Stacionarni prometni tok

Osnovne spremenljivke

Osnovne veličine, ki popisujejo prometni tok so:

- pretok toka q t.j. število vozil, na časovno enoto
- gostota toka k t.j. število vozil na enoto dolžine
- hitrost toka v

Vse te veličine so gladke funkcije gladke funkcije lege x in časa t

$$q = \hat{q}(x,t) \qquad k = \hat{k}(x,t) \qquad v = \hat{v}(x,t) \qquad N = \hat{N}(x,t)$$

Način merjenaja

Iz same definicije osnovnih veličin sledita dva osnovna načina merjenja. Pretok lahko merimo tako, da v dani točki v določenemem času preštejemo vozil, gostoto merimo tako, da v danem trenutku preštejemo vsa vozila na danem odseku. Torej pri merjenju pretoka je $x = \text{const}$, pri mejenju gostote pa je $t = \text{const}$.

Medtem za ugotavljanje gostote in pretoka toka vozila enostavno štejemo, moramo hitrost nekako meriti. Po definiciji je (trenutna) hitrost $v = dx/dt$ zato njeno merjenje zahteva merjenje razdalje in časa. To velja za zunanjega opazovalca, saj voznik lahko odčitava trenutno hitrost vozila. Trenutno hitrost aproksimiramo, če merimo razdaljo Δx in časovni interval Δt

$$v = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Formula je seveda natačna, če je na opazovanem intervalu in času hitrost konstantna. To je, če je $v = \text{const}$ potem je $v = \Delta x/\Delta t$.

Točkovno opazovanje

Merjenje pretoka. Po definiciji lahko pretok merimo le v času in se ga ne da dobiti npr. iz fotografskega posnetka. Če v času T prevozi merilno točko N vozil je pretok vozil

$$\boxed{q = \frac{N}{T}}$$

Pri praktičnih meritvah je potrebno izbrati dolžino časa T. Običajno so ti časi do od 30 s pa do 15 min[1] odvisno od hitrosti toka.

Merjenje hitrosti. Pri točkovnem merjenju lahko hitrost vozil v trenutku, ko prevozijo kontrolno točko izmerimo z radarjem. Če to hitrost merimo z induktivnima zankama, ki sta nameščeni na razdalji Δx (praktično približno 6 m). Pri tem se meri čas, ki ga porabi vozilo, da zanki prevozi. Če je hitrost n tega vozila v času Δt_n, ko prevozi zanki stalna, potem je njegova hitrost po definiciji

$$v_n = \frac{\Delta x}{\Delta t_n}$$

Če zanko prevozi N vozil, potem je skupna pot, ki jo opravijo vozila enka $x = N\,\Delta x$ in za to porabijo čas $T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_N = \sum_{n=1}^{N} \Delta t_n$. Srednja hitrost je

$$v = \frac{s}{t} = \frac{N\,\Delta x}{\sum_n \Delta t_n} = \frac{\Delta x}{\left(\sum_n \Delta t_n \Big/ N\right)} = \frac{\Delta x}{\Delta \overline{t}}$$

pri čemer je srednja aritmetični čas $\Delta \overline{t} = \sum_n \Delta t_n \Big/ N$. Če izrazimo čas $\Delta t_n = \dfrac{L}{v_n}$ potem je srednja časovna hitrost toka $v = N\Delta x \Big/ \sum_n \dfrac{\Delta x}{v_n}$ ali

$$\boxed{v = \frac{N}{\sum_n \frac{1}{v_n}}}$$

To je tako imenova *srednja prostorska hitrost toka.*

[1] F.L.Hall. Traffic Stream Characteristics. Monograph on Traffic Flow Theory.

Gostota toka. Ko sta znana pretok q in hitrost v je gostota toka

$$k = \frac{q}{v} = \frac{N}{T\left(N \Big/ \sum_n \frac{1}{v_n}\right)} = \frac{1}{T}\sum_n \frac{1}{v_n} = \frac{1}{T}\sum_i \frac{n_i}{v_i}$$

Primer 1. V času $T = 60\,\mathrm{s}$ je kontrolno točko prevozilo 12 vozil. Pri tem so imela 3 hitrost 48 km/h, 4 hitrost 45 km/h ostala pa hitrost 55 km/h. Kolikšna je pretok, srednja hitrsost in gostota prometnege toka ?

Rešitev. Pretok je

$$q = \frac{12}{60} \times 3600 = \underline{\underline{720\,\mathrm{v/h}}}$$

Srednja prostorska hitrost

$$v = \frac{N}{\sum_n \frac{1}{v_n}} = \frac{12}{\frac{3}{48} + \frac{4}{45} + \frac{5}{55}} = \underline{\underline{49.5\,\mathrm{km/h}}}$$

Gostota toka

$$k = \frac{q}{v} = \frac{720}{49.5} = \underline{\underline{14.5\,\mathrm{v/km}}}$$

□□□

Prostorsko opazovanje

Merjenje gostote. Naj se v danem trenutku na izbranem odseku ceste L nahaja N vozil. Po definiciji je gostota toka

$$\boxed{k = \frac{N}{L}}$$

Pri praktičnih meritvah je potrebno izbrati dolžino L ????

Sredja časovna hitrost toka. Pri prostorskem opazovanju dobimo hitrost posameznega vozila tako, da v majhnem času Δt izmerimo pot, ki jo optavi posamezno vozilo. Naj bo v tem času n-to vozilo prevozi razdaljo Δx_n. Njegova hitrost je

$$v_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta t}$$

Sredja hitrost dobimo tako, da seštejemo poti, ki jo opravijo vozila v zelo kratkem času Δt in tako dobljeno pot delimo s skupnim časom, ki so ga vozila porabila za to pot

$$v = \frac{\sum_n \Delta x_n}{\sum_n \Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_n \Delta x_n}{N} = \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t}$$

Srednja hitrost je enaka povprečnemu premiku deljeno s opazovalnim časom. Če premik izrazimo s hitrostjo $\Delta x_n = v_n \Delta t$ potem je $\sum_n \Delta x_n = \sum_n v_n \Delta t$ pa dobimo

$$\boxed{v = \frac{1}{N} \sum_n v_n}$$

To je *srednja časovna hitrost toka* , ki je enaka kar srednji aritmetični vrednosti hitrosti.

Pretok je definiran

$$q = k\,v = \frac{N}{L}\left(\sum_n v_n \Big/ N \right) = \frac{1}{L} \sum_n v_n$$

Primer 2. V danem trenutku, se na opazovanem odseku $L = 0.5\,\text{km}$ nahaja 18 vozil. Pri tem imta 2 vozili hitrost 84 km/h, 3 hitrost 62 km/h, 6 hitost 76 km/h ostala pa pa hitrost 72 km/h. Kolikšna je gostota, srednja hitrost in pretok prometnege toka ?

Rešitev. Gostota je

$$k = \frac{N}{L} = \frac{18}{0.5} = \underline{\underline{36\,\text{v/km}}}$$

Srednja hitrost v času

$$v = \frac{1}{N}\sum_n v_n = \frac{2\times 84 + 3\times 62 + 6\times 76 + 7\times 72}{18} = \underline{\underline{73.0\,\mathrm{km/h}}}$$

Pretok

$$q = k\,v = 36\times 73 = \underline{\underline{2628\,\mathrm{v/h}}}$$

□□□

Povzetek. Navedene formule za izračun gostote, pretoka in hitrosti toka lahko zapišem tudi v naslednji obliki. Naj ima n_1 vozil hitrost hitrost v_1, n_2 vozil hitrost v_2 itd. pri čemer je $N = \sum_i n_i$. Potem lahko navedene formule zapišemo v obliki podani v Tabeli.

Tabela. Formule za izračun značilnosti prometnega toka glede na metodo opazovanja. Formule v okvirjih predstavljajo definicije veličin

	Metoda opazovanja	
	Točka	**Odsek**
	Časovni interval *T*	**Dolžina odseka *L***
Število vozil	$N = \sum_i n_i$	
Pretok *q*	$\boxed{N/T}$	$\frac{1}{L}\sum_i n_i v_i$
Gostota *k*	$k = \frac{1}{T}\sum_i \frac{n_i}{v_i}$	$\boxed{N/L}$
Hitrost *v*	$v = N\Big/\sum_i \frac{n_i}{v_i}$	$v = \sum_i n_i v_i \Big/ N$

Posplošeno merjenje

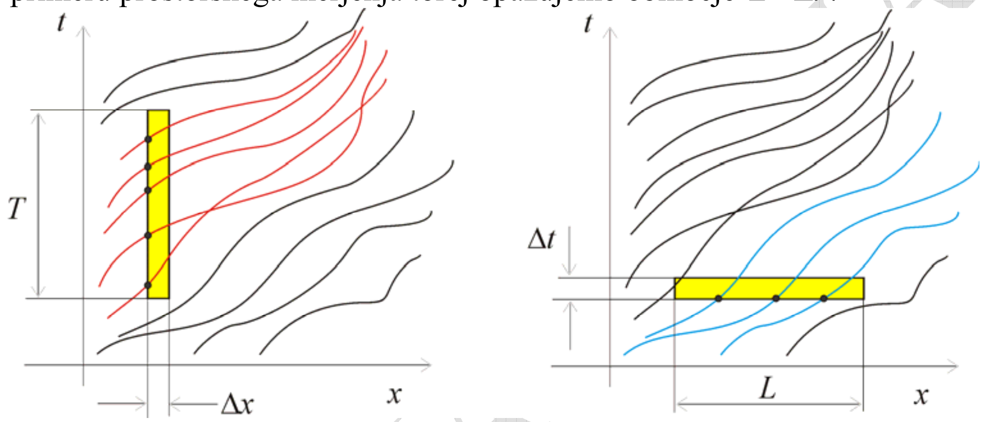
Pri točkovnem merjenju je hitrost

$$v = \frac{N\,\Delta x}{\sum_n \Delta t_n} = \frac{\Delta x}{\sum_n \Delta t_n \Big/ N} = \frac{\Delta x}{\overline{\Delta t}}$$

t.j. hitrost toka dobimo tako, da razdaljo med merilnima točkama delimo s povprečnim časom, ki ga porabijo vozila za ta prevoz. V prostoru dogodkov je to območje določeno $\Delta x \times T$. Pri prostorske merjenju je hitrost

$$v = \frac{\sum_n \Delta x_n}{N\,\Delta t} = \frac{\sum_n \Delta x_n \big/ N}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t}$$

t.j. hitrost toka dobimo tako, da povprečni pomik vozil delimo s časom zamika. V primeru prostorskega merjenja torej opazujemo območje $L \times \Delta t$.

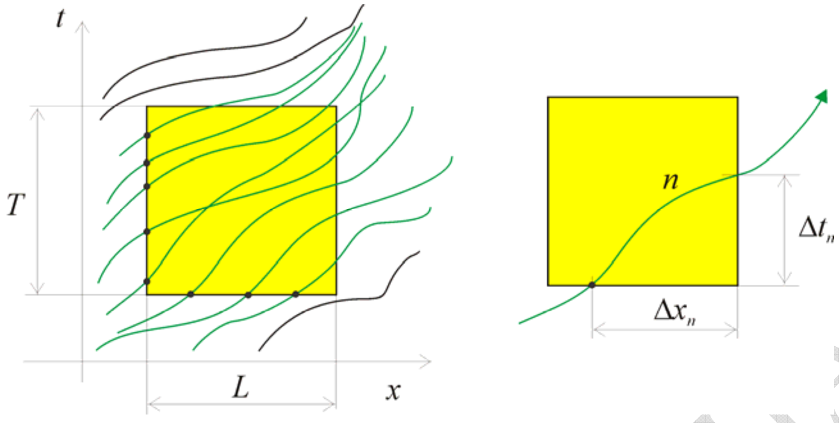


Slika. Točkovno merjenej (levo) in prostorsko merjenje (desno). Pri točkovnem merjenju prehaja območje 5 vozil, pri odsekovnem pa tri vozila.

Obe metodi lahko posplošimo tako, da je območje opazovanja $L \times T$. vzamemo, da je hitrost toka vsoti poti, ki jo opravijo vozila v opazovalnem času - skupnim časom

$$\boxed{v = \frac{\sum_n \Delta x_n}{\sum_n \Delta t_n}}$$

pri čemer je $\sum_n \Delta x_n$ skupna pot, ki jo opravijo vozila, in $\sum_n \Delta t_n$ skupni čas , ki ga za to pot vozila porabijo.



Slika. Posplošeno merjenje pretoka in gostote.
Skupno vstopa v območje merjenja 8 vozil.

Število vozil lahko ocenimo, če skupno pot delimo z dolžino območju dolžine L. Tej dolžini ustreza $N' = \sum_n \Delta x_n / L$ tokovnic. Po definiciji ustreza temu številu tokovnic pretok $q = N'/T = \left(\sum_n \Delta x_n / L \right) / T$ oziroma

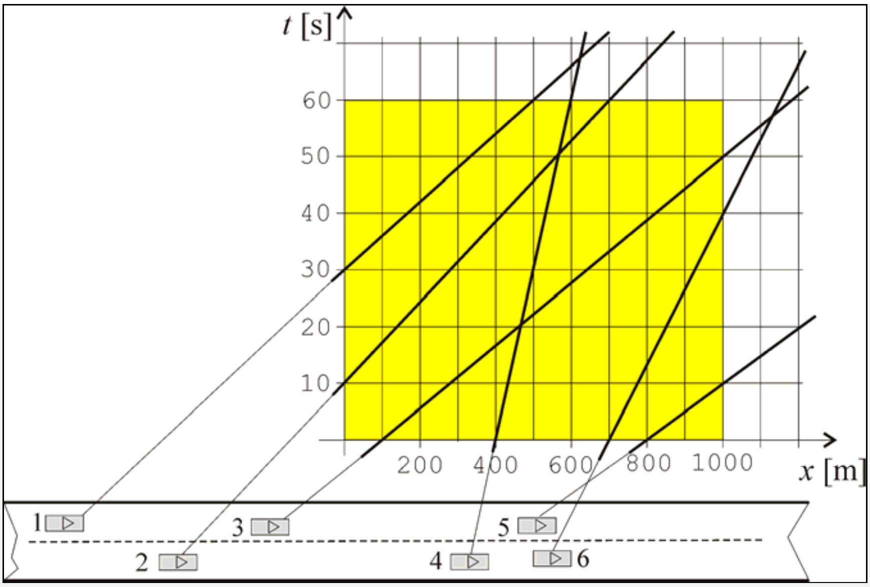
$$\boxed{q = \frac{\sum_n \Delta x_n}{LT}}$$

Iz osnovne zveze je nadalje gostota $k = q/v = \frac{\cancel{\sum_n \Delta x_n}}{LT} \frac{\sum_n \Delta t_n}{\cancel{\sum_n \Delta x_n}}$ ali

$$\boxed{k = \frac{\sum_n \Delta t_n}{LT}}$$

V obeh formulah ne nastopa ocenjeno število tokovnic zato ju jemljemo kot posplošeni definiciji pretoka in gostote..

Primer. Slika prikazuje meritve na dvopasovni cesti v dolžini 100 m in času 60 s, kjer so tokovnice aproksimirane kot premice. Izračunaj pretok, gostoto in hitrost toka.



Slika.

Rešitev. Iz slike razberemo, da vozilo št. 1 vstopa v območej meritve v času 30 s, in izstopa v času 60 s. V območju se je torej nahajal 30 s in pri tem opravil pot dolžine 500 m. Njegova hitrost je torej $v_1 = 500/30 = 16.7\,\mathrm{m/s} = 60\,\mathrm{km/h}$. Podobno lahko odčitamo tudi ostale poti in čase ter na tej osnovi izračunamo pripadajoče hitrosti. Rezultati so zbrani v naslednji tabeli.

Vozilo	Pot [m]	Čas [s]	Hitrost [km/h]
1	500	30	60.0
2	700	50	50.4
3	900	50	64.8
4	200	60	12.0
5	200	10	72.0
6	300	40	27.0

Točkovno opazovanje. Pri točkovnem opazovanju vstopata dve vozili .

$$\text{pretok} \quad q=\frac{N}{T}=\frac{2}{60}\times 3600=120.0\,\mathrm{v/h}$$

$$\text{hitrost} \quad v=\frac{N}{\sum\limits_n \frac{1}{v_n}}=\frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{50.4}}=54.8\,\mathrm{km/h}$$

$$\text{gostota} \quad k=\frac{q}{v}=\frac{120}{54.8}=2.19\,\mathrm{v/km}$$

Linijsko opazovanje. Vsopjo 4 vozila.

$$\text{gostota} \quad k=\frac{N}{L}=\frac{4}{1}=\underline{\underline{4\,\mathrm{v/km}}}$$

$$\text{hitrost} \quad v=\frac{1}{N}\sum_n v_n=\frac{64.8+12+72+27}{4}=\underline{\underline{44.0\,\mathrm{km/h}}}$$

$$\text{pretok} \quad q=v\,k=50\times 4=\underline{\underline{175.8\,\mathrm{v/h}}}$$

Posplošeno merjenje. Velokost območja je

$$\sum_n \Delta x_n=500+700+900+200+200+300=2800\,\mathrm{m}$$

$$\sum_n \Delta t_n=30+50+50+60+10+40=240\,\mathrm{s}$$

Na osnovi tega je

pretok $q = \frac{\sum_n \Delta x_n}{LT} = \frac{2800}{1000 \times 60} \times 3600 = 168\,\mathrm{v/h}$

hitrost $v = \frac{\sum_n \Delta x_n}{\sum_n \Delta t_n} = \frac{2800}{240} = 11.67\,\mathrm{m/s} = 42.0\,\mathrm{km/h}$

gostota $k = \frac{q}{v} = \frac{168}{42} = 4.0\,\mathrm{v/km}$

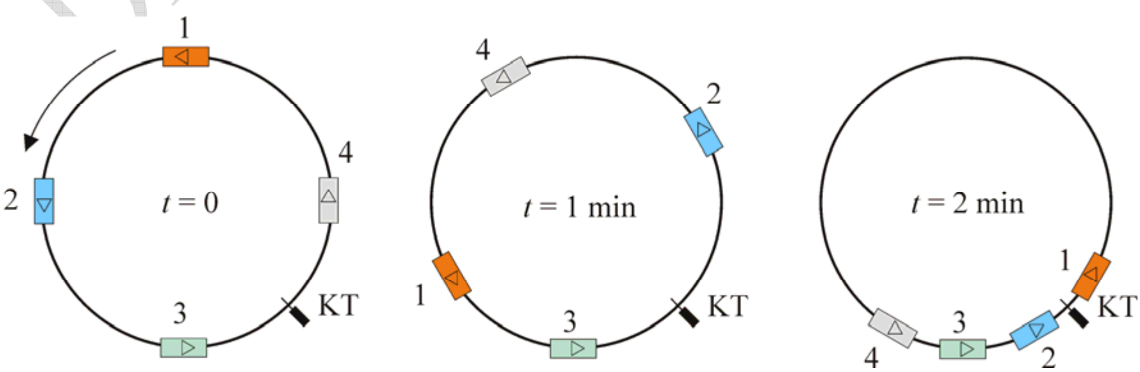
Zaradi lažje primerjave retultate združimo v tabeli

	Gostota [v/km]	**Pretok [v/h]**	**Hitrost [km/h]**
Točkovno merjenje	2.19	120.0	54.8
Odsekovno merjenje	4.0	175.8	44.0
Posplošeno merjenje	4.0	168.0	42.0

□□□

Vpliv načina merjenja

Kako vpliva izbira časovnega intervala na meritve osnovnih veličin toka kaže naslednji primer, ki ga v svoji knjigi navaja Leutzbah. Opazujmo štiri vozila, ki vozijo po krožnici dolžine $L = 1\,\mathrm{km}$. V začetni legi naj se vozila nahajajo na enaki razdalji njihove stalne hitrosti pa naj bodo zaporedoma $v_1 = 20\,\mathrm{km/h}$, $v_2 = 40\,\mathrm{km/h}$, $v_3 = 60\,\mathrm{km/h}$ in $v_4 = 80\,\mathrm{km/h}$. Opazovalna točka naj bo postavljena med tretje in četrto vozilo (glej sliko)



Slika 2. Gibanje vozil po krožnici.

Če opazujemo gibanje teh vozil prostorsko imajo veličine prometnega toka naslednje vrednosti

$$\text{gostota} \quad k = \frac{N}{L} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4\,\mathrm{v/km}}}$$

$$\text{hitrost} \quad v = \frac{1}{N}\sum_n v_n = \frac{20+40+60+80}{4} = \underline{\underline{50\,\mathrm{km/h}}}$$

$$\text{pretok} \quad q = v\,k = 50 \times 4 = \underline{\underline{200\,\mathrm{v/h}}}$$

Te vrednosti so natančne saj ima prostorski opazovalec popolno informacijo o prometnem toku.

Opazujmo sedaj tok v kontrolni točki, kjer štejemo kolikokrat v času T posamezno vozilo to točko prevozi. Opazovalec v tej točki lahko le šteje vozila, ki točko prevozijo, pri tem pa predpostavimo, da ima možnost tudi natančne meritve hitrosti teh vozil.

V času $T = 1\,\mathrm{min}$ opravijo vozila naslednjo pot

$$s_1 = v_1 T = 20 \times \frac{1}{60} = \frac{1}{3}\,\mathrm{km} \qquad \mathrm{s}_2 = v_2 T = 40 \times \frac{1}{60} = \frac{2}{3}\,\mathrm{km}$$

$$\mathrm{s}_3 = v_3 T = 60 \times \frac{1}{60} = 1\,\mathrm{km} \qquad \mathrm{s}_4 = v_4 T = 80 \times \frac{1}{60} = \frac{4}{3}\,\mathrm{km}$$

Če upoštevamo njihovo začertno lego, potem sledi, da prvo vozilo v tem času kontrolne točke ne prevozi, ostala pa jo prevozijo po enkrat (glej sliko). Opazovalec v kontrolni točki bo torej v času $T = 1\,\mathrm{min}$ naštel $N = 3$ vozila. Na osnovi tega so pretok, hitrost in gostota toka

$$\text{pretok} \quad q = \frac{N}{T} = \frac{3}{1} \times 60 = 180\,\mathrm{v/h}$$

$$\text{hitrost} \quad v = \frac{N}{\sum_n \frac{1}{v_n}} = \frac{3}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{80}} = 55.4\,\mathrm{km/h}$$

$$\text{gostota} \quad k = \frac{q}{v} = \frac{180}{55.4} = 3.25\,\mathrm{v/km}$$

Če primerjamo dobljene rezultate z rezultati prostorskega opažanja vidimo, da se opažanji razlikujeta v gostoti toka za 0.75 v/km , v pretoku za 20 v/h in hitrosti za, hitrost toka pa za 5.4 km/h.

Čeprav lahko dejansko prehode le štejemo jih v obravnavanem primeru lahko izračunamo. To nam omogoča implementacijo postopka štetja v razpredelnici. Splošni postopek izračuna je naslednji. Predpostavimo, da so v izhodišni legi vsa vozila pred kontrolno točko. V času *T* opravi *i*-to vozil, ki vozi s hitrostjo v_i premik

$$\Delta x_i = L_i + v_i T$$

kjer je L_i njegova izhodiščna razdalja od kontrolne točke. Če je *L* dolžina poti (enega obhoda) bo v času *T* vozilo prevozilo kontrolno točko

$$n_i = \left[\Delta x_i / L\right]$$

krat t.j. n_i je število polnih obhodov vozila. Pri tem $[\ ]$ pomeni celi del števila[2], npr. $[2.18] = 2$. Oglejmo si primer .

Četrto vozilo, ki vozi s hitrostjo 80 km/h se v izhodiščni legi nahaja na razdalji $L/8 = 1/8 = 0.125\,\mathrm{km}$ naprej od kontrolne točke. V času $T = 2\,\mathrm{min}$ bo to vozilo opravilo premik $\Delta x_4 = 0.125 + 80 \times 2/60 = 2.792\,\mathrm{km}$. Pri tem bo kontrolno

[2] V programskih orodjih (Excell, Matlab, Fortran, C,...) je to funkcija *trunc*

točko prevozilo $n_4 = \left[\Delta x_4/L\right] = \left[2.792/1\right] = 2$ krat[3]. Na podoben način dobimo za ostala vozila

$$\Delta x_1 = 0.125 + 0.25 + 20\times 2/60 = 1.042\,\text{km} \quad \Rightarrow \quad n_1 = 1$$

$$\Delta x_2 = 0.125 + 0.50 + 40\times 2/60 = 1.958\,\text{km} \quad \Rightarrow \quad n_2 = 1$$

$$\Delta x_3 = 0.125 + 0.75 + 60\times 2/60 = 2.875\,\text{km} \quad \Rightarrow \quad n_3 = 2$$

Število vozil, ki v času $T = 2\,\text{min}$ prevozi kontrolno točko je torej $N = 2+1+1+2 = 6$. Pri tem so pretok, hitrost in gostota toka

$$\text{pretok} \quad q = \frac{N}{T} = \frac{6}{2}\times 60 = 180\,\text{v/h}$$

$$\text{hitrost} \quad v = \frac{N}{\sum_i n_i/v_i} = \frac{6}{\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{2}{60}+\frac{2}{80}} = 45\,\text{km/h}$$

$$\text{gostota} \quad k = \frac{q}{v} = \frac{180}{45} = 4\,\text{v/km}$$

Če primerjamo dobljene rezultate z rezultati prostorskega opažanja vidimo, da se opažanji ne razlikujeta v gostoti toka, medetem, ko se pretoka razlikujeta za 20 v/h, hitrost toka pa za 5 km/h. Razlikujeta pa se tudi časovni opažanji. In sicer se hitrosti toka razlikujaeta za 10.4 km/h, gostota pa za 0.75 v/km.

Opisan postopek se da na enostaven način implementirati v razpredelnici. Primer prikazuje , ki jo prikazuje Slika.

[3] Leutzbah ima na tem mestu napako, saj ugotavlja, da bi vozilo prevozilo kontrolno točko 3 krat.

Podatki

Vozilo	Lega km	Hitrost km/h
A	0.375	20
B	0.625	40
C	0.875	60
D	0.125	80

Prostorsko opažanje

gostota v	v/km	4
hitrost	km/h	50
pretok	v/h	200

Točkovno opažanje

	Št. prehodov v opazovalnem času min							
Vozilo	1	2	3	4	5	15	30	60
A	0	1	1	1	2	5	10	20
B	1	1	2	3	3	10	20	40
C	1	2	3	4	5	15	30	60
D	1	2	4	5	6	20	40	80
Št. Vozil	3	6	10	13	16	50	100	200
Pretok v/h	180	180	200	195	192	200	200	200
Hitrost km/h	55.38	45.00	50.00	51.15	48.00	50.00	50.00	50.00
Gostota v/km	3.25	4.00	4.00	3.81	4.00	4.00	4.00	4.00

Slika. Rezultat izračuna za različne opazovalne čase.

Kot se vidi iz razpredelnice, pri kratkih opazovalnih časih vrednosti pretoka, hitrosti in gostote nihajo, pri večjih pa se se te vrednosti umirijo na vrednostih kot jih je določil prostorski opazovalec.

Komentar in posplošitev. Gibanje vozil po krožnici predstavlja enega osnovnih modelov za proučevanje omejenega prometa, ki ga srečemo tako pri pročevanju zastojev, sledenju ipd.
Zgornji postopek se da posplošiti tako, da se npr. začetne lege vozil in njihove hitrosti naključno izbrane ali na model, ko gibanje vozil ni enakomerno. V tem primeru moramo poznati pospešek vozil, lego pa dobimo z integracijo

$$x_n = x_{n0} + \int_0^T a(t)\,dt$$

Število obhodov je $n_i = [x_i/L]$.

Naj bo L dolžina poti, ter $v_{\min}$ in $v_{\max}$ največja in najmanjša hitrost vozil. Naj bo $\xi \in (0,1)$ naključno število. Potem sta začetna lega in hitrost i-tega vozila

$$x_{0i} = \xi_i L \qquad \text{in} \qquad v_i = v_{\min} + (v_{\max} - v_{\min})\zeta_i$$

Pri čemer sta $\xi, \zeta \in [0,1]$. Pri implementaciji, ko so hitrosti in lege naključno izbrani uporabimo funkcijo RAND().

Podatki

Dolžina	km	1
Hitrost	km/h	50
Hitrost	km/h	100
Št.vozil		10
Čas	min	**1**

Oznake

PO	Prostorsko opažanje
TO	Točkovno opažanje
RN	Relativna napaka %

Podatki o vozilih

Vozilo	Lega km	Hitrost km/h	Št. prehodov	n/v
1	0.94	65.10	2	0.030721
2	0.06	90.69	1	0.011026
3	0.36	88.83	1	0.011257
4	0.51	98.72	2	0.02026
5	0.84	78.62	2	0.025439
6	0.16	63.70	1	0.015699
7	0.58	51.20	1	0.019533
8	0.03	67.40	1	0.014837
9	0.39	57.32	1	0.017445
10	0.73	55.20	1	0.018117

Izračun

	Št. Vozil	Gostota v/km	Hitrost km/h	Pretok v/h
PO	10	10.00	71.68	716.77
TO	13	11.06	70.52	780.00
Razlika		-1.06	1.15	-63.23
RN		10.6	1.6	8.8

Pomoč pritisni F9 za ponoven izračun

Podatki

Dolžina	km	1
Hitrost	km/h	50
Hitrost	km/h	100
Št.vozil		10
Čas	min	**15**

Oznake

PO	Prostorsko opažanje
TO	Točkovno opažanje
RN	Relativna napaka %

Podatki o vozilih

Vozilo	Lega km	Hitrost km/h	Št. prehodov	n/v
1	0.15	60.26	15	0.248915
2	0.29	55.76	14	0.251091
3	0.85	56.72	15	0.264463
4	0.65	99.44	25	0.251399
5	0.94	64.84	17	0.26217
6	0.90	77.55	20	0.257902
7	0.45	88.00	22	0.250006
8	0.91	59.81	15	0.250814
9	0.64	57.76	15	0.259698
10	0.24	84.59	21	0.248251

Izračun

	Št. Vozil	Gostota v/km	Hitrost km/h	Pretok v/h
PO	10	10.00	70.47	704.73
TO	179	10.18	70.34	716.00
Razlika		-0.18	0.13	-11.27
RN		1.8	0.2	1.6

Pomoč pritisni F9 za ponoven izračun

Slika. Izračun pri 30 min kaže ujemanje

Naloga.

Zveza med gostoto in pretokom

Rezultati meritev so gostote, hitrosti in pretoki. Med njimi obstaja osnovna zveza $q = vk$. Vprašanje je $v = \hat{v}(k)$.

Na podlagi iskušenj hitrost vozil pada z gostoto prometa. Ko je vozilo samo vozi z neko največjo hitrostjo v_m, ko gostota naraste do zasičenja k_m se prometni tok ustavi. Torej

$$k \to 0 \quad \Rightarrow \quad v \to v_{\max} \qquad \text{in} \qquad k \to k_{\max} \quad \Rightarrow \quad v \to 0$$

Greenshieldov model (1935)

Obenem je sprememb h hitrosti striktno monotona padajoča funkcija gostote. Nenostavnejša zveza, ki zadošča naštetima pogojema je linearna $\frac{v}{v_{\max}} + \frac{k}{k_{\max}} = 1$ oz

$$\boxed{v = v_{\max}\left(1 - \frac{k}{k_{\max}}\right)}$$

Gostota toka je

$$\boxed{q = vk = v_{\max} k \left(1 - \frac{k}{k_{\max}}\right)}$$

Pretok bo največji pri neki pogoj $\frac{dq}{dk} = 0$ oz

$$\frac{dq}{dk} = v_{\max}\left(1 - \frac{2k_{opt}}{k_{\max}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{opt} = \frac{k_{\max}}{2}}$$

Največji pretok bo torej $q_{\max} = v_{\max} k_{opt}\left(1 - \frac{k_{opt}}{k_{\max}}\right) = \frac{v_{\max} k_{\max}}{4}$ oz.

$$\boxed{q_{\max} = \frac{v_{\max} k_{\max}}{4}}$$

Optimalna hitrost pa $v_{opt} = v_{\max}\left(1 - \frac{k_{opt}}{k_{\max}}\right) = \frac{v_{\max}}{2}$

Primer. Na danem odseku ceste naj bo $v_{\max} = 120\,\mathrm{km/h}$ in največja gostota $k_{\max} = 300\,\mathrm{v/km}$. Kolikšna je optimalni pretok, gostota in hitrost.

Rešitev.

optimalna gostota $k_{opt} = \frac{k_{\max}}{2} = \frac{300}{2} = 150\,\mathrm{v/km}$

optimalna hitrost $v_{opt} = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{120}{2} = 60\,\mathrm{km/h}$

največji pretok $q_{\max} = \frac{v_{\max}k_{\max}}{4} = \frac{120\times 300}{4} = 9000\,\mathrm{v/h}$

□□□

Greenbergov model (1959)

Zveza, ki jo je na povsem empirični osnovi postavil Greenberg predvideva

$$v = v_{\max}\ln\frac{k_{opt}}{k}$$

pri čemer sta *a* in *b* empirični konstanti. Pretok je

$$q = vk = v_{\max}k\exp(-b\,k)$$

Optimalni pretok je

$$\frac{dq}{dk} = v_{\max}\left(\ln\frac{k_{\max}}{k} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{opt} = \frac{k_{\max}}{e}$$

Tej gostoti ustreza optimalna hitrost

$$v = v_{\max}\exp\left(-b\,k_{opt}\right) = v_{\max}e^{-1} \approx 0.368\,v_{\max}$$

in maximalni pretok

$$q_{\max} = v_{\max} k_{opt} \exp\left(-b\, k_{opt}\right) = \frac{v_{\max}}{b\, e} \approx 0.387 \frac{v_{\max}}{b}$$

Underwoodow model (1961)

Zveza, ki jo je na povsem empirični osnovi postavil Greenberg predvideva

$$v = v_{\max} \exp\left(-b\, k\right)$$

pri čemer sta *a* in *b* empirični konstanti. Pretok je

$$q = vk = v_{\max} k \exp\left(-b\, k\right)$$

Optimalni pretok je

$$\frac{dq}{dk} = v_{\max}\left[\exp\left(-b\, k\right) - bk \exp\left(-b\, k\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{opt} = \frac{1}{b}$$

Tej gostoti ustreza optimalna hitrost

$$v = v_{\max} \exp\left(-b\, k_{opt}\right) = v_{\max} e^{-1} \approx 0.368\, v_{\max}$$

in maximalni pretok

$$q_{\max} = v_{\max} k_{opt} \exp\left(-b\, k_{opt}\right) = \frac{v_{\max}}{b\, e} \approx 0.387 \frac{v_{\max}}{b}$$

Primer. Na danem odseku ceste naj bo $v_{\max} = 70\,\text{km/h}$ in največja gostota $k_{opt} = 50\,\text{v/km}$. Kolikšna je optimalni pretok, gostota in hitrost.

Rešitev.

optimalna gostota $k_{opt} = \frac{k_{\max}}{2} = \frac{300}{2} = 150\,\text{v/km}$

optimalna hitrost $v_{opt} = 0.368\,v_{\max} = 0.368 \times 120 = 44\,\text{km/h}$

največji pretok $q_{\max} = 0.368 v_{\max} k_{opt} = 44 \times 50 = 2220\,\text{v/h}$

□□□

Lincoln tunnel

Podatki, 18 podatkov

gostota	hitrost	pretok
21	51	1088
28	45	1232
33	40	1325
38	37	1380
46	32	1480
51	30	1558
55	27	1496
59	26	1504
59	24	1410
60	22	1344
64	21	1339
70	19	1344
68	18	1188
81	16	1290
83	14	1188
87	13	1112
100	11	1120
103	10	990

Parameter	Vrednost	Napaka
a	55.47376	2.07221
b	-0.49053	0.03162
R	-0.96833	
STD	3.05784	

-0.008842559077

$k_{\max} = 113$ in $v_{\max} = 55\,\mathrm{km/h}$. sledi $v_{opt} = 28\,\mathrm{km/h}$, $k_{opt} = 57\,\mathrm{v/km}$ in $q_{\max} = 1568\,\mathrm{v/h}$

[18.12.2006 13:39 "/Graph2" (2454087)]
Data: Data1_B
Model: YldFert1
Equation: y = a + b*exp(-k*x)
Weighting:
y No weighting

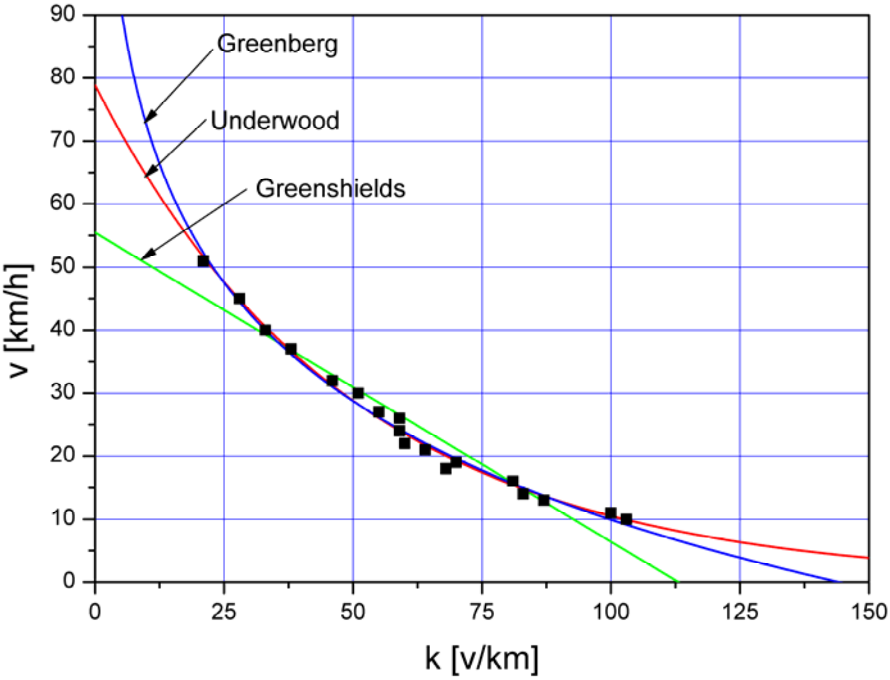
Parameter	Vrednost	Napaka
a	78.84902	1.76602
b	0.02014	0.00048
R^2	2	
STD	3.05784	

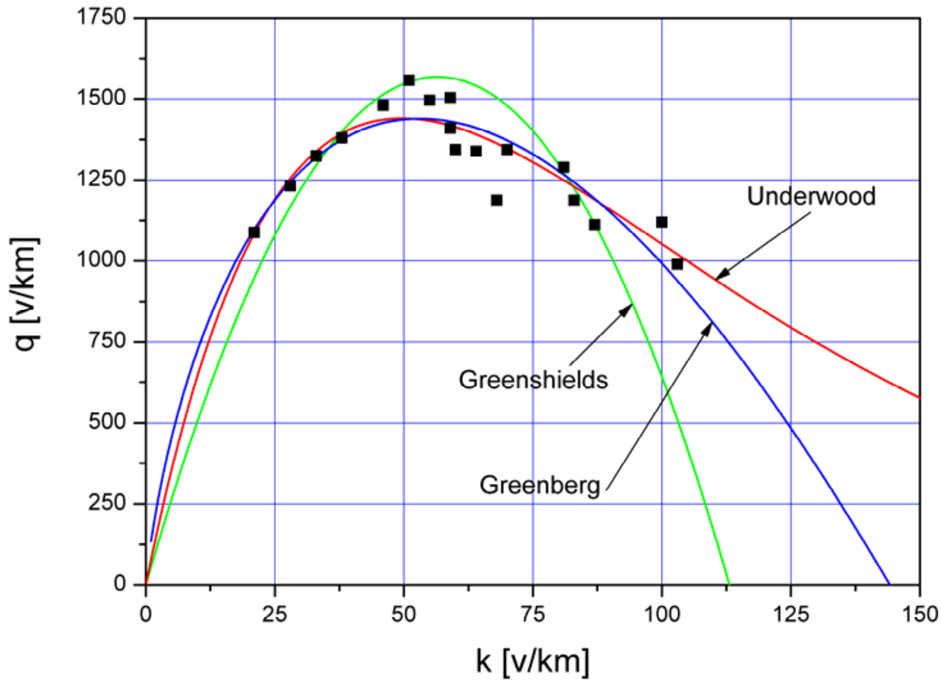
$v_{\max} = 79\,\mathrm{km/h}$ in $k_{opt} = 50\,\mathrm{v/km}$. sledi $v_{opt} = 29\,\mathrm{km/h}$ s pretokom $q_{\max} = 1440\,\mathrm{v/km}$.

Greenberg

[18.12.2006 14:17 "/Graph2" (2454087)]
Data: Data1_B
Model: user2

Parameter	Vrednost	Napaka
a	27.13619	0.68984
b	144.17222	3.76628
R^2	0.98977	


Greenberg
Underwood
Greenshields
v [km/h]
k [v/km]
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
0
25
50
75
100
125
150


Underwood
Greenshields
Greenberg
q [v/km]
k [v/km]
0
250
500
750
1000
1250
1500
1750
0
25
50
75
100
125
150

	Model		
Sprmenljivka	**Greenshields**	**Greenberg**	**Underwood**
$v =$	$v_m\left(1-\frac{k}{k_m}\right)$	$v_0 \ln\frac{k_m}{k}$	$v_m \exp\left(-\frac{k}{k_0}\right)$
$q =$	$v_m k\left(1-\frac{k}{k_m}\right)$	$v_0 k \ln\frac{k_m}{k}$	$v_m k \exp\left(-\frac{k}{k_0}\right)$
$k_0 =$	$\frac{k_m}{2}$	$\frac{k_m}{e} \approx 0.369\, k_m$	–
$v_0 =$	$\frac{v_m}{2}$	–	$\frac{v_m}{e} \approx 0.369\, v_m$
$q_m =$	$\frac{v_m k_m}{4}$	$\frac{v_0 k_m}{e} \approx 0.369\, v_0\, k_m$	$\frac{v_m k_0}{e} \approx 0.369\, v_m\, k_0$