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \mu y_1 = \mu y_2$$

Če ju odštejem dobim

$$\frac{d^2\left(y_2-y_1\right)}{dt^2}=0 \quad \Rightarrow \quad y_2-y_1=C_1+C_2t$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+\mu y_1=\mu\left(y_1+C_1+C_2t\right)$$

Drug model je model, ko skuša voznik voziti na varnostni razdalji

$$h_n=h_{n0}+v_nT$$

$$\frac{dv_n}{dt}=\mu_n\left(y_{n-1}-y_n-v_nT\right)$$
$$y_n=x_n-x_{n,0}$$

Primer.

$$\frac{dy_1}{dt}=v_{10} \quad \Rightarrow \quad y_1=v_0t$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}+\mu T\frac{dy_2}{dt}+\mu y_2=\mu y_1$$

Rešpitev te enačbe je (Maple)

$$y_2=v_{10}\left(t-T\right)+e^{-\frac{\eta T}{2}t}\left(v_{10}T\,\mathrm{ch}\,\omega t+\frac{2\left(v_{20}-v_{10}\right)+\eta T^2v_{10}}{\omega}\mathrm{sh}\,\omega t\right)$$

kjer je

$$\omega=\frac{\sqrt{\eta^2T^2-4\eta}}{2}$$

Če je

$$\eta T^2>4$$

Če je $\eta T^2 < 4$ potem je $\omega = \frac{\sqrt{4\eta - \eta^2 T^2}}{2}$

$$y_2 = v_{10}\left(t - T\right) + e^{-\frac{\eta T}{2}t}\left[v_{10} T \cos \omega t + \frac{2\left(v_{20} - v_{10}\right) + \eta T^2 v_{10}}{\omega} \sin \omega t\right]$$

Hitrost

$$v_2 = v_{10} - e^{-\frac{\eta T}{2}t}\left[\left(v_{20} - v_{10}\right)\cos \omega t + \frac{\eta T\left(v_{20} + v_{10}\right)}{\omega} \sin \omega t\right]$$

□□□