Predavanja 6b

RELATIVNO GIBANJE

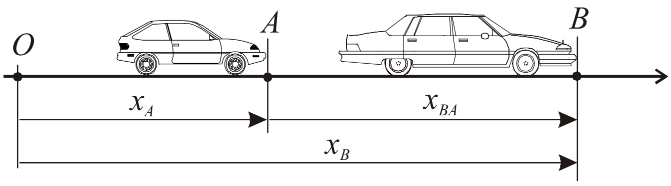
Govoriti o mirovanju ali gibanju nekega telesa pomeni vedno govoriti o njegovi legi glede na drugega telesa. Za opazovalca na pločniku se voznik v vozilu, ki gre mimo, giblje skupaj z vozilom, za sopotnika v tem vozilu pa ta voznik miruje. Pojma gibanje in mirovanje negea telesa sta torej odvisna od izbire opazovališča. Vsako gibanje je relativno in ne moremo govoriti o absolutnem gibanju ali mirovanju.

Postavlja se vprašanje kako je opis gibanja odvisen od izbire opazovališča. Na to vprašanje odgovorimo tako, da opazujemo gibanje iz dveh različnih opazovališč in rezultate opazovanja medsebojno primerjamo. V nadaljevanju si bomo kot prvo ogledali primer relativnega gibanja po premici nato pa še poseben primer gibanja v ravnini.

Relativno premočrtno gibanje

Naj se točki A in B gibljeta po isti premici (Slika 6b.1). Legi točk glede na koordinatno izhodišče O sta x_A in x_B. Lega točke B glede na točko A naj bo x_{BA}. Med temi koordinatami obstaja naslednja zveza (slika 6b.1)

$$\boxed{x_B = x_A + x_{BA}} \tag{6b.1}$$



Slika 6b.1

Po definiciji je hitrost odvod lege po času. Odvod gornje enačbe je

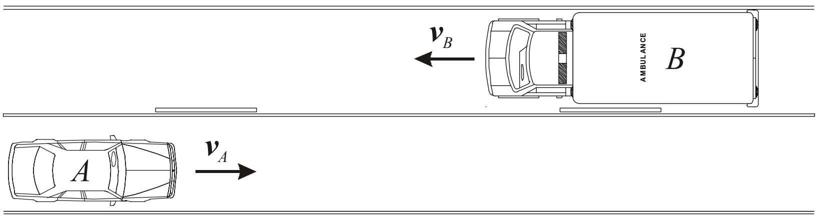
$$\frac{dx_B}{dt} = \frac{dx_A}{dt} + \frac{dx_{BA}}{dt}$$

to pa se da zapisati v naslednji obliki

$$\boxed{v_B = v_A + v_{BA}} \tag{6b.2}$$

pri čemer sta $v_A = \dfrac{dx_A}{dt}$ in $v_B = \dfrac{dx_B}{dt}$ hitrosti točk A in B glede na izhodišče O, $v_{BA} = \dfrac{dx_{BA}}{dt}$ pa hitrost točke B glede na točko A.

Primer. Vozilo *A* vozi s hitrostjo 80 km/h, v nasproti smeri pa vozi vozilo *B* s hitrostjo 120 km/h. Kolikšna je relativna hitrost vozila *B* glede na *A* in kolikšna je relativna hitrost vozila *A* glede na *B* ?



Rešitev. Naj bo $v_A = 80\,\mathrm{km/h}$. Ker vozilo B vozi v nasprotni smeri je $v_B = -120\,\mathrm{km/h}$. Relativna hitrost B glede na A je iz (6b.2) torej

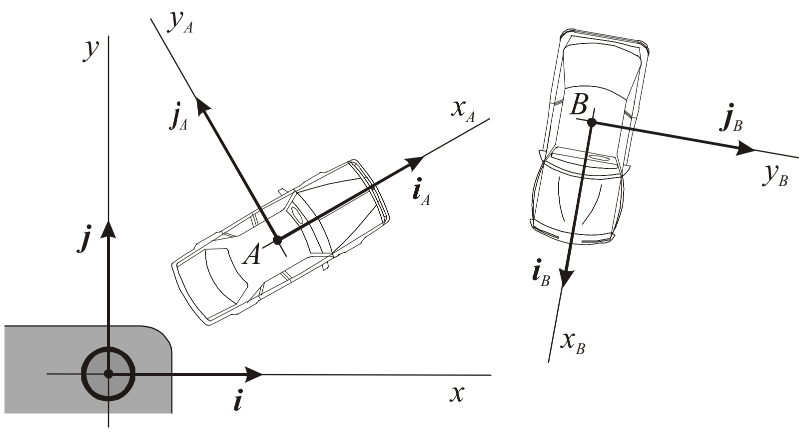
$$v_{BA} = v_B - v_A = -120 - 80 = -200\,\mathrm{km/h}$$

relativna hitrost A glede na B pa

$$v_{AB} = v_A - v_B = 80 - (-120) = 200\,\mathrm{km/h}\,.$$

Relativno gibanje v ravnini

Matematično opišemo gibanje tako, da izberemo neko točko, ki jo imenujemo kordinatno izhodišče ali referenčna točaka ali opazovališče , v to točko pa postavimo koordinatno bazo t.j. sistem koordinatnih osi. Referenčno točko in koordinatno bazo imenujemo koordinatni sistem. Glede na koordinatni sistem je lega točke popolnoma določena s svojimi koordinatami ali krajevnim vektorjem, gibanje točke pa je določeno, če v vsakem tenutku časa poznamo njeno lego.

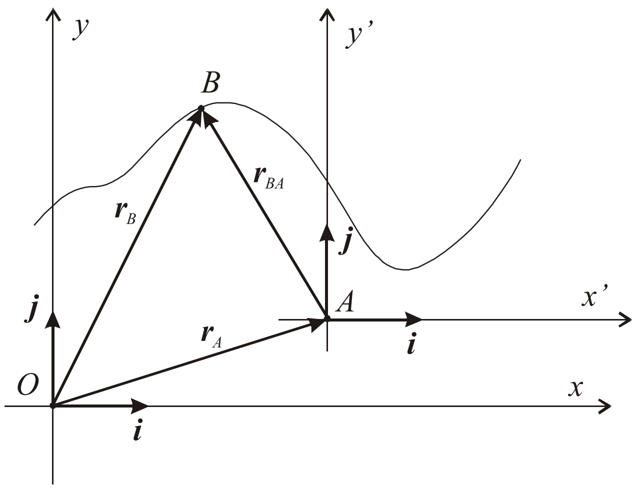


Slika 6b.2

Pogojno mirujoč koordinatni sistem v katerem opisujemo gibanje teles imenujemo absolutni koordinatni sistem. Gibanja glede na ta sistem je absolutno gibanje, vse veličine, ki so opisane v tem sistemu pa so absolutne. Vsak drug koordinatni sistem imenujemo relativni koordinatni sistem. Gibanje teles glede na ta sistem je relativno gibanje, veličine, ki se nanašajo na ta sistem pa so relativne.

Na sliki 6b.2 je prikazan primer dveh vozil. Na vsako od vozil je vezan koordinatni sistem. Absolutni koordinatni sistem je vezan na zemljsko površino, relativna koordinatna sistema sta vezana na vozili.

Oglejmo si sedaj gibanje poljubne neke točke B (Slika 6b.3). V točko O postavimo absolutni koordinatni sistem z baznimi vektorji $\boldsymbol{i}$ in $\boldsymbol{j}$, v točko A pa relativni koordinatni sistem z istimi baznimi vektorji $\boldsymbol{i}$ in $\boldsymbol{j}$. Z drugimi besedami, relativni koordinatni sistem naj se ne vrti glede na absolutni koordinatni sistem.



Slika 6b.3

Naj bo lega točke A glede na točko O podana s krajevnim vektorjem $\boldsymbol{r}_A = x_A\,\boldsymbol{i} + y_A\,\boldsymbol{j}$, lega točke B glede na točko O s krajevnim vektorjem $\boldsymbol{r}_B = x_B\,\boldsymbol{i} + y_B\,\boldsymbol{j}$, lega točke B glede na točko A pa s krajevnim vektorjem $\boldsymbol{r}_{BA} = x_{BA}\,\boldsymbol{i} + y_{BA}\,\boldsymbol{j}$. Iz slike 6b.3 razberemo naslednjo povezavo med tem krajevnimi vektorji

$$\boxed{\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{BA}} \tag{6b.3}$$

ali razstavljeno po koordinatnih oseh

$$x_B = x_A + x_{BA}, \qquad y_B = y_A + y_{BA}$$

Po definiciji je hitrost točke odvod njenega krajevnega vektorja po času. Tako so

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} \quad \text{absolutna hitrost točke } A$$

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{d\boldsymbol{r}_B}{dt} \quad \text{absolutna hitrost točke } B$$

$$\boldsymbol{v}_{BA} = \frac{d\boldsymbol{r}_{BA}}{dt} \quad \text{relativna hitrost točke } B \text{ glede na } A$$

Če torej (6b.3) odvajamo po času

$$\frac{d\boldsymbol{r}_B}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_{BA}}{dt}$$

in upoštevamo definirane hitrosti dobimo

$$\boxed{\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}} \tag{6b.4}$$

ali razstavljeno po koordinatnih oseh

$$v_B = v_A + v_{BA}, \qquad v_B = v_A + v_{BA} .$$

Hitrost točke B glede na točko O enaka vektorski vsoti hitrost točke A glede na točko O in hitrost točke B glede na točko A. Oglejmo si nekaj posledic.

- V primeru, ko točka A glede na točko O miruje izmerita opazovalca v O in A enako hitrost točke B

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_{BA}$$

  Z drugimi besedami: hitrost točke je neodvisna od izbire točke v katero postavimo koordinatno izhodišče.

- V primeru, ko pa točka B miruje glede na točko A pa imata ti točki glede na točko O enaki hitrosti

$$\boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B .$$

Podobno kot hitrosti obravnavamo pospeške. Po definiciji je pospešek odvod hitrosti po času. Tako so

$$\boldsymbol{a}_A = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} \quad \text{absolutni pospešek točke } A$$

$$\boldsymbol{a}_B = \frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt} \quad \text{absolutni pospešek točke } B$$

$$\boldsymbol{a}_{BA} = \frac{d\boldsymbol{v}_{BA}}{dt} \quad \text{relativni pospešek točke } B \text{ glede na } A$$

Če torej (6b.4) odvajamo po času

$$\frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}_{BA}}{dt}$$

in upoštevamo definirane pospeške dobimo

$$\boxed{\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}} \tag{6b.5}$$

ali razstavljeno po koordinatnih oseh

$$a_B = a_A + a_{BA}, \qquad a_B = a_A + a_{BA}.$$

Če se točka A glede na točko O giblje enakomerno premočrtno je $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{0}$. Opazovalca v O in A v tem primeru izmerita enak pospešek točke B

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{BA}.$$

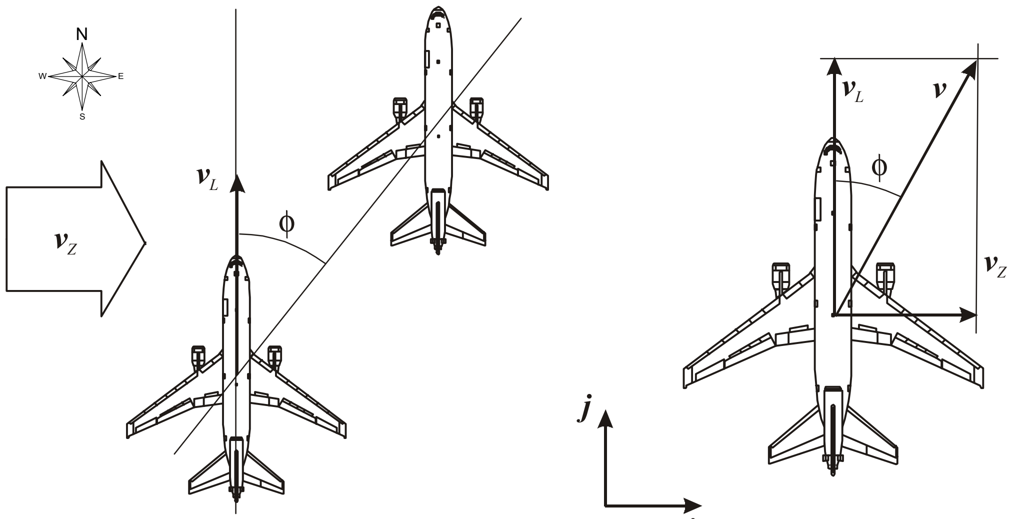
Z drugimi besedami: pospešek točke je enak za vse koordinatne sisteme, ki se gibljejo enakomerno premočrtno. Koordinatne sisteme, ki se gibljejo enakomerno premočrtno imenujemo inercialne koordinatne sisteme.

Na postavljeno vprašanje, kako je opis gibanja odvisen od izbire koordinatnega sistema lahko torej odgovorimo:

- če koordinatna sistema mirujeta eden proti drugemu izmerita enake hitrosti;
- če se koordinatna sistema gibljeta eden proti drugemu enakomerno premočrtno izmerita enake pospeške.

Še enkrat povdarimo, da je bila bistvena predpostvaka gornje obravnave ta, da se relativni koordinatni sistem ne vrti glede na absolutnega. V nadaljevanju si oglejmo nekaj primerov.

Primer 1. Kompas v letalu kaže smer leta proti severu, merilec hitrosti pa , da se giblje skozi zrak s hitrostjo 700 km/h. Kolikšna je hitrost letala glede na Zemljo, če piha z zahoda veter s hitrostjo 100 km/h ? V katero smer leti letalo glede na Zemljo ?



(a) (b)

Rešitev. Izberemo koordinatne smeri $\boldsymbol{i}$ in $\boldsymbol{j}$ tako kot prikazuje slika (b). Glede na te smeri sta hitrosti letala $\boldsymbol{v}_L = 700\,\boldsymbol{j}$ in vetra $\boldsymbol{v}_Z = 100\,\boldsymbol{i}$. Hitrost letala glede na Zemljo je

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_Z + \boldsymbol{v}_L = 100\,\boldsymbol{i} + 700\,\boldsymbol{j}$$

Absolutna vrednost v hitrosti letala je

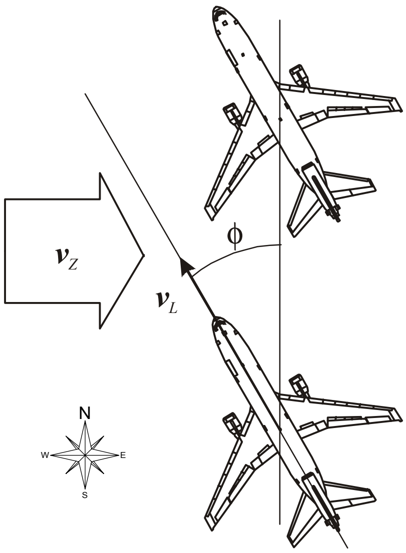
$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{100^2 + 700^2} = \underline{\underline{707\,\text{km/h}}}$$

njena smer ϕ pa

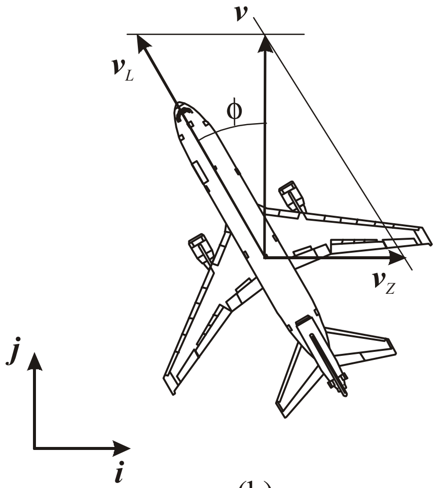
$$\phi = \arctan\frac{100}{700} = \underline{\underline{8.1^0}}\,.$$

Smer hitrosti določa tudi smer leta. Ta je 8.1^0 vzhodno od severa. Veter torej povečuje hitrost letala glede na Zemljo, obenem pa ga zanaša iz smeri leta.

Primer 2. V katero smer glede na Zemljo mora pilot iz prejšnega primera usmeriti letalo, če želi leteti proti severu ? Kolikšna je v tem primeru hitrost letala glede na Zemljo ?



(a)



(b)

Rešitev. Izberemo koordinatne smeri $\boldsymbol{i}$ in $\boldsymbol{j}$ tako kot prikazuje slika (b). Glede na te smeri sta hitrosti letala glede na zrak $\boldsymbol{v}_L = -700\sin\phi\,\boldsymbol{i} + 700\cos\phi\,\boldsymbol{j}$, pri čemer je ϕ neznana smer te hitrosti, in vetra $\boldsymbol{v}_Z = 100\,\boldsymbol{i}$. Hitrost letala $\boldsymbol{v}$ glede na Zemljo je torej

$$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{v}_Z + \boldsymbol{v}_L = \left(100 - 700\sin\phi\right)\boldsymbol{i} + 700\cos\phi\,\boldsymbol{j}$$

pri čemer je v neznana velikost hitrosti letala glede na Zemljo. Iz gornje enakosti dobimo sistem dveh enačb za dve neznanki v in ϕ:

$$0 = 100 - 700\sin\phi$$
$$v = 700\cos\phi$$

Iz prve izračunamo smer leta ϕ

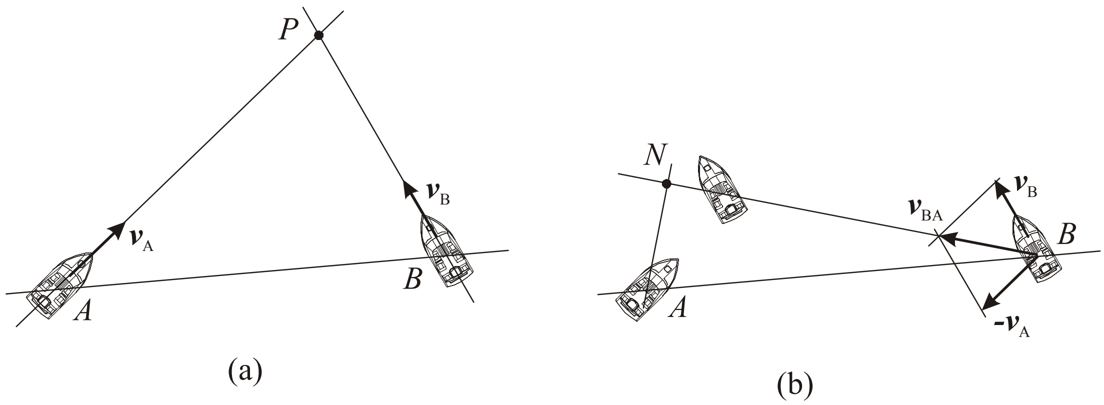
$$\phi = \arcsin\frac{100}{700} = \underline{\underline{8.2^0}}$$

iz druge pa absolutno vrednost hitrosti letala v glede na Zemljo

$$v = 700 \times \cos 8.2^0 = \underline{\underline{693\,\text{km/h}}}\,.$$

Pilot mora torej usmeriti letalo za 8.2^0 zahodno od severa. Veter v tem primeru zmanšuje hitrost letala glede na Zemljo.

Primer 3. Izogibanje trčenja na morju[1]. Čolna A in B se gibljeta s stalnima hitrostima $\boldsymbol{v}_A$ in $\boldsymbol{v}_B$ glede na morje v katerem se gibljeta. Če postavimo iz točk A in B premici v smereh hitrosti čolnov se ti sekata v točki P (slika 6b.2a). Ali se čolna zaletita ?

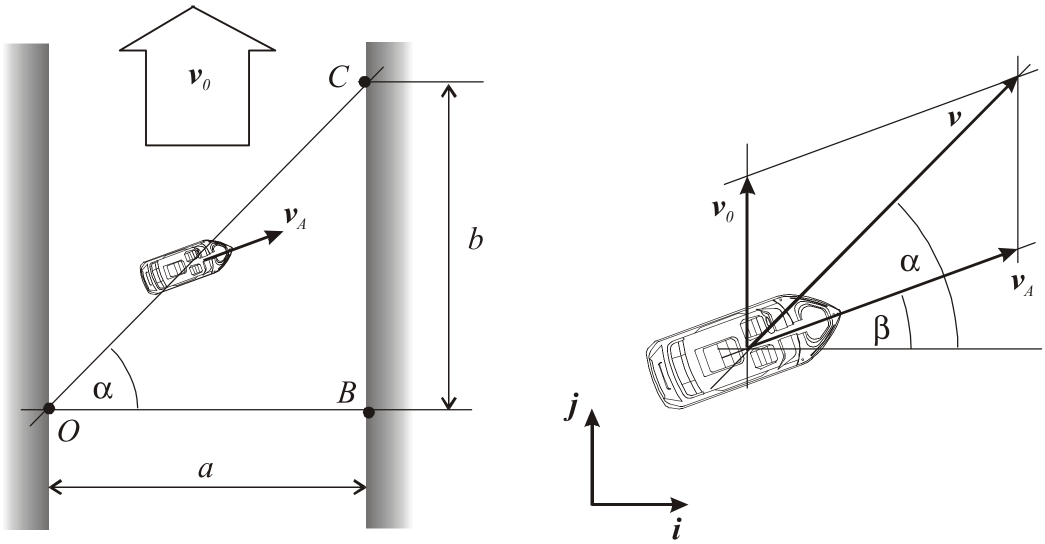


Slika 6b.2

Rešitev. Relativna hitrost čolna B glede na čoln A je $\boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{v}_B + (-\boldsymbol{v}_A)$. Ker se razdalje niso odvisne od spremembe opazovalne točke, se B giblje glede na A v smeri relativne hitrosti $\boldsymbol{v}_{BA}$ (Slika 6b.2b). Čoln B bo torej zgrešil A za razdaljo $\overline{AN}$ t.j. pravokotno razdaljo med točko A in smerjo hitrosti $\boldsymbol{v}$. Čas, ki ga B porabi da pride v točko N pa je enak razdalji $\overline{BN}$ ulomljeno s absolutno vrednostjo hitrosti $\boldsymbol{v}_{BA}$.

[1] A.P.French, *Newtonian Mechanics*, W.W.Norton&Company,1975, str72-74

Primer 4. Reka, široka $a = 500\,\mathrm{m}$ teče proti severu s hitrostjo $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$. V katero smer je potrebno obrniti čoln, če želimo po najkrajši poti prepluti reko s hitrostjo $v_A = 10\,\mathrm{m/s}$ glede na reko iz točke *O* v točko *C*, ki se nahaja na drugem bregu na oddaljenosti $b = 200\,\mathrm{m}$ od točke *B*. Koliko časa traja pot ? Kolikšna je najmanjša hitrost čolna glede na reko, da je še možno iz *O* pripluti v točko *C* ?



(a) (b)

Rešitev. Smer hitrosti rečnega toka je znana tako po velikosti, hitrost čolna glede na rečni tok je znana po velikosti ne pa po smeri, hitrost čolna glede na Zemljo pa je znana le po smeri t.j. smer hitrosti je smer iz točke *O* proti točki *C*.

Izberemo koordinatne smeri $\boldsymbol{i}$ in $\boldsymbol{j}$ tako kot prikazuje slika (b). Glede na te smeri so vektorji hitrosti naslednji

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_0 &= v_0\,\boldsymbol{j} && (\text{rečni tok})\\
\boldsymbol{v}_A &= v_A \cos\beta\,\boldsymbol{i} + v_A \sin\beta\,\boldsymbol{j} && (\text{čoln glede na reko})\\
\boldsymbol{v} &= v\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + v\sin\alpha\,\boldsymbol{j} && (\text{čoln glede na Zemljo})
\end{aligned}$$

Ker pa velja

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_A$$

dobimo dve enačbi za dve neznanki: smer gibanja čolna β in hitrost čolna v glede na Zemljo

$$v\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + v\sin\alpha\,\boldsymbol{j} = v_0\,\boldsymbol{j} + v_A\cos\beta\,\boldsymbol{i} + v_A\sin\beta\,\boldsymbol{j} \quad \Rightarrow$$

$$v\cos\alpha = v_A\cos\beta$$

$$v\sin\alpha = v_0 + v_A\sin\beta$$

Sistem enačb je nelinearen in ga rešimo po naslednjem postopku. Iz prve enačbe izračunamo $\cos\beta$

$$v\cos\alpha = v_A\cos\beta \quad\Rightarrow\quad \cos\beta = \frac{v}{v_A}\cos\alpha$$

V drugi enačbi nastopa $\sin\beta$, ki pa ga lahko izrazimo s $\cos\beta$ s pomočjo trigonometrične identitete

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \quad\Rightarrow\quad \sin\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{v^2}{v_A^2}\cos^2\alpha}$$

Upoštevamo to v drugi enačbi pa dobimo

$$v\sin\alpha = v_0 + v_A\sin\beta = v_0 \pm v_A\sqrt{1-\frac{v^2}{v_A^2}\cos^2\alpha}$$

Da se v dobljeni enačbi znebimo korena prenesemo v_0 na levo stran, kvadriramo in uredimo. Na ta način dobimo

$$\begin{aligned}
&\left(v\sin\alpha - v_0\right)^2 = v_A^2\left(1-\frac{v^2}{v_A^2}\cos^2\alpha\right) \quad\Rightarrow\\
&v^2\sin^2\alpha - 2v_0 v\sin\alpha + v_0^2 = v_A^2 - v^2\cos^2\alpha \quad\Rightarrow\\
&\underbrace{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}_{=1}v^2 - 2v_0 v\sin\alpha + v_0^2 - v_A^2 = 0
\end{aligned}$$

Končna enačba za izračun neznane hitrosti je kvadratna enačba, ki ima obliko

$$v^2 - 2v_0 v\sin\alpha + v_0^2 - v_A^2 = 0$$

Rešitvi te enačbe sta

$$\boxed{\begin{aligned}
v_{1,2} &= v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - \left(v_0^2 - v_A^2\right)} =\\
&= v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_A^2 - v_0^2\cos^2\alpha}
\end{aligned}}$$

Rešitvi bosta realni, če bo izraz pod korenom večji ali kvečemu enak nič. Ta pogoj nam daje tudi odgovor na vprašanje o tem kolikšna mora biti najmanjša hitrost čolna glede na reko, da je še možno pripluti v željeno točko *C*. Imamo torej pogoj

$$v_A^2 - v_0^2\cos^2\alpha \ge 0 \quad\Rightarrow\quad v_A \ge v_0\cos\alpha$$

Iz skice (a) je velikost kota α enaka

$$\alpha = \arctan\frac{200}{500} = \underline{\underline{21.8^0}}$$

Hitrost čolna v reki mora biti zato večja od

$$v_A \geq 3\times\cos 21.8^0 = \underline{\underline{2.8\,\mathrm{m/s}}}$$

V našem primeru je $v_A = 10\,\mathrm{m/s}$ zato so rešitve kvadratne enačbe realne. Prva rešitev je

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0\sin\alpha + \sqrt{v_A^2 - v_0^2\cos^2\alpha} = \\ &= 3\times\sin 21.8^0 + \sqrt{10^2 - 3^2\times\cos^2 21.8^0} = \underline{\underline{10.7\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

Tej hitrosti pripada kot

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{v_1}{v_A}\cos\alpha\right) = \arccos\left(\frac{10.7\times\cos 21.8^0}{10}\right) = \underline{\underline{5.7}}^{\,0}$$

Druga rešitev je

$$\begin{aligned} v_2 &= v_0\sin\alpha - \sqrt{v_A^2 - v_0^2\cos^2\alpha} = \\ &= 3\times\sin 21.8^0 - \sqrt{10^2 - 3^2\times\cos^2 21.8^0} = \underline{\underline{-8.5\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

Pripadajoči kot pa

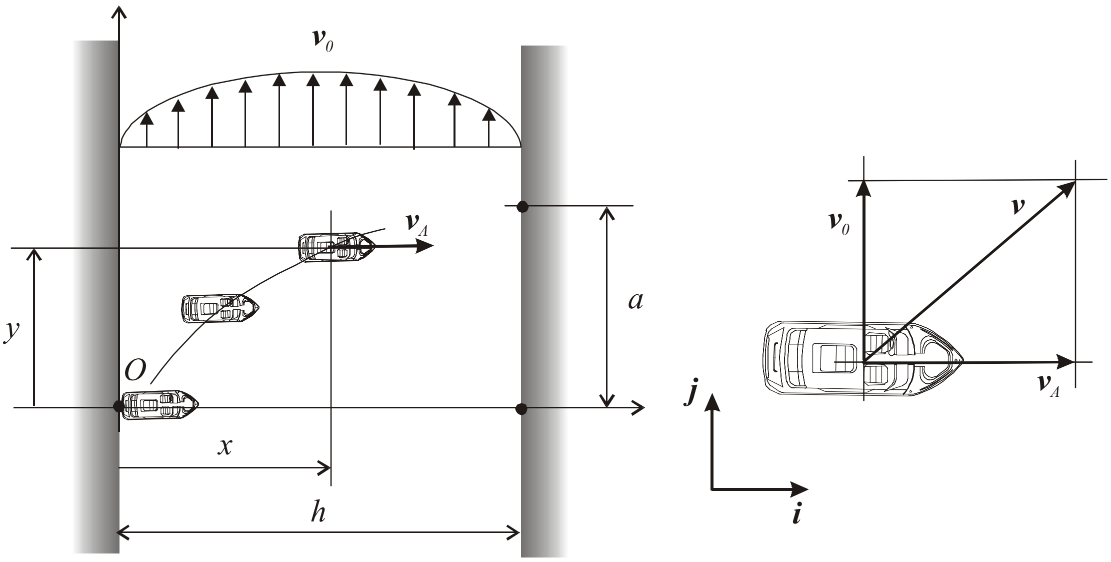
$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{v_2}{v_A}\cos\alpha\right) = \arccos\left(\frac{-8.5\times\cos 21.8^0}{10}\right) = \underline{\underline{142.0}}^{\,0}$$

Druga rešitev opisuje gibanje čolna iz točke *C* v točko *0*.

Čas, ki ga porabi čoln za preplutje reke je

$$\overline{OC} = v_1 t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{\overline{OC}}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v_1} = \frac{\sqrt{500^2+200^2}}{10.7} = \underline{\underline{47}}\,\mathrm{s}\,.$$

Primer 5[2]. Določi obliko pot po kateri se giblje plovilo v reki katere hitrostni profil popisuje parabola $v_0 = a\,y\left(h-y\right)$, pri čemer je h širina reke in a konstanta. Plovilo ima konstantno hitrost v in je v vsakem trenutku usmerjeno pravokotno na obalo. Kje na drugi strani obale pristane ?



(a) (b)

Rešitev. Komponente hitrosti čolna sta

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_A$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = a\,y\left(h-y\right)$$

Če enčbi medsebojno delimo dobimo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{v_A}\,y\left(h-y\right)$$

Z integracijo

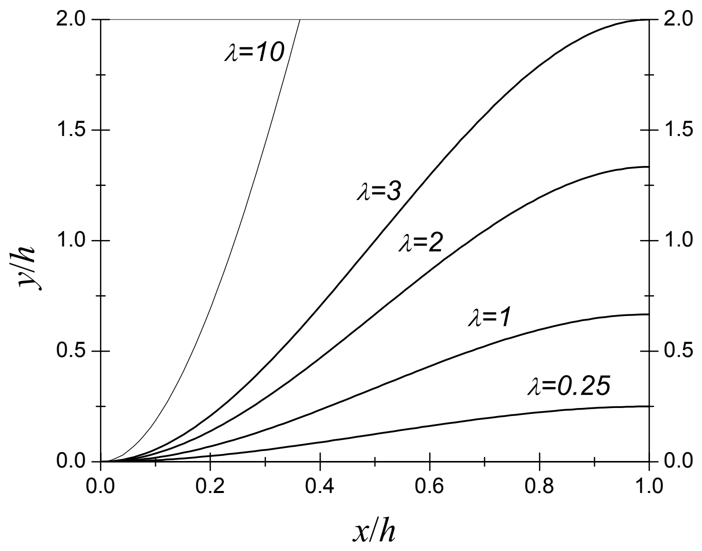
$$y = \frac{a}{v_r}\left(h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) + C$$

Ker je $y\left(0\right)=0 \quad \Rightarrow \quad C=0$. Krivulja, ki popisuje pot gibanja čolna je torej kubična parabola

2 Univerzitetni študij

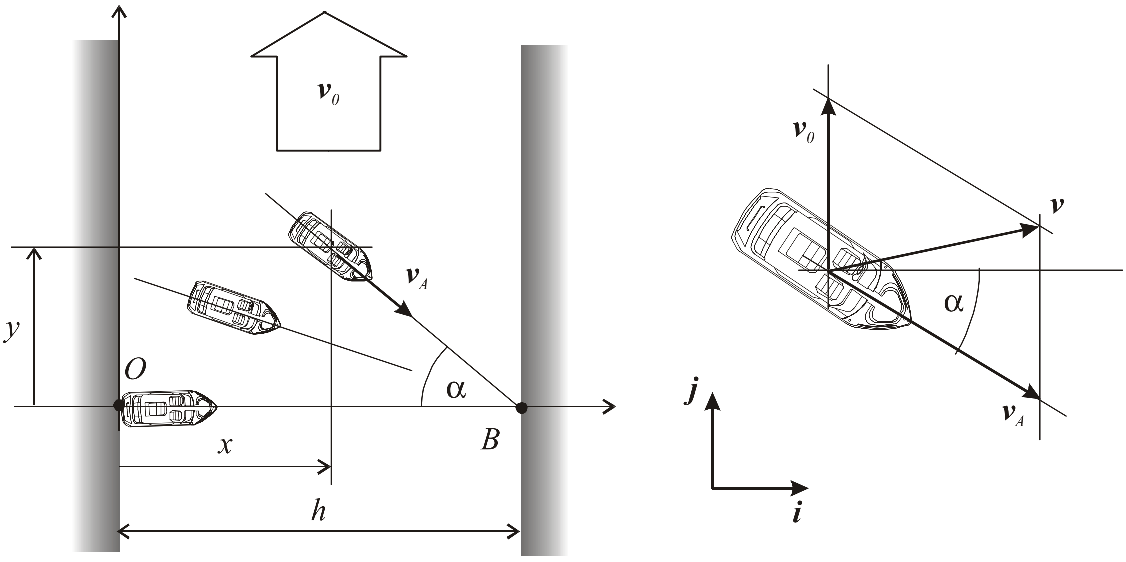
$$y = \frac{a}{2v_r} y^2 \left(h - \frac{2}{3} y \right)$$

Obliko poti za različne vrednosti parametra $\lambda = \dfrac{a}{2h^2 v_r}$ so prikazane grafu.



Oblika poti za različne vrednosti $\lambda = \dfrac{a}{2h^2 v_r}$

Primer 6[3]. Ladja, ki skuša prepluti reko tako, da usmerja gibanje v nepremično točko na drugem bregu. Določi tir plovbe in časa, ki ga ladja porabi da prepluje reko ? Hitrost rečnega toka in hitrost ladje v reki sta konstantna.



(a) (b)

Koordinati hitrosti čolna glede na rečni breg sta

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v\cos\alpha$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 - v\sin\alpha$$

To sta dve diferencialni enačbi v kateri nastopajo tri neznane funkcije časa t in sicer $x(t)$, $y(t)$ in $\alpha(t)$. Zvezo med njimi dobimo iz skice (a)

$$\tan\alpha = \frac{y}{a-x}$$

Časa, ki nastopa kot parameter se iznebimo tako, da enačbi medsebojno delimo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0 - v\sin\alpha}{v\cos\alpha} = \frac{v_0}{v\cos\alpha} - \tan\alpha = \frac{v_0}{v}\sqrt{1+\tan^2\alpha} - \tan\alpha$$

pri čemer smo funkciji $\sin\alpha$ in $\cos\alpha$ izrazili prek $\tan\alpha$ s pomočjo trigonometričnih identitet

[3] Univerzitetni program

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

Sistem enačb, ki jih rešujemo je tako naslednji

$$\frac{dy}{dx} = \lambda\sqrt{1+u^2} - u \qquad u = \frac{y}{a-x}$$

pri čemer smo zaradi krajšega zapisa uvedli novi oznaki $\lambda = \frac{v_0}{v}$ in $u = \tan\alpha$.

Na tem mestu bi lahko vstavili izraz za u v prvo enačbi, vendar pa pridemo do rešitve enostavnejše tako, da drugo enačbo odvajamo po x in upoštevamo gornji enačbi

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{dy/dx}{h-x} + \frac{y}{(h-x)^2} = \\ &= \frac{\lambda\sqrt{1+u^2}-u}{h-x} + \frac{u}{h-x} = \\ &= \frac{\lambda\sqrt{1+u^2}}{h-x}\end{aligned}$$

Dobljeno enačbo prepišemo v obliko

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \lambda\frac{dx}{h-x}$$

To pa lahko integriramo

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \lambda\int_0^x \frac{dx}{h-x} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Ash} u = \lambda\ln\frac{h}{h-x}$$

Ker pa je $\operatorname{Ash} u = \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$ je rešitev

$$\left(\frac{h}{h-x}\right)^{\lambda} = u+\sqrt{1+u^2} \qquad y = (h-x)u$$

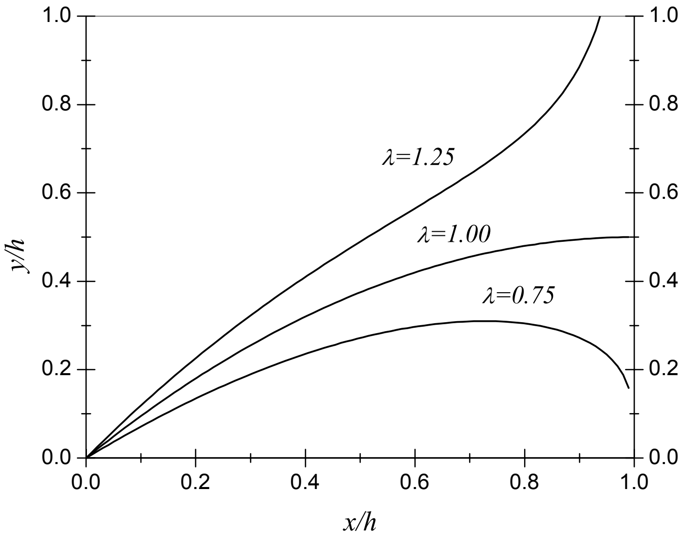
Če iz enačb izločimo u dobimo

$$\frac{h^{\lambda}}{(h-x)^{\lambda-1}} = y + \sqrt{(h-x)^2 + y^2}$$

ali v eksplicitni obliki

$$y=\frac{(h-x)}{2}\left[\frac{h^{\lambda}}{(h-x)^{\lambda}}-\frac{(h-x)^{\lambda}}{h^{\lambda}}\right]$$

Iz te enačbe vidimo, da čoln pristane v točki B če je njegova hitrost večja od hitrosti rečnega toka t.j. če je $\lambda<1$. Če je njegova hitrost enaka hitrosti rečnega toka t.j. če je $\lambda=1$ pristane na drugem bregu vendar ne t točki A , če pa je njegova hitrost manjša od hitrosti rečnega toka pa na drugem bregu sploh ne pristane (glej graf)



Oblika poti za različne vrednosti $\lambda=\frac{v_0}{v}$.