Nihanje

Lastno nihanje

Najpreprostejši primer lastnih nihanj dobimo, če opazujemo nihanje telesa mase *m* na vzmeti togoti *k*. Če je telo prepuščeno samo sebi.

V mirovanju je

$$F = -mg + k\,x_0 = 0$$

in od tu statični premik

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

Opomba. Če poznamo maso telesa *m* in statični premik, potem lahko izračunamo togost vzmeti

$$k = \frac{mg}{x_0}$$

Po Newtonovem zakonu je gibanje telesa opisano z enačbo

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

Sila, ki deluje na telo je vsota teže in elastične sile

$$F = -mg - k\left(x + x_0\right)$$

Dobljena diferencialna enačba je enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Njena splošna rešitev je

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

pri čemer sta *A* in *B* konstanti, ki jih določimo iz začetnih pogojev. Začetna pogoja sta začetni premik in začetna hitrost

$$x\left(0\right) = x_0 \qquad \dot{x}\left(0\right) = v_0$$

Če vstavimo v dobimo

Da dobimo hitrost telesa, enačbo najprej odvajamo po času in nato vstavimo . Na ta način dobimo

Končno rešitev lahko zapišemo v obliki

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Amplituda in fazni premik. Dobljeno enačbo lahko s pomočjo trigonometričnih identitet zapišemo tudi v drugačni obliki. Če postavimo

$$\frac{v_0}{\omega} = A \sin \alpha \qquad x_0 = A \cos \alpha$$

potem dobimo

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad \alpha = \arctan \frac{v_0}{\omega x_0}$$

Nadalje je

$$x = A \sin \alpha \sin \omega t + A \cos \alpha \cos \omega t = A \cos(\omega t - \alpha)$$

Tako, da je končna rešitev

$$x = A \cos(\omega t - \alpha)$$

V tej enačbi je *A* amplituda pomika t.j. največji možni premik telesa, kot pa je *fazni premik*, ki določa začetno lego telesa.

Lastna frekvenca.

Gibanje telesa opisujeta dve periodični funkciji, ki imata periodo 2π .

Perioda je torej odvisna le od mase telesa *m* in togosti vzmeti *k* ni pa odvisna od amplitude nihanja t.j. začetnih pogojev.

Število nihajev v časovni enoti je frekvenca

$$f \equiv \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

Primer. Poves konzo vpetega nosilca je

Vsiljeno nihanje

Opazujmo sedaj telo na katerega deluje periodična sila

$$F = F_0 \sin \omega t$$

Gibalna enačba je v tem primeru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \qquad f_0 \equiv \frac{F_0}{m}$$

Partikularno rešitev te enačbe poiščemo z nastavkom

$$x = A \sin \omega t$$

pri čemer je *A* neznana amplituda. Če to vstavimo v enačbo dobimo

$$-A\omega^2 \sin \omega t + A\omega_0^2 \sin \omega t = f_0 \sin \omega t$$

in od tu

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

Prvi faktor predstavlja statični premik telesa, ki ga povzroči sila , drugi faktor pa je faktor ojačanja, ki je odvisen od razmerja frekvenc vzbujalne sile in frekvence lastnega nihanja.

Vpliv začetnih vrednosti. Splošna rešitev problema vsiljenega nihanja dobimo, če seštejemo

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

V posebnem primeru, ko sta začetni premik in začetna hitrost enaka nič dobimo

$$x(0) = C_1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 C_2 + \frac{\omega f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{\omega}{\omega_0} \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Rešite je torej oblike

$$x=\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)$$

Nihanje torej sestavljata vsiljeno nihanje in prosto nihanje.

Kaj se zgodi, ko sta frekvenci vzbujanja in lastnega nihanja zelo blizu skupaj ?

$$\begin{aligned} x&=\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)= \\ &=\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{f_0}{-2\omega}\left(t\cos\omega t-\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right)=-\frac{f_0}{2\omega}t\cos\omega t \end{aligned}$$

Rezultat kaže, da v tem primeru amplituda vseskozi narašča s časom.

$$\begin{aligned} x&=\frac{f_0}{(\omega+\Delta)^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega+2\Delta}\sin(\omega+\Delta)t\right) \\ &=\frac{f_0}{2\Delta\omega+4\Delta^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega+\Delta}(\sin\omega t\cos\Delta t+\cos\omega t\sin\Delta t)\right) \\ &\approx\frac{f_0\sin\Delta t}{2\omega\Delta}\cos\omega t \end{aligned}$$

Če je $\frac{\Delta}{\omega}\ll 1$ je

$$x\approx\frac{f_0\sin\Delta t}{2\omega\Delta}\cos\omega t$$

Amplituda takega nihanja je odvisna od časa in ima periodo $\frac{2\pi}{\Delta}$. Rezultat nihanja je *bitje*.

Prečno nihanje gredi.

Do sedaj smo obravnavali točkasta telesa, sedaj pa preideo na obravnavo nosilcev. To je prvi približke ladje. Predpostavimo stalen prerez in enakomerno porazdeljeno maso.