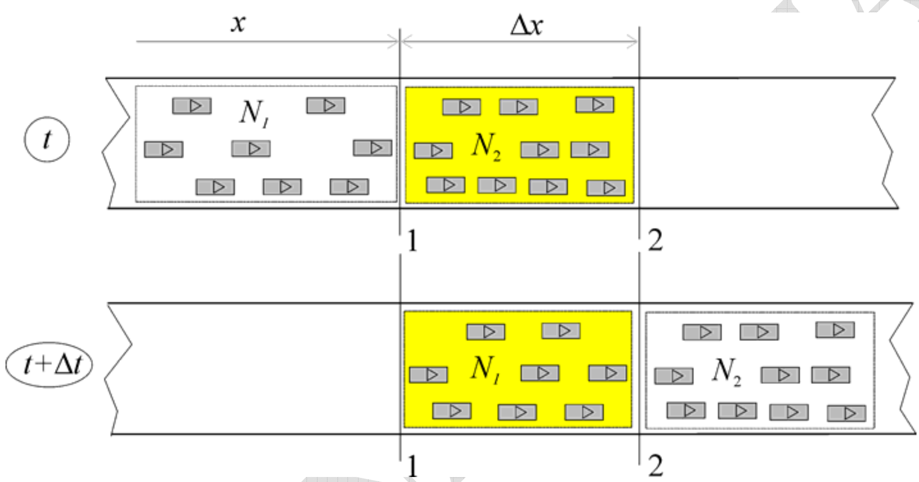
Zvezni modeli prometnega toka

Osnovna enačba

Izpeljava osnovne enačbe. Opazujemo tok vozil na odseku med med točkama x in $x+\Delta x$. Pri tem predpostvimo, da na obravnavanem odseku ni uvozov ali izvozov (izvorov ali ponorov) na cesto t.j. vozila odseka ne morejo zapustiti niti se na njem ne morejo pojaviti nova vozila. Pri izpeljavi osnovne enačbe si pomagamo s sliko 1.



Slika 1.

Naj se v čau t na obravnavanem odseku nahaja N_2 vozil. Ker je dolžina odseka Δx, je srednja gostoto prometa v tem času enaka

$$k_1 = \hat{k}\left(\bar{x}, t\right) = \frac{N_2}{\Delta x} \tag{a}$$

pri čemer je $\bar{x}$ neka točka znotraj odseka, t.j. $\bar{x} \in \left[x, x+\Delta x\right]$. V času $t+\Delta t$ naj se na odseku nahaja N_1 vozil. V tem času je torej na tem odseku srednja gostota prometa enaka

$$k_2 = \hat{k}\left(\bar{x}, t+\Delta t\right) = \frac{N_1}{\Delta x} \tag{b}$$

Srednja hitrost spreminjanja gostote prometa je, če upoštevamo (a) in(b), v danem intervalu časa Δt enaka

$$\frac{k_2 - k_1}{\Delta t} = \frac{\hat{k}\left(\overline{x}, t + \Delta t\right) - \hat{k}\left(\overline{x}, t\right)}{\Delta t} = \frac{N_1 - N_2}{\Delta t\, \Delta x} \tag{c}$$

Da določimo število vozil N_1 in N_2 si oglejmo pretok. V času Δt prevozi prvo točko N_1 vozil, drugo točko pa N_2 vozil. Pretok vozil v teh točkah t.j. na vstopu in izstopu obravnavanega odseka je torej

$$q_1 = \hat{q}\left(x, t + \Delta t\right) = \frac{N_1}{\Delta t} \qquad \text{in} \qquad q_2 = \hat{q}\left(x + \Delta x, t + \Delta t\right) = \frac{N_2}{\Delta t} \tag{d}$$

Iz teh zvez se da izraziti število vozil. Iz prve je $N_1 = q_1\, \Delta t$, iz druge pa $N_2 = q_2\, \Delta t$. Če ti števili vozil vstavimo v enačbo (c) dobimo

$$\frac{k_2 - k_1}{\Delta t} = \frac{q_1\, \Delta t - q_2\, \Delta t}{\Delta x\, \Delta t} = -\frac{q_2 - q_1}{\Delta x} \tag{e}$$

ali zapisano z razlikami

$$\frac{\hat{k}\left(\overline{x}, t + \Delta t\right) - \hat{k}\left(\overline{x}, t\right)}{\Delta t} + \frac{\hat{q}\left(x + \Delta x, t + \Delta t\right) - \hat{q}\left(x, t + \Delta t\right)}{\Delta x} = 0 \tag{f}$$

Po predpostavki sta funkciji $\hat{k}\left(x,t\right)$ in $\hat{q}\left(x,t\right)$ zvezni zato naj bi dobljena enačba veljala za poljubno majhen odsek Δx in časovni interval Δt. V limiti, ko gre $\Delta x \to 0$ in $\Delta t \to 0$ dobimo

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} \frac{\hat{k}\left(\overline{x}, t + \Delta t\right) - \hat{k}\left(\overline{x}, t\right)}{\Delta t} = \frac{\partial k}{\partial t} \qquad \lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} \frac{\hat{q}\left(x + \Delta x, t\right) - \hat{q}\left(x, t\right)}{\Delta x} = \frac{\partial q}{\partial x} \tag{g}$$

pri čemer smo upoštevali tudi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \overline{x} = x$. Na ta način preide enačba (f) v naslednjo parcialno diferencilano enačbo prvega reda

$$\boxed{\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0} \tag{0.1}$$

Izpeljana enačba je osnovna enačba prometnega toka, ki povezuje gostoto prometa *k* in pretok *q*. Za njeno reševanje je potrebna dodatna enačba, ki ti veličini povezuje. Obstajata dva pristopa oz. načina po katerih pridemo do te dodatne enačbe. Prvi pristop vodi k t..i. kinematičnim modelom drugi pa dinamičnim modelom.

Kinematični modeli. Pri teh modelih je zvezo med gostoto in pretokom podana neposredno t.j. podana je funkcija $q = \hat{q}(k)$. Ta zveza velja tudi pri stacionarnem prometnem toku zato navedeni pristop njeno veljavnos širi tudi nestacionarne pogoje. Ker pa je $q = k\,v$ pomeni to, da morata biti povezani tudi hitrost v in gostoto k t.j. podana mora biti funkcija $v = \hat{v}(k)$. Taka zveza pove, da se hitrost toka trenutno t.j. brez zakasnitve, prilagaja spremembi gostote toka. Koliko oz. kdaj je ta pristop upravičen se da ugotoviti s poskusi oz. njegovo praktično uporabo.

Dinamični modeli. Osnovna predpostavka teh modelov je, da se hitrost toka ne more trenutno odzivati na spremembo gostote. Modeli temeljijo na hidrodinamični analogiji.

Kinematični modeli

Osnovna enačba. Naj bo pretok odvisen od gostote t.j. naj bo $q = \hat{q}(k)$. Po pravilu za posredno odvajanje je $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{dq}{dk}\frac{\partial k}{\partial x}$. Če to upoštevamo v enačbi (0.1) dobimo

$$\boxed{\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{dq}{dk}\frac{\partial k}{\partial x} = 0} \tag{0.2}$$

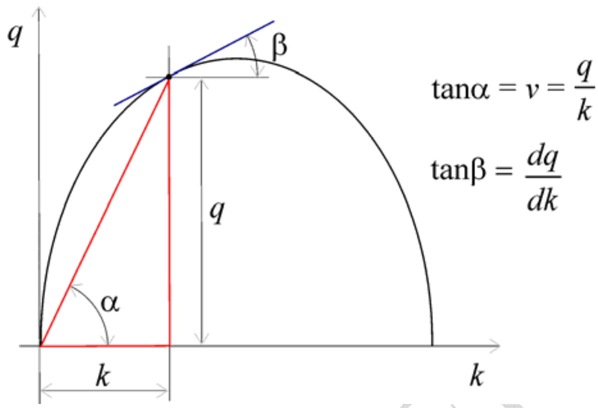
Ker pa je $q = k\,v$ pomeni to, da mora biti povezani tudi hitrost v in gostoto k. Če je znana $\hat{q}(k)$ potem je $v = \hat{q}(k)/k$, če pa je podana funkcija $v = \hat{v}(k)$ potem je $q = k\,\hat{v}(k)$. Torej

$$\begin{aligned} q = \hat{q}(k) \quad &\Rightarrow \quad v = \frac{\hat{q}(k)}{k} \\ v = \hat{v}(k) \quad &\Rightarrow \quad q = k\,\hat{v}(k) \end{aligned}$$

V primeru $q = k\,\hat{v}(k)$ je odvod pretoka po gostoti enak

$$\frac{dq}{dk} = \frac{d(k\,\hat{v})}{dk} = \hat{v} + k\frac{d\hat{v}}{dk} \tag{0.3}$$

Geometrični pomen odvoda $\frac{dq}{dk}$ in hitrosti v v digramau $q = \hat{q}(k)$ prikazuje slika 2.



Slika 2.

Problem začetnih vrednosti. Enačba (0.2) je parcialna diferencialna enačba prvega reda za neznano gostota prometa $k = \hat{k}(x,t)$. V primeru, ko je $\frac{dq}{dk}$ konstat je enačba linearna, drugače je enačba nelinearna. Za njeno reševanje potrebujemo definicijsko območje te funkcije t.j. interval $x \in [a,b]$ in začetni pogoj t.j. porazdelitev gostote prometa v nekem začetnem času $t = t_0$. Ta naj bo podana s funkcijo

$$\hat{k}(x,t_0) = f(x)$$

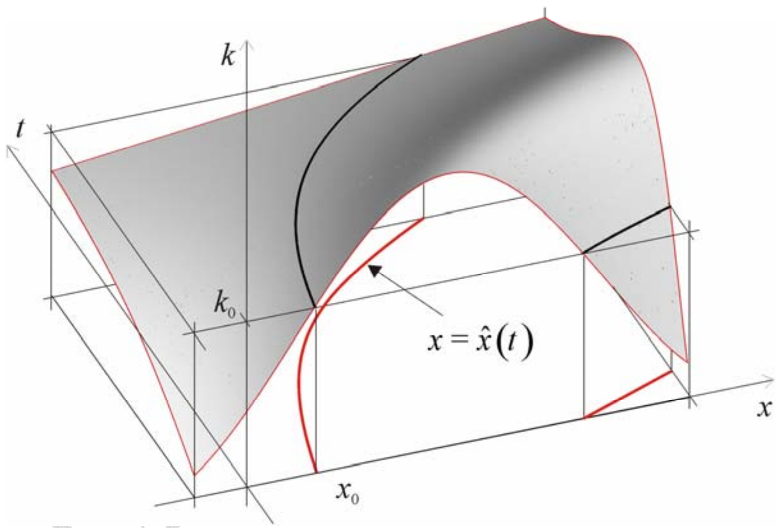
Poišči funkcijo $k = \hat{k}(x,t)$ ki zadošča (0.2) in ima začetno porazdelitev . Torej

Definicjsko območje	$x \in [a,b] \quad t \geq t_0$
Enačba	$\frac{\partial k}{\partial t} + \hat{c}(k)\frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad c \equiv \hat{c}(k) = \frac{dq}{dk}$
Začetni pogoj	$\hat{k}(x,0) = f(x)$
Robni pogoj	$\hat{q}(a,t) = g(t)$

(0.4)

Postavljena naloga se da rešiti na analitični ali numerični način. Analitični način reševanja je uporaben za enostavne primere, ki med drugim služijo za oceno natančnosti numeričnih metod, numerične metode pa so uporabne za praktično izračunavanje. Za razliko od analitiočne rešitve, ki omogoča analizo parametrov, ki nastopajo v rešitvi, numerične metode dajo rešitve le za posamezne primere.

Analitično reševanje enačbe. Rešitev enačbe poiščemo z metodo *karakteristik* (valov). Karakteristika je krivulja $x = \hat{x}(t)$ v ravnini (x,t) vzdolž katere je gostoto prometa stalna k_0. Primer prikazuje slika 3.



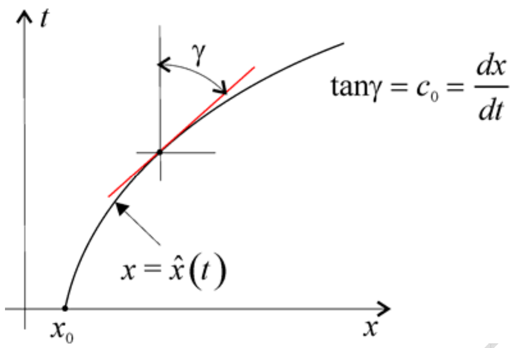
Slika 3

V času $t = 0$ je v točki x_0 gostota toka

$$k_0 = \hat{k}(x_0, 0) = f(x_0) \tag{a}$$

Naj bo rešitev $\hat{k}(x,t) = k_0$. To je posredna enačba karakteristike. Totalni diferencial te enačbe je $\frac{\partial \hat{k}}{\partial t} dt + \frac{\partial \hat{k}}{\partial x} dx = 0$ ali če delimo z dt

$$\frac{\partial \hat{k}}{\partial t}+\frac{\partial \hat{k}}{\partial x}\frac{d\hat{x}}{dt}=0$$



Slika 4

Če to enačbo primerjamo z enačbo prometnega toka (0.2) v kateri vzamemo, da so odvodi in funkcija $\hat{c}$ izračunani pri $k=k_0$, dobimo diferencialno enačbo kakarakteristike

$$\frac{dx}{dt}=c_0$$

kjer je $c_0=\hat{c}(k_0)$. Integral te diferencialne enačbe je $x=\int c_0\,dt+C=c_0\,t+C$. Integracijsko konstanto C določimo iz začetnega pogoja $x(0)=x_0$, ki da vrednost $C=x_0$. Karakteristika je torej premica

$$\boxed{x=x_0+c_0\,t}$$

Gostota prometnega toka je konstantna vzdolž premic. Če sta dani koordinati (x,t) potem iz enačbe karakteristike sledi, da ta seka x os v točki $x_0=x-c_0\,t$. To pa nadalje pomeni, da je $k_0=f(x_0)=f(x-c_0t)$ ali če opustimo indeks 0

$$\boxed{k=f(x-ct)}$$

Interpretacija enačbe je enostavna: Začetna porazdelitev se s hitrostjo c širi vzdolž časovne osi.

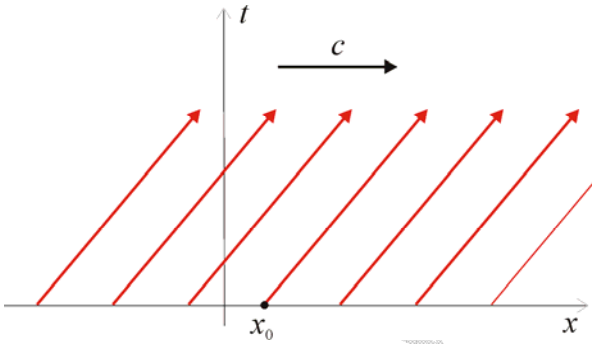
Pri tem je potrebno paziti, da: imamo opravka z dvema vrstama hitrosti:

- hitrost toka $v=\hat{v}(k)$

- hitrost vala gostote toka $c_0 = \hat{c}(k_0) = \left(\frac{dq}{dk}\right)_{k=k_0} = \left(v + k\frac{dv}{dk}\right)_{k=k_0}$

Konstantna hitrost toka

Če se vozila premikajo z (dovoljeno) hitrostjo c t.j. da je hitrost neodvisna od gostote potem je pretok $q = c\,k$ karakteristike pa so vzporedne premice $x = x_0 + c\,t$. V tem primeru je hitrost toka enaka hitrosti vala.



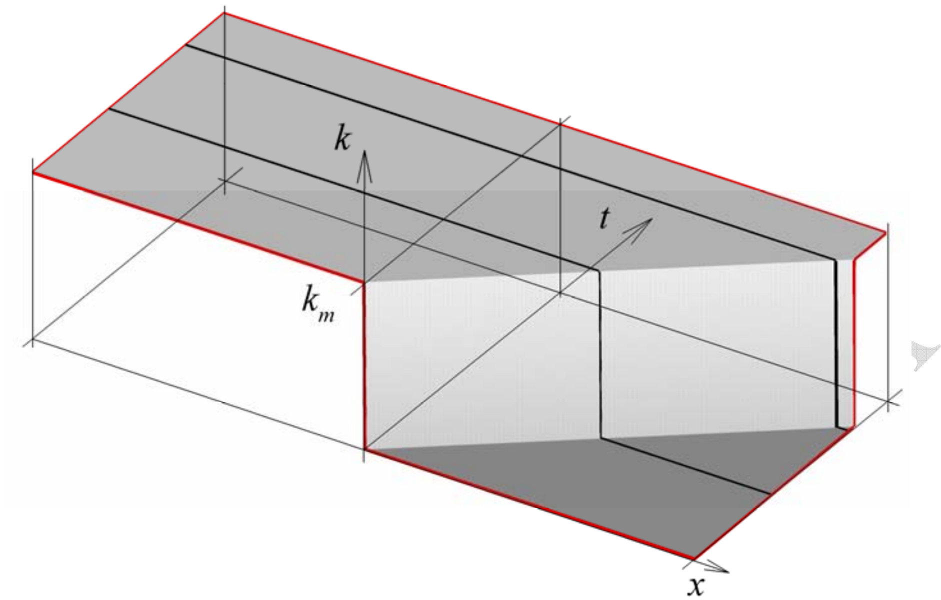
Slika 5

Primer 1. Naj bo začetna porazdelitev toka podana z gostoto

$$f = \begin{cases} k_m & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Gostoata toka bo

$$k = \begin{cases} k_m & x - ct \le 0 \\ 0 & x - ct > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = \begin{cases} k_m & x \le ct \\ 0 & x > ct \end{cases}$$



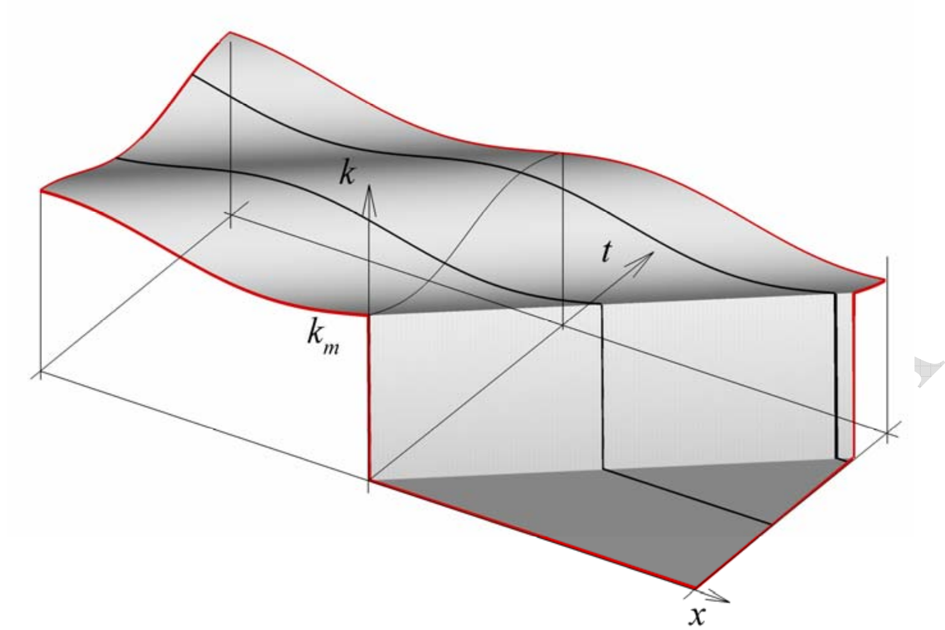
Slika 6

Primer 2. Naj bo začetna porazdelitev toka podana z gostoto

$$f = \begin{cases} k_m + a\sin bx & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Gostoata toka bo

$$f = \begin{cases} k_m + a\sin\left[b\left(x - ct\right)\right] & x \le ct \\ 0 & x > ct \end{cases}$$



Slika 7. $a = 0.1$**,** $b = 1$**,** $c = 1.2$

Greenshildov model

Greenshildov model predpostavlja da je zveza med hitrostjo in gostota toka linearna. Večja je gostota manjša je hitrost.

$$v = v_m \left(1 - \frac{k}{k_m} \right)$$

Pretok je po tem modelu je

$$q = k\,v = v_m k \left(1 - \frac{k}{k_m} \right)$$

Hitrost širjene vala $\frac{dq}{dk} = v_m \left(1 - \frac{2k}{k_m} \right)$. Maksimalni pretok doseže pri gostoti $k = \frac{k_m}{2}$ pri čemer je hitrost $v_{opt} = \frac{v_m}{2}$. Karakteristike so podane z enačbo

$$x = x_0 + v_m \left(1 - \frac{2k_0}{k_m} \right) t$$

Hitrost valov kaže na dve značilnosti. Vozila se premikajo naprej. Tudi val za katerega je $c > 0$ se premika naprej. Za val tza katerega je $c < 0$ pa se pomika nazaj.

Primer. Naj vozila stojijo pred rdečo lučjo, ki se nahaja v točki $x = 0$. Za semaforjem naj bo gostota $k = k_m$, pred semaforjem pa je cesta prazna t.j. $k = 0$.

$$k_0 = \begin{cases} k_m & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Karakteristike imajo hitrost

$$c_0 = v_m\left(1 - \frac{2k_0}{k_m}\right) = \begin{cases} -v_m & x \le 0 \\ v_m & x > 0 \end{cases}$$

Za vozila, ki prehajajo točko $x_0 = 0$ so karakteristike

$$x = v_m\left(1 - \frac{2k_0}{k_m}\right)t$$

Problem točke je, da gostota med 0 in km. Nakloni določajo gostote

$$k_0 = \frac{k_m}{2}\left(1 - \frac{x}{v_m t}\right)$$

Kako se gibljejo posamezna vozila skozi točko 0? Hitrost toka je

$$\frac{dx}{dt} = v_m\left(1 - \frac{k}{k_m}\right)$$

ker pa je v točki 0 gostota

$$k = \frac{k_m}{2}\left(1 - \frac{x}{v_m t}\right)$$

ali

$$\frac{dx}{dt} = v_m\left(1 - \frac{1}{k_m}\frac{k_m}{2}\left(1 - \frac{x}{v_m t}\right)\right) = \frac{v_m}{2} + \frac{x}{2t}$$

To je linearana differencialna enačba prvega reda

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{2t} = \frac{v_m}{2}$$

Rešitev te homogene diferencialne enačbe je

$$x = v_m t + C\sqrt{t}$$

pri čemer je C integracijska konstanta. Naj bo vozil v trenutku vklopa semaforja na razdalji x_0. Začetni pogoj s katerega določimo neznano konstanto postavimo iz zahteve, da ta enačba velaj za vozila, ki se v začetnem času nahajajo na razdalji $-x_0$ (t.j. vprašanje kdaj pride na vrsto da spelje). To se bo zgodilo po času $x_0 = -v_m t_0$ tako dobimo

$$-x_0 = v_m \frac{x_0}{v_m} + C\sqrt{\frac{x_0}{v_m}} \quad \Rightarrow \quad C = -2x_0\sqrt{\frac{v_m}{x_0}} = -2\sqrt{x_0 v_m}$$

Lega vozil, ki je določena z enačbo

$$\boxed{x = v_m t - 2\sqrt{x_0 v_m t} \qquad t \ge t_0 = -x_0/v_m}$$

Hitrost vozil je

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = v_m - \frac{2x_0 v_m}{\sqrt{x_0 v_m t}} = v_m - 2\sqrt{\frac{x_0 v_m}{t}} = v_m\left(1 - 2\sqrt{\frac{t_0}{t}}\right)}$$

Ka enačba kaže na to, da vozila v začetku mirujejo, ko pa se čas veča vozila pridobivajo največjo hitrost. t.j. $v = v_m\left(1 - 2\sqrt{\frac{t_0}{t}}\right) \to v_m$ k ogre $t \to \infty$, ki pa je nikdar ne dosežejo.

Koliko časa porabi vozilo da prevozi semafor ?

Vozilo bo brevozilo semafor, ko bo $x = 0$

$$0 = v_m t_1 - 2\sqrt{x_0 v_m t_1} \quad \Rightarrow \quad 4x_0 v_m t_1 - v_m^2 t_1^2 = 0$$

in od tu

$$\boxed{t_1 = \frac{4x_0}{v_m}}$$

To je 4x počasneje kot če bi vozil z največjo možno hitrostjo. Koliko časa potebuje vozilo na razdalji, da prevozi semafor, če pri spejevanju doseže hitrost

$$\boxed{t_1 = \frac{4x_0}{v_m}}$$

Koliko vozil bo prevozilo semafor ?

Če semafor po času T ugasne gab o v tem času prevozilo vozilo, ki se je nahajalo na razdalji

$$x_0 = \frac{v_m T}{4}$$

Število vozil na tem odseku je $N = \int_{-x_0}^{0} k\,dx = x_0 k_m$ oz Če v tej enačbi upoštevam izračunani x0 dobimo

$$\boxed{N = \frac{k_m v_m}{4} T}$$

Primer. Naj bo gostota vozil $k_m = 250\,\mathrm{v/km}$ in omejitev hitrosti na $v_m = 70\,\mathrm{km/h}$. Kolikšno število vozil prevozi semafor, ki gori $T = 1\,\mathrm{s}$?

Rešitev. Število vozil je

$$N = \frac{k_m v_m}{4} T = \frac{250 \times 80}{4} \times \frac{1}{60} = 83.3\,\mathrm{v}$$

Zastoj

Integralska oblika enačbe prometnega toka

Enačbo prometnega toka $\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0$ integriramo od x_1 do x_2

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}\right)dx=0 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial k}{\partial t}dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial q}{\partial x}dx=0$$

V prvem integralu lahko izpostavimo odvajanje po času $\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial k}{\partial t}dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}k\,dx$, drugi integral pa lahko enostavno rešimo $\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial q}{\partial x}dx=q\Big|_{x_1}^{x_2}=q_2-q_1$. Na ta način dobimo enačbo prometnega toka zapisano v integralski obliki

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}k\,dx=q_1-q_2} \tag{0.5}$$

Integral $\int_{x_1}^{x_2}k\,dx$ pomeni število vozil, ki se v času *t* nahajajo med točkama x_1 do x_2.

$$N(x,t)\equiv\int_{x_1}^{x}k(x,t)\,dx$$

Z novimi oznakami se da zapisati v obliki

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial t}=q_1-q_2} \tag{0.6}$$

Integralsko obliko zato lahko interpretiramo na naslednji način. *Sprememba število vozil znotraj kontrolnega odseka je enak razliki vhodnega in izhodnega pretoka vozil.*

Če pretoka ni, se število vozil ohranja t.j. $\frac{\partial N}{\partial t}=0$ pomeni $N=\text{const}$. Enačbi zato rečemo tudi *kontinuitetna enačba.*

Skoki

Prednost integralskega zapisa je, da funkcije niso nujno zvezno odvedljive oz. da se da s takim zapisom obravnavati primere, kjer prihaja do skokovitih sprememb gostote toka(nesreča, zoženje, delo na cesti)..

Naj bo $x=\xi$ točka v kateri imamo skok gostote toka. Potem je lahko integral razstavimo na dva dela

$$\int_{x_1}^{x_2} k\,dx=\int_{x_1}^{\xi} k\,dx+\int_{\xi}^{x_2} k\,dx=k_1\left(\xi-x_1\right)+k_2\left(x_2-\xi\right) \tag{0.7}$$

Če je $\xi=x_1+u\,t$

$$\int_{1}^{2} k\,dx=\int_{x_1}^{\xi} k\,dx+\int_{\xi}^{x_2} k\,dx=\left(k_1-k_2\right)ut+k_2\left(x_2-x_1\right) \tag{0.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(k_1-k_2\right)ut+k_2\left(x_2-x_1\right)\right]=\left(k_1-k_2\right)u \tag{0.9}$$

$$\left(k_1-k_2\right)u=q_1-q_2 \tag{0.10}$$

Hitrost širjenja vala je

$$\boxed{u=\frac{q_1-q_2}{k_1-k_2}} \tag{0.11}$$

Kakšna je interpretacija te enačbe? Opazovalec v točki x bo v časovni enoti izmeril pretok $q=k\,v$. Če se opazovalec giblje s hitrostjo u proti toku bo v istem času izmeril tok $q'=\left(v-u\right)k$.

Po času $t=t_1$ bo zastoj dosegel točko $x_1=ut_1$. Skozi točko $\left(x_1,t_1\right)$ bo potekala tokovnica $x_1=x_0+v_1\,t_1$ pri čemer je x_0 lega vozil v trenutku nastanka zastoja.

Izenačimo, pa dobimo naslednji rezultat: v času t_1 bo val dosegel vozila, ki so bila v trenutku nastanka vala od točke nastanka oddaljena za

$$\boxed{x_0 = \left(u - v_1\right) t_1}$$

Ali obratno: val bo dosegle vozila, ki se nahajajo na razdalji x_0 od mesta zastoja v času

$$\boxed{t = \frac{x_0}{u - v_1}}$$

Primer 1. Prometni tok je določen z pretokom $q_1 = 2400\,\mathrm{v/h}$ pri hitrosti $v = 80\,\mathrm{km/h}$. Zaradi prometne nesreče se tok ustavi, pri čemer nastane gostota $k_2 = 270\,\mathrm{v/km}$. Kolikšna je hitrost s katero se širi zastoj in kako hitro se vozila nabirajo ?

Rešitev. Gostota toka pred nesrečo je

$$k_1 = \frac{q_1}{v} = \frac{2400}{80} = 30\,\mathrm{v/h}$$

Hitrost širjenja zastoja

$$u = \frac{2400 - 0}{30 - 270} = -\frac{2400}{240} = \underline{\underline{-10\,\mathrm{km/h}}}$$

Predznak – pove, da se zastoj širi od mesta nesreče. Tako bo npr. v $15\,\mathrm{min}$ zastoj dosegel točko ki bo od mesta nesreče oddaljena za $-10 \times 15/60 = -2.5\,\mathrm{km}$. Na tem mestu se bodo v tem trenutku nahajala vozila, ki so bila v trenutku, ko je prišlo do nesreče od mesta trka oddaljena za $\left(-10 - 80\right) \times 15/60 = -22.5\,\mathrm{km}$. Hitrost polnjenja vrste je

$$q_1 - u k_1 = 2400 - \left(-10\right) \times 30 = \underline{\underline{2700\,\mathrm{v/h}}}$$

Po npr. $15\,\mathrm{min}$ bo v vrsti že $2700 \times 15/60 = 675$ vozil.