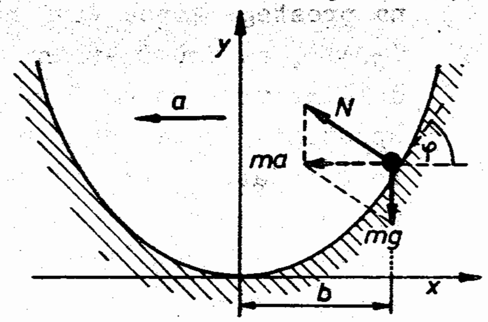
160./Na dnu gladke skodelice parabolične oblike ($y = kx^2$) je majhna kroglica. Skodelico pospešimo proti levi; kroglica se premakne desno navzgor. Kolik je pospešek skodelice (a), če kroglica "obmiruje" na razdalji b od navpične simetrale skodelice? Trenje zanemarimo.



Nal. 160

Na kroglico delujeta sili teža mg in sila podlage (N), ki je pravokotna na podlago. Rezultanta med obema mora biti vodoravna in enaka ma. Iz te zahteve sledi: $N\sin\varphi = ma$, $N\cos\varphi = mg$ ali $\mathrm{tg}\varphi = a/g = dy/dx = 2kx$ $(x = b)$. $a = 2gkb$.

SILE PRI KROŽENJU
=================

161./Kako dolg bi moral biti dan (T), da telesa na ekvatorju ne bi pritiskala na tla?

$mg - N = mR\omega^2$, $N = m(g - R\omega^2)$ = pritisk na tla

$N = 0$ da $g = R\omega^2$ ali $2\pi/T = (g/R)^{1/2}$,

$T = 1{,}4h$

162./Masna točka je pritrjena na vrvico dolžine r (25cm), ki jo vrtimo v vodoravni ravnini enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom α (0,2/s²). S kolikšno silo (F) je vrvica napeta po n (10) vrtljajih od začetka vrtenja? Masa točke je m (0,1kg).

$\omega = \alpha t$, $\varphi = \alpha t^2/2$

$\omega^2 = 2\alpha\varphi = 4\pi n\alpha = 8\pi/s^2$

$F = mr\omega^2 = 0{,}63N$

163./Avto vozi skozi ovinek polmera R (200m) enakomerno pospešeno; njegova začetna hitrost v_1 (36km/h) se na poti s_1 (150m) poveča na v_2 (72km/h). Kolikšen je celotni pospešek (a) po pretečeni poti s_2 (200m)?

$a^2 = a_r^2 + a_t^2$, a_r = radialni pospešek = v^2/R
a_t = tangentni pospešek = $R\alpha$

$v_2 = v_1 + a_t t$

$s_1 = v_1 t + a_t t^2/2$. Iz obeh enačb eliminiramo t in dobimo zvezo med hitrostjo in pretečeno potjo:

$v_2^2 = v_1^2 + 2a_t s_1$, $a_t = (v_2^2 - v_1^2)/2s_1 = 1m/s^2$

$a_r = v_3^2/R$, $v_3^2 = v_1^2 + 2a_t s_2$, $a_r = 2{,}5m/s^2$

$a = 2{,}7m/s^2$

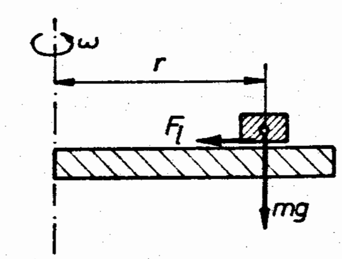
164./S kolikšno silo (F) in v kakšni smeri moramo delovati na telo mase m (0,5kg), da bo telo krožilo po krogu polmera R (0,5m) s stalno kotno hitrostjo ω (120/s)? Kaj moramo storiti, da se bo kroženje telesa enakomerno zaviralo in da se bo telo ustavilo po času t (10s) od začetka zaviranja?

Sila F mora biti usmerjena k središču kroženja.

$F = mR\omega^2 = 3{,}6.10^3N$

Dodatna sila F_1 mora delovati tangentno na krožnico, nasprotujoč gibanju: $F_1 = ma$, a = pojemek = $v_o/t = R\omega/t$; $F_1 = m\omega R/t = 3N$.

165./Na vodoravni plošči, ki se lahko vrti okrog navpične osi, leži na razdalji r (30cm) od osi predmet. Koeficient lepenja med predmetom in ploščo je k_1 (0,4). Plošča se začne vrteti enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom α (0,2/s²). Po kolikšnem času (t) začne predmet drseti po plošči?

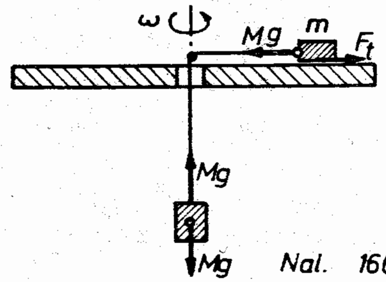


Nal. 165

$F_1 = k_1 mg = mr\omega^2$, $\omega = \alpha t$

$t = (k_1 g/r\alpha^2)^{1/2} = 18{,}3s$

166./ Vodoravna plošča se vrti okrog navpične geometrijske osi s stalno kotno hitrostjo ω . Na plošči leži telo mase m, ki je preko škripca na osi zvezano z visečo utežjo mase M. Pri katerih oddaljenostih (r_1 in r_2)od osi vrtenja je telo v ravnovesju? Koeficient trenja je k_t.



Nal. 166

Telo je v dveh ravnovesnih stanjih: ko se giblje enakomerno k osi in ko se giblje enakomerno proč od osi.

a/gibanje k osi: sila trenja je usmerjena radialno navzven. $Mg - k_t mg = mr_1\omega^2$; $r_1 = (M-k_t m)g/m\omega^2$.

b/gibanje od osi: $r_2 = (M+k_t m)g/m\omega^2$.

Če ni trenja (k_t=0), je $r_2 = r_1 = gM/m\omega^2$.

167./ Pilot aviona, ki leti vodoravno s hitrostjo v (720km/h), izključi motor in se zaleti v navpični krog polmera R (1000m). S kolikšno silo pritiska sedež na pilota v najvišji legi (F_2) in s kolikšno silo v najnižji legi (F_1)? Masa pilota je m (70kg).

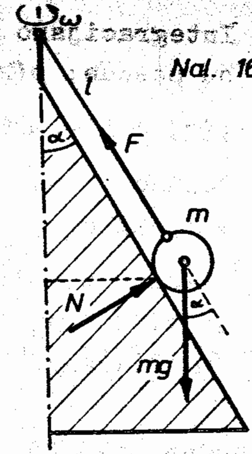
$F_1 - mg = mv^2/R$, $F_1 = mg + mv^2/R = 350kp$

$v_2^2 = v^2 - 2g.2R$ (v_2 = hitrost letala v najvišji legi)

$mg - F_2 = mv_2^2/R$, $F_2 = mg - mv_2^2/R$ ali

$F_2 = 5mg - mv^2/R = 70kp$

168./ Kroglica mase m visi na vrvici dolžine l (20cm), katere drugi konec je pritrjen ob vrh stožca. Kot ob vrhu stožca je 2α(60^o). Pri kolikšni frekvenci vrtenja stožca okrog geometrijske osi (ν_o) se kroglica odlepi od plašča stožca? Lepenje med kroglico in stožcem zanemarimo.



Nal. 168

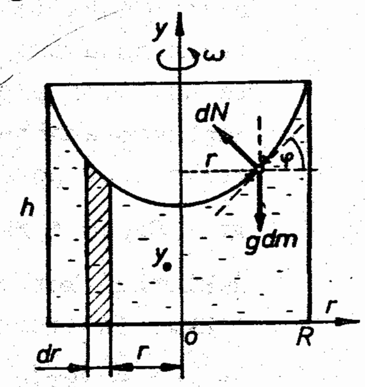
Na kroglico delujejo tri sile: sila vrvice, teža in sila podlage. Rezultanta mora biti usmerjena k osi vrtenja in enaka produktu mase in radialnega pospeška kroglice. Tej zahtevi ustrežemo, če velja:

$F\cos\alpha + N\sin\alpha = mg$ in $F\sin\alpha - N\cos\alpha = ml\sin\alpha.\omega^2$

Odtod izračunamo $N = m\sin\alpha(g - l\omega^2\cos\alpha)$. Kroglica se odlepi, ko je N = 0; to se zgodi pri frekvenci ν_o, ki zadošča enačbi: $g = l\omega_o^2\cos\alpha = 0$ ali .

$\omega_o = (g/l\cos\alpha)^{1/2} = 2\pi\nu_o$, $\nu_o = 1{,}2/s$

169./ Lonec polmera R (5cm) in višine h (15cm) je poln vode. Začnemo ga vrteti okrog geometrijske osi s frekvenco ω (5/s). Kakšno obliko zavzame gladina tekočine? Koliko tekočine (volumen V) izteče iz lonca? S kolikšno frekvenco bi morali vrteti lonec (ω_1), da bi gladina tekočine dosegla dno lonca?



Nal. 169

Izberemo si masni element dm na gladini tekočine; oddaljenost tega elementa od osi je r. Nanj delujeta sili gdm in dN (gl.nalogo 159!); njuna rezultanta ima radialno smer in je enaka $dmr\omega^2$.

$gdm = dN\cos\varphi$, $dN\sin\varphi = dmr\omega^2 = gdm\,tg\varphi$

Dobimo: $r\omega^2 = g.tg\varphi = g.dy/dr$ (y = višina elementa)

$dy = (\omega^2/g)rdr$ ter

$y(r) = y_o + \omega^2 r^2/2g$ (rotacijski paraboloid)

Integracijsko konstanto y_o določimo s pogojem na robu posode: $y(R) = h = y_o + \omega^2 R^2/2g$. Dobimo:

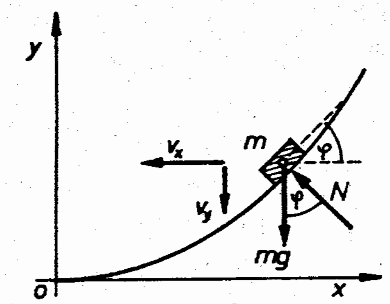
$$y(r) = h - \omega^2 (R^2 - r^2)/2g$$

Volumen V tekočine, ki izteče, je:

$$V = \pi R^2 h - \int_0^R y(r).2\pi r dr = \pi\omega^2 R^4/4g$$

Gladina tekočine doseže dno lonca pri $\omega = \omega_1$, ko je $y(0) = y_o = 0$, to je pri $h = \omega_1^2 R^2/2g$,
$\omega_1 = (2gh/R^2)^{1/2}$

* 170./Koščec ledu spustimo z višine H v parabolični jami , po kateri drsi brez trenja. Oblika jame je določena z enačbo: $y = kx^2$ (k je znana konstanta). Kolikšna sta hitrost (v_o) in pospešek (a_o) na dnu jame? S kolikšno silo (N_o) košček pritiska na podlago, ko zdrkne skozi najnižjo točko jame?



Nal. 170

Na košček delujeta sila mg in sila podlage N, ki je pravokotna na podlago. Hitrost koščka (v) in pospešek (a) razstavimo na vodoravni in navpični projekciji ter napišemo enačbe gibanja za vsako smer posebej:

$$mg - N\cos\varphi = ma_y = mdv_y/dt \ , \quad N\sin\varphi = ma_x = mdv_x/dt$$

Naklonski kot tangente na krivuljo je $tg\varphi = dy/dx = 2kx$. Iz zgornjih enačb eliminiramo N in dobimo:

$$dv_x/dt = 2kx(g - dv_y/dt)$$

Košček se stalno dotika jame; hitrost v ima smer tangente na krivuljo, zato velja:

$v_y = v_x tg\varphi = 2kxv_x$. To enačbo odvajamo po času:

$$dv_y/dt = 2kx.dv_x/dt + 2kv_x.dx/dt \ , \quad dx/dt = -v_x$$

Iz obeh enačb eleminiramo dv_y/dt in dobimo diferencialno enačbo za v_x:

$$dv_x/dt = 2kxg - 4k^2x^2dv_x/dt + 4k^2xv_x^2$$

$$dv_x/dt = (dv_x/dx)(dx/dt) = -v_x dv_x/dx$$

$$-v_x dv_x/(g+2kv_x^2) = 2kxdx/(1+4k^2x^2)$$

Integriramo obe strani enačbe in dobimo:

$$(g + 2kv_x^2)(1 + 4k^2x^2) = \text{konst.}$$

Integracijsko konstanto določimo z začetnim pogojem:

$v_x = 0$ pri $x = x_o$ ($H = kx_o^2$)

$$v_x^2 = 2g(H-y)/(1+4ky)$$

$$v_y^2 = 4k^2x^2v_x^2 = 4ky.v_x^2$$

$$\underline{v^2} = v_x^2 + v_y^2 = (1+4ky)v_x^2 = \underline{2g(H-y)}$$

Na dnu jame (x=y=0) je $v_o^2 = 2gH$.

Pospešek točke:

$$a_x = dv_x/dt = -v_x dv_x/dx = -(1/2)d(v_x^2)/dx$$

$$a_x = 2gkx(1+4kH)/(1+4k^2x^2)^2$$

$$a_y = dv_y/dt = (dv_y/dx)(dx/dt) = -v_x dv_y/dx = -2kv_x^2 - kxd(v_x^2)/dx$$

$$a_y = 4gk(4k^3x^4+2kx^2-H)/(1+4k^2x^2)^2$$

Na dnu jame velja: $a_x = 0$, $a_y = -4gkH = a_o$

Sila podlage:

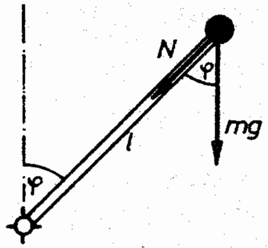
$$N = (m/\sin\varphi)a_x = mg(1+4kH)/(1+4k^2x^2)^{3/2}$$

$$N_o = N(0) = mg(1+4kH).$$

Sila podlage na dnu jame je torej večja od teže koščka, zato pospešek kaže navzgor.

* 171./Lahka palica dolžine l se lahko vrti okrog vodoravne osi na enem koncu palice. Na drugem koncu palice je pritrjena utež mase m. Palico spustimo z najvišje lege. Pri katerem kotu (φ_o) glede na navpičnico je nape-

tost v palici nič? Kolikšna je sila (N_o) v palici, ko palica prečka vodoravno smer in kolikšna (N_1), ko zdrsne skozi najnižjo lego?



Nal. 171

$N + mg\cos\varphi = ml\omega^2$

$mg\sin\varphi = ml\alpha = mld\omega/dt$

Iz druge enačbe dobimo:

$g\sin\varphi = l(d\omega/d\varphi)(d\varphi/dt) =$

$= l\omega\, d\omega/d\varphi$ ali

$\omega d\omega = (g/l)\sin\varphi d\varphi$

Začetni pogoj je: $\omega = 0$ za $\varphi = 0$. Po integraciji:

$\omega^2 = (2g/l)(1 - \cos\varphi)$

Zdaj ko poznamo ω^2, lahko iz prve enačbe gibanja izpeljemo izraz za silo N:

$N = mg(2 - 3\cos\varphi)$; $N = 0$ pri $\varphi = \varphi_o = 48{,}2^o$

$N_o = N(90^o) = 2mg$, $N_1 = N(180^o) = 5mg$

172./Vedro vode vrtimo v navpični ravnini po krogu polmera R (1,5m). Najmanj kolikšno hitrost (v_o) mora vedro imeti v najvišji točki, da voda ne izteče iz vedra?

V najvišji točki kroga velja: $N + mg = mv^2/R$ ali

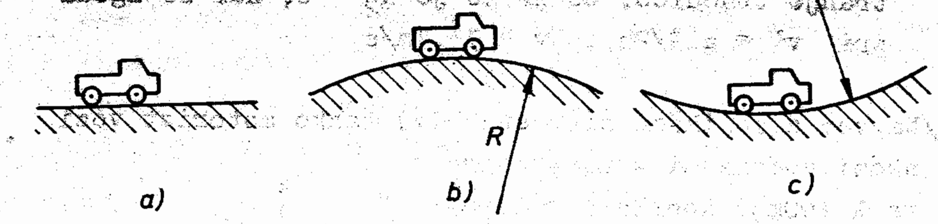
$N = m(v^2/R - g)$

Če naj voda ne izteče iz vedra, mora pritiskati na dno, to je $N \geqslant 0$ ali $v^2 \geqslant gR$.

$v_o = (gR)^{1/2} = 3{,}88m/s$

173./Avtomobil vozi s hitrostjo v (20m/s) po cesti. Nenadoma blokira kolesa; koeficient trenja je k_t (0,5). S kolikšnim pojemkom (a) začne drseti a/ na vodoravni cesti, b/ na vrhu konveksno zakrivljene ceste polmera R (200m) in c/ na dnu konkavno zakrivljene ceste polmera R?

$a = F_t/m = k_tN/m$



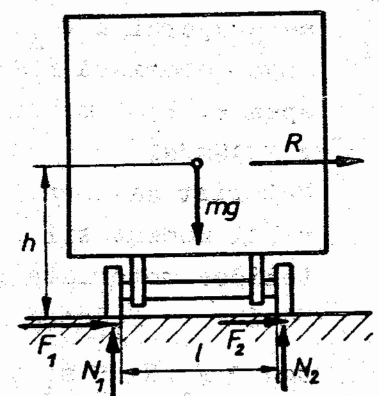
Nal. 173

a/ $N = mg$, $a = k_tg = 5m/s^2$

b/ $N = m(g - v^2/R)$, $a = k_t(g - v^2/R) = 4m/s^2$

c/ $N = m(g + v^2/R)$, $a = k_t(g + v^2/R) = 6m/s^2$

174./Vagon vozi skozi vodoravni ovinek polmera R (240m). Višina težišča vagona nad tračnicami je h (1,5m), razdalja med tračnicama je l (1,435m). Največ s kolikšno hitrostjo (v) lahko vozi skozi ovinek, da se ne prevrne?



Nal. 174

Na zunanjo tračnico delujeta sili F_1 in N_1, na notranjo sili F_2 in N_2. Navpična projekcija rezultante vseh sil na vagon je nič, vodoravna projekcija je enaka produktu mase vagona in radialnega pospeška (v^2/R):

$F_1 + F_2 = mv^2/R$, $N_1 + N_2 = mg$

Nastavimo še enačbo ravnovesja vrtilnih momentov glede na vodoravno os skozi težišče vagona:

$(N_1 - N_2)l/2 - (F_1 + F_2)h = 0$

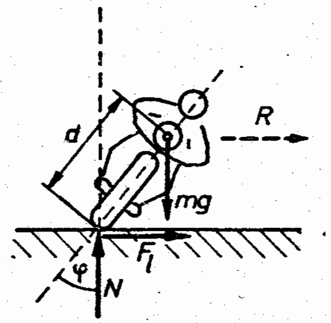
$N_1 - N_2 = (2h/l)(mv^2/R)$

Dobimo izraza za N_1 in N_2:

$N_1 = mg/2 + (h/l)mv^2/R$, $N_2 = mg/2 - (h/l)mv^2/R$

Vagon se začne prevračati, ko več ne pritiska na notranjo tračnico, to je ko je $N_2 = 0$, kar se zgodi pri $v^2 = glR/2h$, $v = 33,4 m/s$

175./Največ s kolikšno hitrostjo (v) lahko motorist vozi skozi vodoravni ovinek polmera R (90m)? Koeficient lepenja med kolesoma in tlemi je k_1 (0,4). Za kolikšen kot se mora pri tem nagniti?



Nal. 175

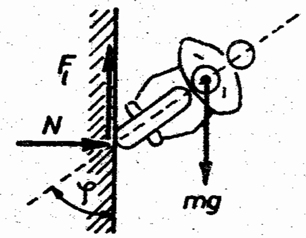
Navpična projekcija sile podlage drži ravnovesje teži motorista: $N = mg$. Vodoravna projekcija ($F_1 = k_1 N$) daje motoristu radialni pospešek: $F_1 = mv^2/R = k_1 mg$. Dobimo: $v^2 = Rk_1 g$ ali $v = 19 m/s$.

Motorist se mora nagniti za takšen kot φ, da je vrtilni moment sil N in F_1 glede na vodoravno os skozi težišče motorista nič:

$N d\sin\varphi = F_1 d\cos\varphi$ (d = višina težišča nad kolesoma)

$tg\varphi = F_1/N = k_1$, $\varphi = 21,8^o$

176./Najmanj s kolikšno hitrostjo (v) mora motorist voziti po valjastem zidu polmera R (20m), da ne zdrsi? Koeficient lepenja je k_1 (0,8). Razdalja težišča od dotikališča je d (0,7m). Za kolik kót se mora motorist nagniti (φ)?



Nal. 176

$F_1 = mg = k_1 N$ ter $N = mv^2/(R - d\sin\varphi)$ ali

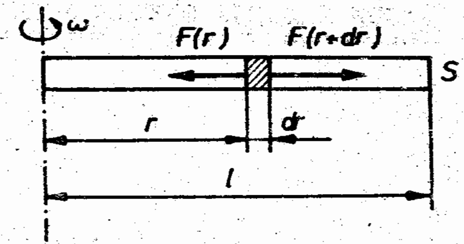
$v^2 = g(R - d\sin\varphi)/k_1$

Kót φ izračunamo z ravnovesjem vrtilnih momentov:

$F_1 d\sin\varphi = N d\cos\varphi$ ali $F_1 = N ctg\varphi$ ali $ctg\varphi = k_1$

Sledi: $\varphi = 51,4^o$ ter $v = 15,6 m/s$

* 177./Največ s kolikšno frekvenco (ω_o) smemo vrteti palico dolžine l (1m) v vodoravni ravnini, da se ne odtrga? Natezna trdnost palice je p_o (100kp/cm²), gostota palice je ρ (8kg/cm³). Kje se homogena palica najprej odtrga?



Nal. 177

Na masni element dm, ki je na razdalji r od osi vrtenja, delujeta v radialni smeri sila F(r) navznoter in sila F(r+dr) navzven. Njuna rezultanta (dF) daje masnemu elementu radialni pospešek $r\omega^2$:

$F(r) - F(r+dr) = -dF = r\omega^2 dm$, $dm = \rho S dr$

$dF = -\omega^2 \rho S r . dr$

Robni pogoj je: $F = 0$ pri $r = 1$. Po integriranju sledi:

$F(r) = \rho S\omega^2 (l^2 - r^2)/2$

Sila v palici je največja na osi (r=0), kjer znaša:

$F_o = S\omega^2 l^2 \rho/2 = Sp_o$. Odtod dobimo:

$\omega_o = (2p_o/\rho l^2)^{1/2} = 50/s$

* 178./Centrifuga z epruvetami se vrti s frekvenco ω (3600/min). Gladina vode v epruvetah je odmaknjena od osi za a (7cm), dno epruvet za b (15cm). Kolikšen je tlak (p) na dno epruvet?

$N(r+dr) - N(r) = dN = r\omega^2 dm$

$dN = S\rho\omega^2 r dr$

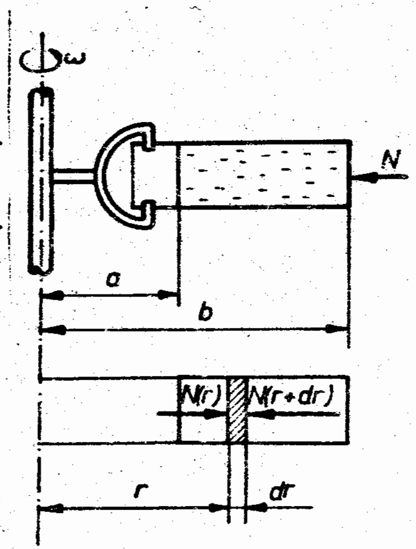
$N(r) = konst. + S\rho\omega^2 r^2/2$

Robni pogoj je: $N = 0$ pri $r = a$, zato dobimo:

$N(r) = S\rho\omega^2 (r^2 - a^2)/2$

$p = N(b)/S = \rho\omega^2 (b^2 - a^2)/2$

$p = 1,26 . 10^5 N/m^2$



Nal. 178