ZBIRKA FIZIKALNIH NALOG Z REŠITVAMI 1

Rudolf Kladnik, Hinko Šolinc

DZS

Ljubljana 1996

Prvi del Zbirke fizikalnih nalog z rešitvami sta napisala prof. dr. Rudolf Kladnik in prof. dr. Hinko Šolinc.
Rokopis je jezikovno pregledala Mija Longyka, prof.

Po mnenju Ministrstva za šolstvo in šport št. 415-37/96 z dne 26.4.1996 šteje knjiga med proizvode, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

53(075.8)(076.1)

KLADNIK, Rudolf
Zbirka fizikalnih nalog z rešitvami 1 / Rudolf Kladnik, Hinko Šolinc ; [ilustracije Hinko Šolinc]. - 3. izd. - Ljubljana : DZS, 1996

ISBN 86-341-0373-0
1. Šolinc, Hinko

60269312

PREDGOVOR

Nova Zbirka fizikalnih nalog z rešitvami je temeljito predelana in izpopolnjena izdaja stare Zbirke fizikalnih problemov z rešitvami, ki je prvič izšla leta 1972 in bila kasneje še trikrat ponatisnjena.

Po izboru nalog in načinu reševanja je zbirka dopolnilo univerzitetnega učbenika fizike za študente prvih letnikov tehničnih fakultet. Dosedanja praksa pa je pokazala, da po tej zbirki radi segajo tudi učenci srednjih šol. Zato sva v novi izdaji razlago reševanja nalog nekoliko razširila in poglobila. Predvsem pa je bila najina želja, da odpraviva številne napake, ki so se prikradle v prvotno zbirko in ostale v njej prikrite kljub »strogim« korekturam. Prav neverjetno je, kako jim to uspe! Precej zaslug za odpravo napak imajo tudi mnogi bralci, ki so naju nanje opozorili. Lepo se jim zahvaljujeva in prosiva še za nadaljnje sodelovanje.

Fizikalnih nalog, ki so praktično pomembne in jih je mogoče razrešiti z razmeroma preprostimi matematičnimi sredstvi (z diferencialnim, integralnim in vektorskim računom), je relativno veliko. Težava ni v tem, kje poiskati naloge, temveč kako jih oblikovati in reševati, da bodo del logične celote, ki se dopolnjuje s konceptom pouka osnovnega kurza fizike na visokošolski ravni.

Izkušnje kažejo, da se študentje sicer lahko naučе fizikalnih resnic, da pa težko formulirajo fizikalne zakone matematično. Poznajo fizikalne zakone in matematične operacije ločeno, težko pa jih povežejo. Toda fizika se dosledno ukvarja predvsem s pojmi, ki jih je mogoče meriti in matematično povezovati. Zaradi tega imajo študentje toliko težav s fiziko. Potrebne so vaje in vaje. Iskreno želiva, da bi bralci ob reševanju fizikalnih nalog občutili vsaj toliko zadovoljstva, kot sva ga midva pri njihovem oblikovanju. Reševanje fizikalnih nalog je lahko zelo zanimivo in privlačno, če se zanimamo za fizikalno vsebino nalog in za fizikalni pomen dobljenih rezultatov. Lahko pa je mučen posel, če rešujemo naloge preveč formalistično.

Ljubljana, januar 1988

Rudolf Kladnik in Hinko Šolinc

Vsebina

1. PREMO GIBANJE

1.1. Telo se giblje enakomerno s hitrostjo $v = 10$ m/s. Kolikšno pot napravi v časovnem intervalu $\Delta t = 10$ s, 1 h? Koliko časa (t_1) potrebuje za pot $s_1 = 5$ km?

$s = v\Delta t = 100$ m , 36 km
$t_1 = s_1/v = 500$ s

1.2. Avtomobil vozi prvo uro s stalno hitrostjo $v_1 = 72$ km/h, drugo uro pa s stalno hitrostjo $v_2 = 60$ km/h. Kolikšna je povprečna hitrost ($\bar{v}$) v prvih dveh urah vožnje?

$t = 1$ h, $s_1 = v_1 t$, $s_2 = v_2 t$
$\bar{v} = (s_1 + s_2)/2t = (v_1 + v_2)/2 = 66$ km/h

1.3. Avtomobil vozi najprej na poti $s_1 = 1$ km s stalno hitrostjo $v_1 = 72$ km/h in nato na poti $s_2 = 2$ km s stalno hitrostjo $v_2 = 60$ km/h. Kolikšna je povprečna hitrost ($\bar{v}$) na celotni poti $s_1 + s_2$?

$\bar{v} = (s_1 + s_2)/(t_1 + t_2) = (s_1 + s_2)/(s_1/v_1 + s_2/v_2)$
$\bar{v} = 63{,}5$ km/h

1.4. Kolesar se vzpenja na gorski prelaz s povprečno hitrostjo $v_1 = 15$ km/h. Na vrhu se obrne in vozi nazaj v dolino s povprečno hitrostjo $v_2 = 45$ km/h. Kolikšna je njegova povprečna hitrost ($\bar{v}$) na celotni poti?

(Glej zgornjo nalogo za primer, $s_2 = s_1$)

$\bar{v} = 2v_1v_2/(v_1 + v_2) = 22{,}5$ km/h

1.5. Kako daleč od nas (s) je udarila strela, če zaslišimo grom $\Delta t = 4$ s kasneje, kot opazimo blisk? Zvok potuje s stalno hitrostjo $v = 340$ m/s, svetloba pa s $c = 300\,000$ km/s.

$s = ct_0 = v(t_0 + \Delta t)$, $t_0 = v\Delta t/(c - v)$ = čas potovanja svetlobe
$s = vc\Delta t/(c - v) \approx v\Delta t = 1360$ m (ker je $v \ll c$)

1.6. Vojak izstreli granato proti oddaljenemu tanku; po času $t_2 = 2{,}1$ s zasliši njeno eksplozijo. S kolikšno povprečno hitrostjo (v) se je granata gibala, če je zadela tank po času $t_1 = 0{,}6$ s od izstrelitve? Hitrost zvoka je $c = 340$ m/s.

$s = vt_1 = c(t_2 - t_1)$
$v = c(t_2 - t_1)/t_1 = 850$ m/s

1.7. Skozi postajo A pelje tovorni vlak s stalno hitrostjo $v_1 = 60$ km/h. Čez koliko časa (Δt) lahko skozi postajo A pripelje za njim brzi vlak, ki vozi s stalno hitrostjo $v_2 = 100$ km/h, da na poti do postaje B (ki je od A oddaljena za $s = 4$ km) ne trčita?

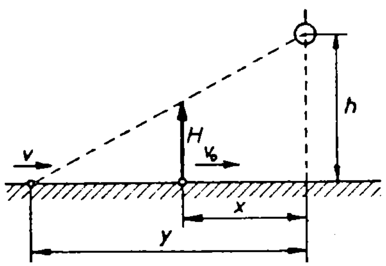
$s = v_1 t = v_2(t - \Delta t)$
$t = s/v_1 =$ čas vožnje tovornega vlaka od A do B
$\Delta t = t - s/v_2 = s(1/v_1 - 1/v_2) = 96$ s

1.8. Vlaka A in B se gibljeta drug proti drugemu, oba z enako hitrostjo $v_0 = 30$ km/h. V trenutku, ko sta oddaljena za $s = 60$ km, odleti od vlaka A proti vlaku B lastovka s stalno hitrostjo $v = 60$ km/h. Ko prileti do vlaka B, se takoj obrne in z enako hitrostjo odleti nazaj do vlaka A, se zopet obrne itd. Kolikšno pot (x) preleti lastovka do trenutka, ko vlaka trčita?

$t = s/2v_0 =$ čas vožnje vlakov $=$ čas letenja lastovke
$x = vt = vs/2v_0 = 60$ km

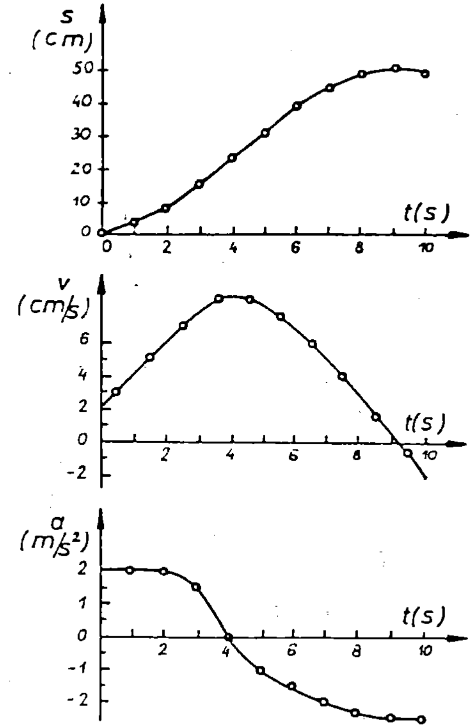
1.9. Človek (višina $H = 1{,}8$ m) se s stalno hitrostjo $v_0 = 0{,}75$m/s giblje po vodoravni cesti in se približuje cestni svetilki, ki visi na višini $h = 4$ m nad cesto. S kolikšno hitrostjo (v) se po cesti giblje senca njegove glave?

$h/H = y/(y - x)$
$y = x/(1 - H/h)$
$v_0 = dx/dt = x/t$
$v = dy/dt = y/t$
$v = v_0/(1 - H/h) = 1{,}4$ m/s



1.10. Lega točkastega telesa se spreminja s časom, kot kaže tabela:

t(s)	s (cm)
0	0
1	3
2	8
3	15
4	23,5
5	32,0
6	39,5
7	45,5
8	49,5
9	51,2
10	50,4

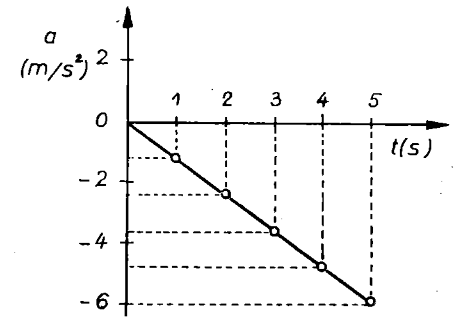


Nariši časovni graf koordinate s, hitrosti v in pospeška a. Kolikšna sta hitrost in pospešek v trenutku $t = 4$ s?

$v = 8{,}5$ cm/s
$a = 0$

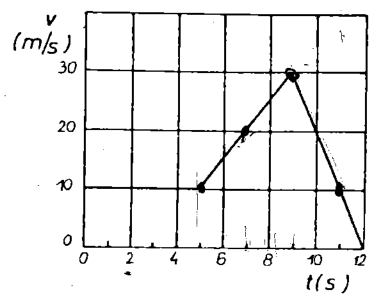
1.11. Krajevna koordinata točkastega telesa se s časom spreminja tako, kot kaže tabela. Nariši časovni graf pospeška in napiši analitično zvezo med pospeškom in časom.

t(s)	x(m)
0	0
1	9,8
2	18,4
3	24,6
4	27,2
5	25,0
6	16,8



$a = -kt$, $k = 1{,}2$ m/s^3

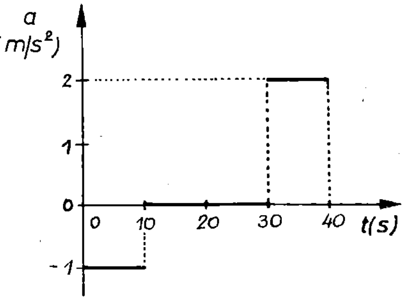
1.12. Na sliki je časovni graf hitrosti za neko gibanje točkastega telesa. S slike razberi: a) pospešek a_3 v 3. sekundi, b) pospešek a_7 v 7. sekundi in c) pospešek a_{11} v 11. sekundi od začetka gibanja. Kolikšno pot napravi telo v prvih devetih sekundah (x_9), v prvih petih sekundah (x_5) in v prvih enajstih sekundah (x_{11})?

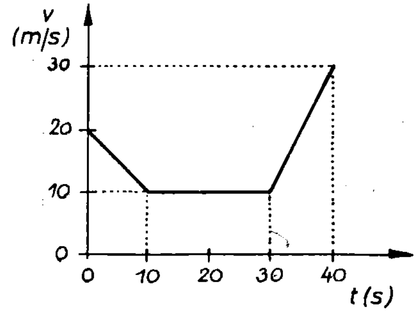


$a_3 = 0$
$a_7 = 5$ m/s^2
$a_{11} = -10$ m/s^2
$x_5 = 50$ m
$x_9 = 130$ m
$x_{11} = 170$ m

1.13. Na sliki je časovni graf pospeška za neko gibanje z začetno hitrostjo 20 m/s. Skiciraj časovni graf hitrosti za to gibanje. Kolikšna je hitrost (v_{20}) v 20. sekundi? Kolikšno pot (x_{15}) napravi telo v prvih 15 sekundah?

v_{20} = 10 m/s
x_{15} = 200 m





1.14. Točkasto telo se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a = 0,2 m/s. V kolikšnem času (t_1) naraste njegova hitrost od v_1 = 3,6 km/h na v_2 = 10 km/h? Kolikšna je njegova hitrost (v) po času t = 40 min od začetka pospeševanja, če je telo v začetku mirovalo?

$t_1 = (v_2 - v_1)/a$ = 8,9 s
$v = at$ = 480 m/s = 1730 km/h

1.15. Avtomobil vozi enakomerno pospešeno, začetna hitrost je nič. Kolikšen mora biti pospešek (a), da prevozi pot x = 6 km v času t = 5 min od začetka gibanja? Koliko časa (t_1) potrebuje za pot x_1 = 1 km? Kolikšna je hitrost (v) na koncu poti x_2 = 3 km?

$x = at^2/2$, $a = 2x/t^2$ = 0,13 m/s^2
$t_1 = (2x_1/a)^{1/2}$ = 124 s
$v = at_2 = (2ax_2)^{1/2}$ = 28 m/s

1.16. Točkasto telo se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a = 5 cm/s. Kolikšna je začetna hitrost v_0, če je hitrost po času t = 1 min od začetka pospeševanja enaka v = 5 m/s? Koliko časa (t_1 od začetka pospeševanja) potrebuje za pot x = 100 m?

$v = v_0 + at$, $v_0 = v - at$ = 2 m/s
$x = v_0t_1 + at_1^2/2$ (upoštevamo pozitivni koren enačbe)
$t_1 = -v_0/a + (v_0^2/a^2 + 2x/a)^{1/2}$ = 35 s

1.17. Avtomobil, ki vozi s hitrostjo v_0 = 100 km/h, začne enakomerno zavirati; ustavi se na poti x = 100 m od začetka zaviranja. Kolikšen je povprečen pojemek (a) med zaviranjem? Koliko časa (t) se avtomobil ustavlja?

$v = v_0 - at = 0$ ali $t = v_0/a$
$x = v_0t - at^2/2 = v_0^2/2a$, $a = v_0^2/2x$ = 3,86 m/s^2
$t = 2x/v_0$ = 7,2 s

1.18. V kolikšnem najkrajšem času (t_m) lahko trolejbus prevozi razdaljo x = 2 km med sosednjima postajama, če je največja dovoljena hitrost v = 40 km/h in največji dovoljeni pospešek oziroma pojemek a = 1,2 m/s^2?

$t_1 = v/a$ = najmanjši dovoljeni čas pospeševanja oz. pojemanja
$x = 2at_1^2/2 + vt_2$
t_2 = čas enakomerne vožnje = $x/v - v/a$
$t_m = 2t_1 + t_2$ = 189 s

1.19. Kolesar se s hitrostjo v_o = 36 km/h zažene v klanec. Kolikšna je njegova hitrost (v) na vrhu klanca, če je višinska razlika h = 5,1 m? Upor zraka in trenje zanemarimo.

$v = v_0 - at$, $a = g \sin \varphi$
$x = v_0t - at^2/2 = (v_0^2 - v^2)/2a$ = h/sin φ
$v^2 = v_0^2 - 2gh$, $v = 0$

1.20. Z največ kolikšno hitrostjo (v_0) lahko vozi avtomobil, če je vidljivost zaradi megle zmanjšana na x = 70 m? Reakcijski čas voznika je t_r = 1 s, največji pojemek med zaviranjem je a = 4 m/s^2.

Od trenutka, ko voznik zagleda oviro in se odloči ustaviti avto, do trenutka, ko pritisne na zavoro, mine reakcijski čas t_r, ko avto še vozi enakomerno s hitrostjo v_0 in napravi pot $x_r = v_0t_r$. Pot zaviranja je $x_z = v_0^2/2a$.

$x = x_r + x_z = v_0t_r + v_0^2/2a$ ali
$v_0^2 + 2at_rv_0 - 2ax = 0$ (upoštevamo pozitivni koren enačbe)
$v_0 = -at_r + (a^2t_r^2 + 2ax)^{1/2}$ = 20 m/s = 72 km/h

1.21. Mirujoče telo se začne gibati enakomerno pospešeno. V intervalu desete sekunde napravi pot x_{10} = 19 m. Kolikšno pot (x_{11}) napravi v intervalu enajste sekunde?

$x_{10} = (a/2)(t_{10}^2 - t_9^2)$
$x_{11} = (a/2)(t_{11}^2 - t_{10}^2) = x_{10}\,(t_{11}^2 - t_{10}^2)/(t_{10}^2 - t_9^2)$
$x_{11} = x_{10}\,(t_{11} + t_{10})/(t_{10} + t_9)$ = 21 m

1.22. Vlak se giblje enakomerno pojemajoče in se na železniški postaji ustavi tako, da je konec vlaka tik pred potnikom, ki stoji na peronu in opazuje ustavljanje vlaka. Koliko časa (t_2) vozi mimo potnika druga polovica vlaka, če vozi prva t_1 = 7 s?

s = dolžina vlaka = $(a/2)(t_1 + t_2)^2$
$s/2$ = dolžina druge polovice vlaka = $at_2^2/2$
$t_2 = (s/a)^{1/2}$, $t_1 + t_2 = (2s/a)^{1/2} = \sqrt{2}t_2$
$t_2 = t_1/(\sqrt{2} - 1)$ = 17 s

1.23. Navpično navzgor izstrelimo kroglico, ki pade na tla po času t = 12 s. Do kolikšne višine (h) se kroglica dvigne? S kolikšno hitrostjo (v) pade na tla?

$h = g(t/2)^2/2$ = 176 m   Čas dviganja je enak času padanja
$v = gt/2$ = 59 m/s

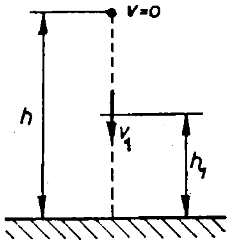
1.24. S kolikšne višine (h) moramo spustiti telo, da pade na tla s hitrostjo $v_1 = 200$ km/h? Kolikšna višina (h_1) je potrebna za enako končno hitrost, če telo odvržemo navzdol z začetno hitrostjo $v_0 = 72$ km/h?

$v_1 = gt$
$h = gt^2/2 = v_1^2/2g = 157$ m

Padanje pri začetni hitrosti: $v_1 = v_0 + gt_1$

$h_1 = v_0t_1 + gt_1^2/2 = (v_1^2 - v_0^2)/2g = h - v_0^2/2g$
$h_1 = 137$ m

1.25. S kolikšne višine (h) moramo spustiti telo, da preleti zadnji del poti z dolžino $h_1 = 30$ m v času $t_1 = 0{,}6$ s?



$h_1 = v_1t_1 + gt_1^2/2$
$v_1 = h_1/t_1 - gt_1/2 = 47$ m/s
$v_1^2 = 2g(h - h_1)$
$h = h_1 + v_1^2/2g = 143$ m

1.26. Navpično navzgor odvržemo kamen z začetno hitrostjo $v_0 = 10$ m/s. Po kolikšnem času (t_0) doseže največjo višino? Kje je v trenutku $t_1 = 0{,}4$ s in kje v trenutku $t_2 = 1{,}6$ s? Kolikšna je hitrost (v') na višini $h = 1$ m nad tlemi? Po kolikšnem času (t_3) in s kolikšno hitrostjo (v_3) pade kamen na tla?

Dviganje: $v = v_0 - gt_0 = 0$, $t_0 = v_0/g = 1{,}0$ s
$h_1 = v_0t_1 - gt_1^2/2 = 3{,}2$ m (gor grede)
$h_2 = v_0t_2 - gt_2^2/2 = 3{,}2$ m (dol grede)
$v'^2 = v_0^2 - 2gh$, $v' = \pm\, 9{,}0$ m/s (pozitivni predznak ustreza dviganju, negativni spuščanju)
$t_3 = 2t_1 = 2{,}0$ s
$v_3 = v_0 = 10$ m/s

1.27. Z višine $h = 50$ m odrinemo navzdol telo z začetno hitrostjo $v_0 = 10$ m/s. Ko se hitrost telesa poveča na $v_1 = 30$ m/s, pada telo naprej enakomerno s stalno hitrostjo. Po kolikšnem času (t) od odriva pade na tla?

$t_1 = (v_1 - v_0)/g = 2{,}0$ s = čas pospešenega padanja
$h_1 = (v_1^2 - v_0^2)/2g = 41$ m = pot pospešenega padanja
$t_2 = (h - h_1)/v_1 = 0{,}3$ s = čas enakomernega padanja
$t = t_1 + t_2 = 2{,}3$ s

1.28. Telo spustimo z višine $h = 8000$ m. Istočasno vržemo od tal navzgor drugo telo. S kolikšno začetno hitrostjo (v_0) ga moramo odvreči, da se telesi srečata na višini $h/2$?

Telesi se srečata po času $t = (h/g)^{1/2}$

$h/2 = gt^2/2 = v_0t - gt^2/2$
$v_0 = h/2t + gt/2 = (gh)^{1/2} = 280$ m/s

1.29. Telo spustimo z višine $h = 78$ m nad tlemi. Istočasno odvržemo z višine $h_1 = 20$ m navpično navzgor drugo telo. S kolikšno začetno hitrostjo (v_0) ga moramo vreči, da telesi padeta na tla istočasno?

$t = (2h/g)^{1/2} = 4{,}0$ s = čas padanja

Višinsko koordinato merimo od tal navzgor:

$0 = h_1 + v_0t - gt^2/2$
$v_0 = gt/2 - h_1/t = 15$ m/s

1.30. Balon se dviga s stalno hitrostjo $v_1 = 1$ m/s. V trenutku, ko je na višini $h = 50$ m, vržemo od tal navzgor kamen. S kolikšno začetno hitrostjo (v_0) ga moramo odvreči, da doseže balon? Na kolikšni največji višini (h_0) kamen še lahko doseže balon?

Kamen doseže balon na višini H po času t.

$H = h + v_1t = v_0t - gt^2/2$ ali
$t^2 - 2t(v_0 - v_1)/g + 2h/g = 0$

Upoštevamo rešitev z negativnim predznakom korena (pozitivni koren ustreza rešitvi za zadetek kamna ob balon med padanjem):

$t = (v_0 - v_1)/g - [(v_0 - v_1)^2/g^2 - 2h/g]^{1/2}$

Realno rešitev za t dobimo, če je:

$(v_0 - v_1)^2/g^2 - 2h/g \geqslant 0$ ali
$v_0 \geqslant v_1 + (2gh)^{1/2} = 32$ m/s

Druga rešitev:

Da kamen doseže balon, mora biti njegova hitrost najmanj enaka hitrosti v_1 balona, zato: $v_0 - gt = v_1$

$t = (v_0 - v_1)/g$

Dobljeni t vstavimo v prvo enačbo: $h + v_1t = v_0t - gt^2/2$ in dobimo:

$v_0 = v_1 + (2gh)^{1/2}$, kar že poznamo
$h_0 = h + v_1t = h + (v_0 - v_1)v_1/g = 53$ m

1.31. Brzi vlak začne voziti v trenutku, ko pelje mimo njega tovorni vlak, ki vozi enakomerno s hitrostjo $v_0 = 90$ km/h. Po kolikšnem času (t_1) in kje (x_1) dohiti brzi vlak tovornega, če vozi enakomerno pospešeno s pospeškom $a = 0{,}2$ m/s^2? Kolikšna je tedaj njegova hitrost (v_1)?

$x_1 = v_0t_1 = at_1^2/2$, $t_1 = 2v_0/a = 250$ s
$x_1 = 2v_0^2/a = 6250$ m
$v_1 = at_1 = 2v_0 = 180$ km/h

1.32. Avtomobila vozita vštric s hitrostjo $v_0 = 54$ km/h. Naenkrat začne en avtomobil zavirati s stalnim pojemkom $a_1 = 2$ m/s^2. Ko se ustavi, miruje še $\Delta t = 10$ s časa, nakar začne enakomerno pospeševati s pospeškom $a_2 = 4$ m/s^2. Koliko (Δx) sta avtomobila oddaljena v trenutku, ko prvi avtomobil doseže prvotno hitrost v_0, s katero drugi ves čas enakomerno vozi? Po kolikšnem času (t_0 od začetka zaviranja) dohiti prvi avtomobil drugega?

$t_1 = v_0/a_1 = 7{,}5$ s = čas zaviranja
$x_1 = a_1t_1^2/2 = v_0^2/2a_1 = 56$ m = pot zaviranja
$t_2 = v_0/a_2 = 3{,}8$ s = čas pospeševanja
$x_2 = v_0^2/2a_2 = 28$ m = pot pospeševanja
$\Delta x = v_0(t_1 + \Delta t + t_2) - x_1 - x_2 = 235$ m

Prvi avtomobil dohiti drugega na oddaljenosti x:

$x = v_0t_0 = x_1 + a_2(t_0 - t_1 - \Delta t)^2/2$

Rešimo kvadratno enačbo za t_0 in dobimo $t_0 = 32$ s.

1.33. Proti križišču dveh pravokotnih cest vozi po eni cesti avtomobil s hitrostjo $v_1 = 72$ km/h, po drugi pa avtomobil s hitrostjo $v_2 = 36$ km/h. V trenutku, ko je hitrejši avtomobil oddaljen od križišča za $x_1 = 100$ m, počasnejši pa za $x_2 = 30$ m, začne hitrejši avtomobil enakomerno pospeševati. Najmanj kolikšen mora biti pospešek, da doseže križišče prej kot počasnejši avtomobil, ki vozi enakomerno?

$t_2 = x_2/v_2 = 3{,}0$ s = čas vožnje počasnejšega avtomobila
$x_1 = v_1t_2 + at_2^2/2$ ali
$a = 2x_1/t_2^2 - 2v_1/t_2 = 8{,}9$ m/s^2

1.34. Telesi se gibljeta drugo k drugemu. V trenutku, ko sta oddaljeni $x = 100$ m, ima prvo telo hitrost $v_1 = 7$ m/s, drugo pa hitrost $v_2 = 3$ m/s. Po kolikšnem času(t) in s kolikšno relativno hitrostjo (v_r) trčita, če se prvo telo giblje enakomerno, drugo pa enakomerno pospešeno s pospeškom $a = 4$ m/s^2?

Prvo telo napravi pot $x_1 = v_1t$, drugo pa $x_2 = v_2t + at^2/2$.

$x = x_1 + x_2 = (v_1 + v_2)t + at^2/2$ ali
$t^2 + (2/a)(v_1 + v_2)t - 2x/a = 0$

Rešimo kvadratno enačbo za t in dobimo: $t = 5$ s

$v_r = v_1 + (v_2 + at) = 30$ m/s

1.35. Krajevna koordinata točkastega telesa se spreminja s časom po enačbi: $x = At^3 + Bt^2$, kjer je $B = 2$ m/s^2, A pa je neznana konstanta. Kolikšna je hitrost (v_2) v trenutku $t_2 = 2$ s, če je pospešek v trenutku $t_1 = 1$ s enak $a_1 = 16$ m/s^2?

$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 3At^2 + 2Bt$
$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 6At + 2B$
$a_1 = 6At_1 + 2B$, $A = (a_1 - 2B)/6t_1 = 2$ m/s^3
$v_2 = 3At_2^2 + 2Bt_2 = 32$ m/s

1.36. Zračni upor vsiljuje padajočemu telesu pojemek, ki narašča s hitrostjo padanja po enačbi: $a = kv^2$ (k je konstanta). Kako se hitrost padanja spreminja s časom, če začne telo padati brez začetne hitrosti in če je težni pospešek stalen? Kolikšna je hitrost padanja (v_0) po zelo dolgem času?

$g - kv^2 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}v/(g - kv^2) = \mathrm{d}t$

Po integraciji, upoštevaje začetni pogoj: $v = 0$ za $t = 0$, dobimo:

$t = (1/2kv_0)\ln[(v_0 + v)/(v_0 - v)]$, kjer je $v_0^2 = g/k$
ali
$v = v_0[1 - \exp(-2kv_0t)]/[1 + \exp(-2kv_0t)]$
$v = v_0\mathrm{th}(kv_0t)$

Ker je $\mathrm{th}(\infty) = 1$, dobimo: $v(\infty) = v_0 = (g/k)^{1/2}$

1.37. S helikopterja, ki lebdi v zraku, se spusti padalec in z zaprtim padalom prosto pada. Njegova hitrost narašča s časom po enačbi (glej prejšnjo nalogo): $v = v_0\mathrm{th}(gt/v_0)$, kjer je $v_0 = 50$ m/s. Po času $t_1 = 5{,}6$ s prostega padanja se odpre padalo. Kolikšna je tedaj njegova hitrost (v_1). Kolikšno pot (x_1) preleti padalec med prostim padanjem?

$v_1 = v_0\mathrm{th}(gt_1/v_0) = v_0\mathrm{th}(1{,}1) = 50\ \mathrm{m/s} \cdot 0{,}8 = 40$ m/s
$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t = v_0\mathrm{th}(gt/v_0)\mathrm{d}t$, $x = 0$ za $t = 0$
$x_1 = (v_0^2/g)\ln[\mathrm{ch}(gt_1/v_0) = (v_0^2/g)\ln(1{,}67) = 130$ m

1.38. Točkasto telo se giblje s pospeškom, ki se spreminja s hitrostjo po enačbi: $a = b - cv$ (c in b sta znana parametra). Kako se hitrost (v) in pot (x) spreminjata s časom, če se telo začne gibati iz koordinatnega izhodišča brez začetne hitrosti?

$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t = (b - cv)\mathrm{d}t$ ali
$b\int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^v \mathrm{d}v(1 - cv/b)$

Po integraciji, upoštevaje začetni pogoj $v = 0$ za $t = 0$, dobimo:

$v = (b/c)[1 - \exp(-ct)]$

Po zelo dolgem času se telo giblje enakomerno s hitrostjo b/c.

$dx = v\,dt = (b/c)[1 - \exp(-ct)]\,dt$

Zopet integriramo, začetni pogoj je tokrat $x = 0$ za $t = 0$:

$x = bt/c - (b/c^2)[1 - \exp(-ct)]$

Takoj po začetku gibanja (za $t \ll 1/c$) je $\exp(-ct) \approx 1 - ct + c^2t^2/2 - .....$ in zato:

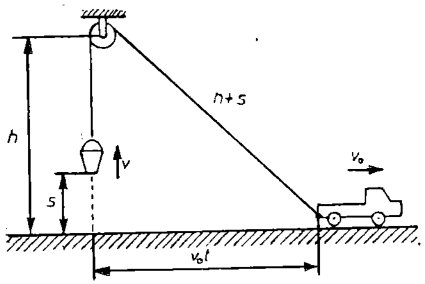
$x = bt/c - bt/c + bt^2/2 - ..... = bt^2/2 - .....$

kar velja za enakomerno pospešeno gibanje s pospeškom b. Po zelo dolgem času (za $t \gg 1/c$) pa je $\exp(-ct) \approx 0$ in $x \approx bt/c$, kar je značilno za enakomerno gibanje s hitrostjo b/c.

1.39. Pospešek telesa se s časom spreminja po enačbi: $a = A + Bt$, kjer je $A = 2$ m/s^2 in $B = 3$ m/s^3. Kolikšno pot (x_1) napravi telo v času $t_1 = 10$ s, če se gibanje prične iz koordinatnega izhodišča z začetno hitrosjo $v_0 = 2$ m/s?

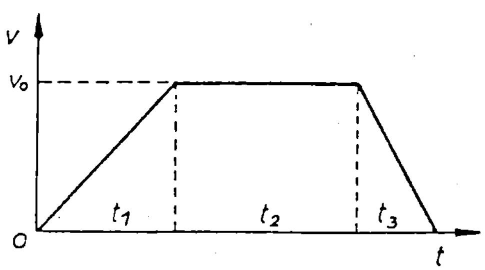
$dv = a\,dt = (A + Bt)dt$
$v = v_0 + At + Bt^2/2$
$dx = v\,dt = (v_0 + At + Bt^2/2)dt$
$x = v_0t + At^2/2 + Bt^3/6$
$x_1 = x(t_1) = 620$ m

1.40. Na višini h nad vodoravno cesto je pritrjen škripec, prek katerega vodi vrv z dolžino $2h$. Na visečem koncu vrvi je pritrjeno vedro, drugi konec vrvi pa je privezan na avtomobil, ki je na cesti. Kako se hitrost v in pospešek a vedra spreminjata s časom, če se avtomobil giblje enakomerno s hitrostjo v_0?



$(h + s)^2 = h^2 + v_0^2t^2$
$s = (h^2 + v_0^2t^2)^{1/2} - h$
$v = ds/dt = v_0^2t(h^2 + v_0^2t^2)^{-1/2}$
$a = dv/dt = v_0^2h^2(h^2 + v_0^2t^2)^{-3/2}$

1.41. S postaje A se začne gibati vlak enakomerno pospešeno s pospeškom $a_1 = 0{,}15$ m/s^2. Ko doseže hitrost v_0, se giblje naprej enakomerno s to hitrostjo $t_2 = 5$ minut. Na oddaljenosti $x_3 = 100$ m pred postajo B začne enakomerno zavirati s pojemkom $a_3 = 0{,}2$ m/s^2, dokler se na postaji ne ustavi. Kolikšna je razdalja (x) med postajama in koliko časa (t) potrebuje vlak za celotno pot?



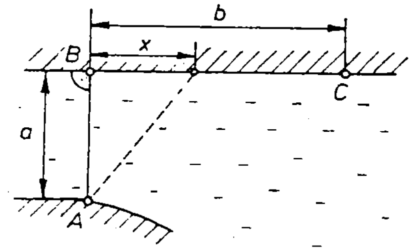
$x = x_1 + x_2 + x_3$, $t = t_1 + t_2 + t_3$
$x_3 = a_3t_3^2/2$, $t_3 = (2x_3/a_3)^{1/2} = 32$ m/s
$v_0 = a_3t_3 = 6{,}3$ m/s

$t_1 = v_0/a_1 = 42{,}0$ s
$x_1 = a_1t_1^2/2 = 132$ m
$x_2 = v_0t_2 = 1890$ m
$x = 2120$ m , $t = 374$ s

1.42. Z mesta A na otoku želimo čimprej priti do mesta C na obali. Po vodi lahko potujemo s hitrostjo $v_1 = 10$ km/h, po obali pa s hitrostjo $v_2 = 40$ km/h.
Kje na obali (na razdalji x od mesta B) se moramo izkrcati, da je skupni čas potovanja najkrajši?

$a = 10$ km, $b = 50$ km.

Pri $v_2 \leq v_1$ je $x = b$, za $v_2 > v_1$

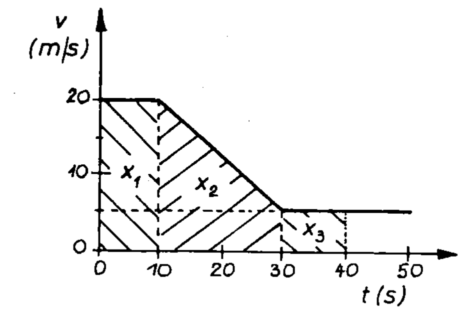


pa je $x < b$.

$t = (a^2 + x^2)^{1/2}/v_1 + (b - x)/v_2$
$dt/dx = 0$
$(xv_2/v_1)^2 = a^2 + x^2$
$x = a(v_2^2/v_1^2 - 1)^{-1/2} = 2{,}58$ km

Rezultat ima fizikalni pomen le za $x < b$.

1.43. Na sliki je časovni graf hitrosti gibajočega se telesa. Kolikšna je povprečna hitrost ($\bar{v}$) na poti x, ki jo telo preteče v času $t_1 = 40$ s?



S slike razberemo poti v posameznih časovnih intervalih:

$x_1 = 200$ m, $x_2 = 250$ m in $x_3 = 50$ m.
$x = x_1 + x_2 + x_3 = 500$ m
$\bar{v} = x/t_1 = 12{,}5$ m/s

1.44. Telo se začne gibati z začetno hitrostjo v_0, pospešek se spreminja s časom po enačbi: $a = A + Bt$, kjer sta A in B dani konstanti. Kolikšna je povprečna hitrost ($\bar{v}$) na poti, ki jo telo preteče v času t_1?

$v = v_0 + \int_0^t a\,dt = v_0 + At + Bt^2/2$
$x = \bar{v}t_1 = \int_0^{t_1} v\,dt = v_0t_1 + At_1^2/2 + Bt_1^3/6$
$\bar{v} = v_0 + At_1/2 + Bt_1^2/6$

Za $B = 0$ dobimo enakomerno pospešeno gibanje s pospeškom A, za katerega je povprečna hitrost aritmetična sredina med začetno in končno hitrostjo:

$\bar{v} = v_0 + At_1/2 = (v_0 + v_1)/2$, $(v_1 = v_0 + At_1)$

1.45. Balon se dviga s stalno hitrostjo $v_1 = 10$ m/s. Na višini $h = 500$ m odvržemo z balona navzdol vrečo peska s hitrostjo $v_2 = 10$ m/s glede na balon. Po kolikšnem času pade vreča na tla?

$h = (v_2 - v_1)t + gt^2/2$
$t = (v_1 - v_2)/g + [(v_1 - v_2)^2/g^2 + 2h/g]^{1/2}$
$t = 10$ s

1.46. Balon se dviga enakomerno s hitrostjo $v_0 = 50$ m/s. Od balona se odlepi kamen, ki pade na tla po času $t = 20$ s. Na kateri višini se je kamen odlepil od balona? S kolikšno hitrostjo (v_1) pade na tla?

$h = -v_0t + gt^2/2 = 960$ m
$v_1 = -v_0 + gt = 146$ m/s

2. GIBANJE V RAVNINI, KROŽENJE

2.1. Telesi istočasno zapustita koordinatno izhodišče 0 in se gibljeta enakomerno s hitrostima $v_1 = 30$ km/h ter $v_2 = 40$ km/h v pravokotnih smereh. Kako se s časom spreminja njuna medsebojna oddaljenost (d)? Kolikšna je ta (d_1) v trenutku, ko prvo telo napravi pot $x_1 = 900$ m?

V času t napravi prvo telo pot v_1t, drugo pa v_2t in velja:

$d^2 = (v_1t)^2 + (v_2t)^2$
$d = t(v_1^2 + v_2^2)^{1/2} = (50\ \text{km/h})t$
$t_1 = x_1/v_1$
$d_1 = (50\ \text{km/h})t_1 = 1{,}5$ km

2.2. Točkasto telo se giblje v ravnini x–y; njegovi koordinati se s časom spreminjata takole: $x = At^2 - B$, $y = Ct^2 - D$. Kako se s časom spreminjata hitrost in pospešek telesa? Po kakšni krivulji se telo giblje?

$v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 2At$
$v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 2Ct$
$v^2 = v_x^2 + v_y^2$ ali $v = 2t(A^2 + C^2)^{1/2}$
$a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = 2A$
$a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = 2C$
$a^2 = a_x^2 + a_y^2$, $a = 2(A^2 + C^2)^{1/2} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$

Enačbo krivulje poti dobimo, če eliminiramo čas t:

$y + D = (C/A)(x + B)$

Telo se giblje enakomerno pospešeno po premici z naklonom C/A glede na os x.

2.3. Točkasto telo se giblje pod vplivom dveh pravokotnih nihanj: $x = A \sin(\omega t)$ in $y = A \sin(\omega t + \delta)$, kjer je $A = 10$ cm, $\omega = 2\pi$/s in $\delta = \pi/6$. Določi krivuljo poti za to gibanje. Kje (x_1, y_1) je telo v trenutku $t_1 = 0{,}5$ s? Kolikšna sta tedaj njegova hitrost (v_1) in pospešek (a_1)?

$y = A \sin(\omega t) \cos\delta + A \cos(\omega t) \sin\delta = x \cos\delta + (A^2 - x^2)^{1/2} \sin\delta$

$(y - x\cos\delta)^2 + x^2 \sin^2\delta = A^2 \sin^2\delta$
$y^2 + x^2 - 2xy\cos\delta = A^2\sin^2\delta$

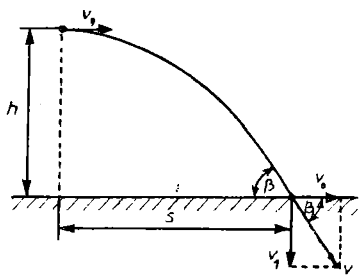
Telo se giblje po poševni elipsi, katere glavni osi sta nagnjeni za 45° glede na koordinatni osi.

$x_1 = A\sin(\omega t_1) = 10\text{ cm}\sin\pi = 0$
$y_1 = A\sin(\omega t_1 + \delta) = 10\text{ cm}\sin(\pi + \pi/6) = -5\text{ cm}$
$v_y = dy/dt = A\omega\cos(\omega t_1 + \pi/6) = -17{,}3\,\pi\text{ cm/s}$
$v_x = dx/dt = A\omega\cos(\omega t_1) = -20\,\pi\text{ cm/s}$
$v_1^2 = v_x^2 + v_y^2,\ v_1 = 26\,\pi\text{ cm/s} = 83\text{ cm/s}$
$a_x = dv_x/dt = -A\omega^2\sin(\omega t_1) = 0$
$a_y = dv_y/dt = -A\omega^2\sin(\omega t_1 + \pi/6) = 20\,\pi^2\text{ cm/s}^2 = 197\text{ cm/s}^2$
$a_1^2 = a_x^2 + a_y^2\quad,\quad a_1 = 197\text{ cm/s}^2$

2.4. Točkasto telo se začne gibati iz koordinatnega izhodišča z začetno hitrostjo $v_0 = 4$ m/s v smeri osi x. Giblje se s konstantnim pospeškom: $a_x = -2$ m/s^2 in $a_y = 4$ m/s^2. Kje je telo v trenutku $t = 3$ s od začetka gibanja?

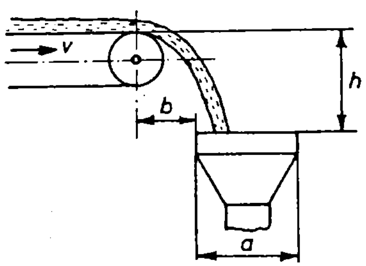
$x = v_{0x}t + a_x t^2/2 = 3\text{ m}\quad (v_{0x} = v_0)$
$y = v_{0y}t + a_y t^2/2 = 18\text{ m}\quad (v_{0y} = 0)$

2.5. Z balkona na višini $h = 10$ m nad tlemi odvržemo kamen z začetno hitrostjo $v_0 = 20$ m/s v vodoravni smeri. Kje pade kamen na tla (s od vznožišča balkona)? S kolikšno hitrostjo (v) in pod kakšnim kotom (β) udari ob tla?



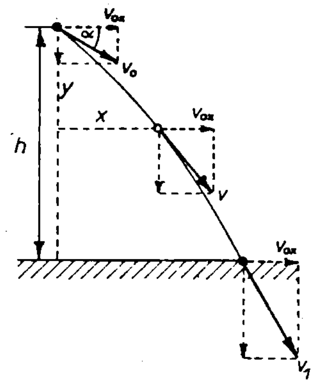
$t = (2h/g)^{1/2}$ = čas padanja .
$s = v_0 t = 29$ m
$v_1 = gt = (2gh)^{1/2}$
$v^2 = v_0^2 + v_1^2$
$v = 24$ m/s
$\mathrm{tg}\beta = v_1/v_0,\ \beta = 35°$

2.6. Vodoravni tekoči trak prenaša pesek, ki pada v lijak. Ta je širok $a = 2$ m in je za $h = 4$ m niže od traku ter $b = 1$ m proč od njega. V kakšnem območju se lahko spreminja hitrost traku (med v_1 in v_2), da pesek pada v lijak? (Glej zgornjo nalogo).



$v_1 = b(g/2h)^{1/2} = 1{,}1$ m/s
$v_2 = (a + b)(g/2h)^{1/2} = 3{,}3$ m/s

2.7. Z višine $h = 100$ m nad vodoravnimi tlemi vržemo telo poševno navzdol z začetno hitrostjo $v_0 = 10$ m/s pod kotom $\alpha = 30°$ glede na vodoravno smer. Kje je telo in kolikšna je njegova hitrost po času $t = 2$ s? Kdaj (t_1) in s kolikšno hitrostjo (v_1) pade na tla?



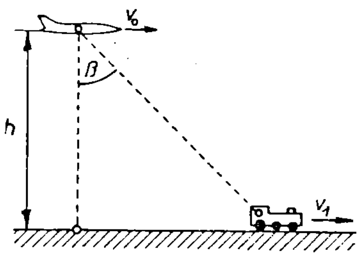
Koordinatno izhodišče postavimo na višino h, os y je usmerjena navzdol, os x pa v desno.

$x = v_0 t\cos\alpha = 17$ m
$y = v_0 t\sin\alpha + gt^2/2 = 30$ m
$v^2 = (v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha + gt)^2\quad,\quad v = 26$ m/s

Iz druge enačbe dobimo za $y = h$ kvadratno enačbo za $t = t_1$:

$t_1^2 + (2v_0\sin\alpha/g)t_1 - 2h/g = 0$
$t_1 = -v_0\sin\alpha/g + [(v_0\sin\alpha/g)^2 + 2h/g]^{1/2} = 4{,}0$ s
$v_1 = (v_0^2 + 2gh)^{1/2} = 45$ m/s

2.8. Bombnik leti na višini $h = 1000$ m s hitrostjo $v_0 = 300$ m/s v vodoravni smeri in hoče zadeti lokomotivo, ki vozi s hitrostjo $v_1 = 84$ km/h v enaki smeri. Kolik kot (β) mora črta letalo–lokomotiva oklepati z navpičnico v trenutku, ko naj letalec spusti bombo, da bo ta zadela lokomotivo?



$t = (2h/g)^{1/2}$ = čas padanja
$v_0 t = h\,\mathrm{tg}\beta + v_1 t$
$\mathrm{tg}\beta = (v_0 - v_1)t/h =$
$= (v_0 - v_1)(2/gh)^{1/2} = 3{,}95$
$\beta = 75{,}8°$

2.9. Balon se dviguje s stalno hitrostjo $v_1 = 2$ m/s. Na višini $h = 50$ m vržemo z balona kamen s hitrostjo $v_0 = 2$ m/s v vodoravni smeri. Po kolikšnem času (t) in kje (x) pade kamen na tla?

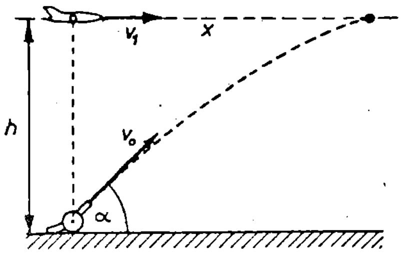
Kamen se začne gibati s hitrostjo v_0 v desno in s hitrostjo v_1 navzgor. Če koordinatno os y usmerimo navzdol, je:

$h = -v_1 t + gt^2/2$ in
$t = v_1/g + (v_1^2/g^2 + 2h/g)^{1/2} = 3{,}4$ s
$x = v_0 t = 6{,}8$ m

2.10. Letalo leti na višini $h = 2$ km s hitrostjo $v_1 = 720$ km/h v vodoravni smeri. V trenutku, ko je tik nad protiletalskim topom, izstreli top granato z začetno hitrostjo

$v_0 = 600$ m/s. Pod kakšnim kotom (α) glede na vodoravna tla mora ustreliti, da granata zadene letalo? Zračni upor zanemarimo.

Granata mora biti med dviganjem ves čas pod letalom, zato mora biti vodoravna projekcija njene hitrosti ($v_0 \cos \alpha$) enaka hitrosti letala:

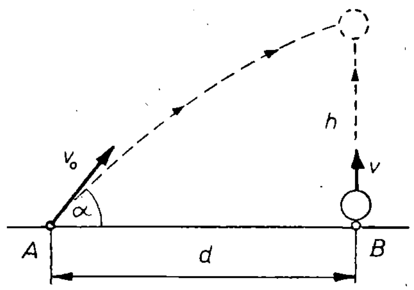


$v_0 \cos \alpha = v_1$ ali
$\cos \alpha = v_1/v_0 = 0{,}33$
$\alpha = 70{,}5°$

Granata zadene letalo, če je njena največja višina vsaj enaka višini letala. Torej mora veljati: $(v_0^2/2g) \sin^2 \alpha \geqslant h$ ali $v_0^2(1 - \cos^2\alpha) \geqslant 2gh$ ali $v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$.

2.11. Z mesta A izstrelimo puščico pod kotom $\alpha = 45°$ glede na vodoravna tla. Istočasno se začne z mesta B, ki je od A oddaljeno za $d = 200$ m, dvigati balon s stalno hitrostjo $v = 2$ m/s. Kolikšna mora biti začetna hitrost puščice (v_0), da puščica zadene balon?

Puščica zadene balon po času



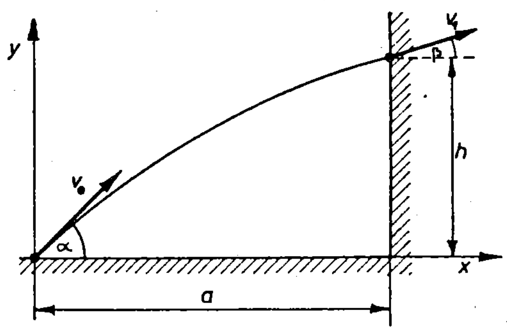
$t_1 = d/(v_0 \cos\alpha)$ na višini
$h = v_0 t_1 \sin\alpha - g t_1^2/2 = v t_1$
Sledi kvadratna enačba za v_0:

$v_0^2 \sin(2\alpha) - v_0\, 2v \cos\alpha - gd = 0$

Rešitev je:

$v_0 = [v + (v^2 + 2gd \operatorname{tg}\alpha)^{1/2}]/2 \sin\alpha$
$v_0 = 46$ m/s .

2.12. Od tal odvržemo kamen z začetno hitrostjo $v_0 = 10$ m/s pod kotom $\alpha = 45°$ glede na vodoravna tla. Kako visoko (h) nad tlemi zadene ob navpično steno, ki je oddaljena za $a = 3$ m? S kolikšno hitrostjo (v_1) in pod kakšnim kotom (β) udari ob steno?



$t_1 = a/(v_0 \cos\alpha)$
$h = v_0 t_1 \sin\alpha - g t_1^2/2$
$= a \operatorname{tg}\alpha - g a^2/(2 v_0^2 \cos^2\alpha)$
$h = 2{,}1$ m
$v_{1x} = v_0 \cos\alpha,\ v_{1y} = v_0 \sin\alpha - g t_1$
$v_1 = (v_{1x}^2 + v_{1y}^2)^{1/2} = 7{,}6$ m/s
$\operatorname{tg}\beta = v_{1y}/v_{1x},\quad \beta = 22°$

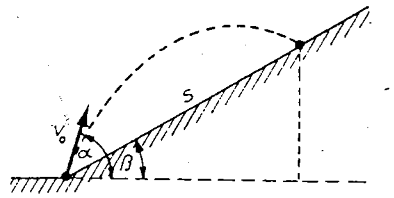
2.13. Od tal vržemo kamen z začetno hitrostjo $v_0 = 12$ m/s. Pod kakšnim kotom (α) glede na vodoravna tla ga moramo odvreči, da gre vodoravno skozi zanko, ki je na višini $h = 5$ m? Za koliko (a) mora biti zanka oddaljena od izhodišča v vodoravni smeri?

Zanka mora biti v najvišji točki krivulje leta:

$h = v_0^2 \sin^2\alpha/2g$ ali $\sin^2\alpha = 2gh/v_0^2$, $\alpha = 55{,}6°$
a = polovica dometa $= (v_0^2/g) \sin\alpha \cos\alpha = 6{,}8$ m

2.14. Z vznožja ravnega pobočja, ki je nagnjeno za $\beta = 30°$, vržemo telo z začetno hitrostjo $v_0 = 100$ m/s pod kotom $\alpha = 60°$ glede na vodoravno smer. Po kolikšnem času (t) in na kateri razdalji (s po pobočju) pade telo na pobočje? Pri katerem kotu (α_0) je ta razdalja največja?

$s \cos\beta = v_0 t \cos\alpha$
$s \sin\beta = v_0 t \sin\alpha - g t^2/2$



Zgornji enačbi delimo drugo z drugo in dobimo:

$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - gt/(2 v_0 \cos\alpha)$
ali $t = (2 v_0/g) \cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$
$t = 12$ s
$s = v_0 t \cos\alpha/\cos\beta =$
$= 2 v_0^2 \cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)/(g \cos\beta) = 680$ m

Največjo razdaljo s dobimo pri $\alpha = \alpha_0$, za katerega velja: $ds/d\alpha = 0$. Po krajšanju konstantnih parametrov preostane enačba:

$-2 \cos\alpha_0 \sin\alpha_0(\operatorname{tg}\alpha_0 - \operatorname{tg}\beta) + 1 = 0$ ali
$-2 \sin^2\alpha_0 + 2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \operatorname{tg}\beta + 1 = 0$

Ker je $\sin^2\alpha_0 = (1 - \cos 2\alpha_0)/2$, dobimo:

$\operatorname{tg}(2\alpha_0) = -\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}(90° + \beta)$ ali
$\alpha_0 = 45° + \beta/2 = 60°$

2.15. Pod kakšnim kotom (α_0) glede na vodoravno smer moramo izstreliti puščico z začetno hitrostjo $v_0 = 30$ m/s s $h = 20$ m visokega stolpa, da je njen domet na vodoravnih tleh največji?

(glej podobno nalogo 2.7.)

$h = -v_0 t \sin\alpha + g t^2/2$, t = čas leta puščice
$t^2 - (2 v_0 \sin\alpha/g) t - 2h/g = 0$
$t = v_0 \sin\alpha/g + [(v_0 \sin\alpha/g)^2 + 2h/g]^{1/2}$
$x = v_0 t \cos\alpha = (v_0^2/2g) \sin(2\alpha) + v_0 \cos\alpha(v_0^2 \sin^2\alpha/g^2 + 2h/g)^{1/2}$
$dx/d\alpha = 0$ za $\alpha = \alpha_0$
$\cos(2\alpha_0) = gh/(gh + v_0^2)$, $\alpha_0 = 40°$

2.16. Od tal odvržemo kamen z začetno hitrostjo $v_0 = 10$ m/s. Pod kakšnim kotom (α_0) glede na vodoravna tla ga moramo odvreči, da je domet največji? Kolikšen je ta največji domet (x_0) in kolikšna je največja višina (h_0) pri tem metu?

(Glej nalogo 2.14. za $\beta = 0$ ali nalogo 2.15. za $h = 0$)

Domet $= x = (v_0^2/g)\sin(2\alpha)$

Največji domet dobimo za $\sin(2\alpha_0) = 1$ ali $\alpha_0 = 45°$
Največji domet znaša:

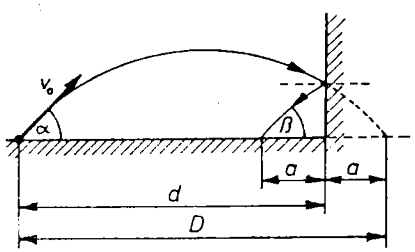
$x_0 = (v_0^2/g)\sin(2\alpha_0) = v_0^2/g = 10$ m

Višina pri tem metu je:

$h_0 = (v_0^2/2g)\sin^2\alpha_0 = v_0^2/4g = x_0/4 = 2{,}5$ m

2.17. Z razdalje $d = 1{,}5$ m od navpične stene vržemo od tal proti steni kamen z začetno hitrostjo $v_0 = 5$ m/s pod kotom $\alpha = 60°$ glede na vodoravna tla. Kamen se prožno odbije od stene. Kje (a od stene) pade na tla? S kolikšno hitrostjo (v_1) in pod kakšnim kotom (β) udari ob tla?

Krivulja leta se v navpični steni zrcali, kamen pade na tla pred steno na enaki oddaljenosti (a) od nje kot bi sicer padel na drugi strani stene (če seveda te ne bi bilo).



$a = x - d$
$a = (v_0^2/g)\sin(2\alpha) - d = 0{,}71$ m
$v_1 = v_0,\ \beta = \alpha$

2.18. Z najmanj kolikšno začetno hitrostjo (v_0) moramo zalučati disk, da preleti razdaljo $D = 52$ m na vodoravnem travniku?

Disk moramo zalučati pod metnim kotom $\alpha = 45°$, da je domet največji (gl. nalogo 2.16):

$D = v_0^2/g \quad , \quad v_0 = (Dg)^{1/2} = 23$ m/s

2.19. Granata odleti iz topa z začetno hitrostjo $v_0 = 200$ m/s pod kotom $\alpha = 45°$ glede na vodoravna tla. Na kolikšen čas mora biti tempirana, da eksplodira na višini $h = 10$ m pred padcem?

$h = v_0 \sin\alpha\, t - gt^2/2$
$t^2 - (2v_0 \sin\alpha/g)t + 2h/g = 0$
$t = (v_0/g)\sin\alpha \pm (v_0^2 \sin^2\alpha/g^2 - 2h/g)^{1/2}$

Negativni predznak korena ustreza dviganju granate mimo višine h, pozitivni pa padanju: $t_1 = 0{,}07$ s , $t_2 = 28{,}8$ s. Iskana rešitev je 28,8 s.

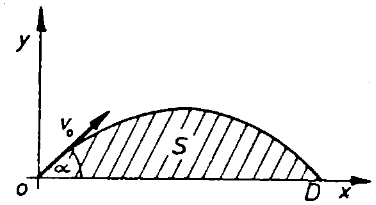
2.20. Bomba eksplodira na vodoravnih tleh, njeni deli odlete v vse smeri, najhitrejši ima hitrost $v_1 = 200$ m/s. Kako daleč (d) od mesta eksplozije je človek varen pred izstrelki?

Največji domet je pri kotu $\alpha = 45°$ (glej nalogo 2.16.):

$d = v_1^2/g = 4080$ m

2.21. Pod kakšnim kotom (α) glede na vodoravna tla moramo izstreliti dimno raketo, da je površina pod krivuljo leta največja?

$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - gx^2/(2v_0^2\cos^2\alpha)$
$S = \int_0^D y\,dx \quad , \quad D = (v_0^2/g)\sin(2\alpha)$
$S = (2v_0^4/3g^2)\sin^3\alpha\cos\alpha$
$dS/d\alpha = 0$
$3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha = 0$
$\sin^2\alpha = 3/4\ ,\ \alpha = 60°$

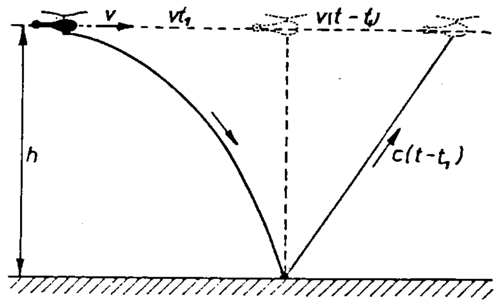


2.22. Z ladje, ki se giblje enakomerno s hitrostjo v_1, izstrelimo granato z začetno hitrostjo v_0 (glede na ladjo) pod kotom α glede na smer gibanja (α je merjen v navpični ravnini). Po kolikšnem času (t) in na kolikšni oddaljenosti (x) pade granata v vodo?

$t = 2v_0 \sin\alpha/g$ (neodvisno od hitrosti ladje)
$x = (v_0\cos\alpha + v_1)t - v_1 t = v_0 t\cos\alpha = (v_0^2/g)\sin(2\alpha)$

2.23. Helikopter leti na višini $h = 1{,}5$ km s hitrostjo $v = 30$ m/s v vodoravni smeri in spusti bombo. Čez koliko časa (t) zasliši pilot eksplozijo? Zvok potuje s stalno hitrostjo $c = 340$ m/s.

$t_1 = (2h/g)^{1/2}$ = čas padanja bombe.
$v^2(t - t_1)^2 + h^2 = c^2(t - t_1)^2$
$t = (2h/g)^{1/2} + h(c^2 - v^2)^{-1/2}$
$t = 22$ s

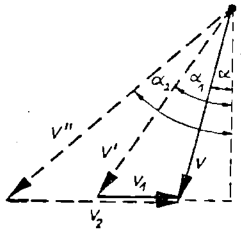


2.24. Skozi okno vozečega vlaka opazujemo enakomerno padanje dežnih kapljic. Če se vlak giblje s hitrostjo $v_1 = 40$ km/h, vidimo kapljice padati nazaj, pod kotom $\alpha_1 = 30°$

glede na navpičnico. Če pa vozi z večjo hitrostjo $v_2 = 80$ km/h, se kot padanja kapljic poveča na $\alpha_2 = 45°$. Kolikšna je hitrost (v) kapljic in pod kakšnim kotom (α) padajo glede na navpičnico?

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_1 = \vec{v}'' + \vec{v}_2$

$\vec{v}'$ in $\vec{v}''$ sta hitrosti kapljic glede na vozeči vlak.
S slike razberemo:

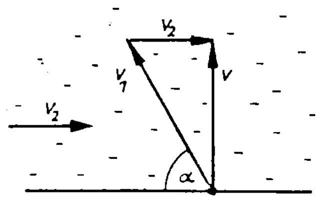


$v_1 + v \sin\alpha = v \cos\alpha \, \mathrm{tg}\alpha_1$
$v_2 + v \sin\alpha = v \cos\alpha \, \mathrm{tg}\alpha_2$

Iz obeh enačb izračunamo $v \cos\alpha\ (= a)$ in $v \sin\alpha\ (= b)$ in dobimo:

$a = (v_2 - v_1)/(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1)$
$b = (v_2\, \mathrm{tg}\alpha_1 - v_1\, \mathrm{tg}\alpha_2)/(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1)$
$\mathrm{tg}\alpha = b/a = 0{,}16$, $\alpha = 9°$
$v = (a^2 + b^2)^{1/2} = 96$ km/h

2.25. Z motornim čolnom, ki se glede na mirujočo vodo giblje s hitrostjo $v_1 = 4$ km/h, se peljemo prek reke (širina $d = 1$ km), ki teče s hitrostjo $v_2 = 2$ km/h. Pod kakšnim kotom (α) glede na breg reke moramo usmeriti čoln, da se vozimo pravokotno čez reko? Kolikšna je hitrost čolna (v) glede na breg? V kolikšnem času (t) dosežemo nasprotni breg?

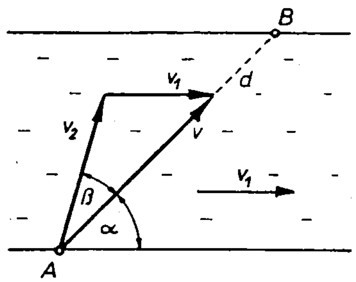


$\cos\alpha = v_2/v_1 = 0{,}5$
$\alpha = 60°$
$v = v_1 \sin\alpha = 3{,}5$ km/h
$t = d/v = 0{,}29$ h

2.26. Ladja vozi s hitrostjo $v_1 = 7{,}2$ km/h v smeri pravokotno na breg reke, ki je široka $d = 0{,}5$ km. Nasprotni breg doseže $x = 200$ m niže v smeri toka reke. Kolikšna je hitrost (v_0) reke in v kolikšnem času (t) prispe ladja do nasprotnega brega?

$t = d/v_1 = 250$ s, $v_0 = x/t = 0{,}8$ m/s

2.27. Z motornim čolnom želimo prepluti reko v smeri od mesta A do mesta B. Mesti A in B sta oddaljeni za $d = 400$ m in njuna veznica oklepa z bregom kot $\alpha = 45°$. S kolikšno hitrostjo (v_2 glede na reko) in v kateri smeri (β glede na veznico A–B) mora čoln pluti, da prevozi pot A–B v času $t = 2$ min? Reka teče s hitrostjo $v_1 = 2$ m/s.



$v = d/t$ = hitrost čolna glede na breg
S slike razberemo:

$v \cos\alpha = v_1 + v_2 \cos(\beta + \alpha)$
$v \sin\alpha = v_2 \sin(\beta + \alpha)$

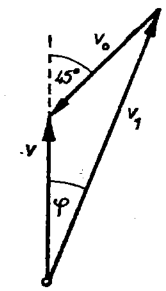
Prvo enačbo preuredimo in nato drugo delimo s prvo:

$\mathrm{tg}(\beta + \alpha) = v \sin\alpha/(v \cos\alpha - v_1)$,
$\beta = 36°$
$v_2 = v \sin\alpha/\sin(\beta + \alpha) = 2{,}4$ m/s

2.28. Čoln pluje s stalno hitrostjo $v_1 = 8$ km/h glede na vodo. Najprej pluje proti rečnemu toku od kraja A do kraja B, ki je na istem bregu reke in oddaljen za $d = 24$ km. Pri vračanju pluje z enako relativno hitrostjo v_1 glede na vodo in doseže kraj A po skupnem času $t = 8$ h? Kolikšna je hitrost (v_0) reke?

t_1 = čas plovbe proti rečnemu toku
t_2 = čas plovbe z rečnim tokom
$t = t_1 + t_2$
$d = (v_1 - v_0)t_1 = (v_1 + v_0)t_2$
$t = d/(v_1 - v_0) + d/(v_1 + v_0)$
$v_0 = (v_1^2 - 2dv_1/t)^{1/2} = 4$ km/h

2.29. S kolikšno hitrostjo (v_1) in pod kakšnim kotom (φ) glede na poldnevnik mora leteti letalo, da preleti pot $x = 300$ km proti severu v času $t = 1$ h, če istočasno piha severovzhodnik s hitrostjo $v_0 = 35$ km/h?



$v = x/t$ = hitrost letala glede na zemljo
$v \cos\varphi = v + v_0 \cos 45°$
$v_1 \sin\varphi = v_0 \sin 45°$

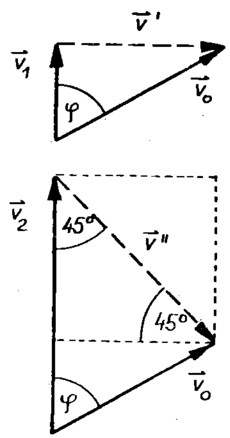
Enačbi delimo drugo z drugo:

$\mathrm{tg}\varphi = v_0 \sin 45°/(v + v_0 \cos 45°)$
$\varphi = 4{,}4°$

Zgornji enačbi kvadriramo in nato seštejemo:

$v_1 = (v_0^2 + v^2 + 2v_0 v \cos 45°)^{1/2} = 326$ km/h

2.30. Potniku na ladji, ki pluje proti severu s hitrostjo $v_1 = 20$ km/h, se zdi, da piha veter od zahoda. Če ladja poveča hitrost na $v_2 = 40$ km/h, piha veter v potnika s severozahoda. Kolikšna je hitrost vetra glede na morje (v_0) in s katere smeri (φ glede na poldnevnik) zares piha?



Dejanska hitrost vetra ($\vec{v}_0$) je vektorska vsota hitrosti ladje ($\vec{v}_1$ ali $\vec{v}_2$) in navidezne hitrosti ($\vec{v}'$ ali $\vec{v}''$) glede na ladjo:

$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}' = \vec{v}_2 + \vec{v}''$
$v_0 \cos\varphi = v_1$
$v_0 \sin\varphi + v_0 \cos\varphi = v_2$

Iz zgornjih enačb dobimo:

$\text{tg}\varphi = (v_2 - v_1)/v_1 = 1$, $\varphi = 45°$
$v_0 = v_1/\cos\varphi = 28$ km/h

Veter piha z jugozahoda.

2.31. Kolikšna je kotna hitrost Zemlje zaradi dnevnega vrtenja (ω_0)? S kolikšno kotno hitrostjo (ω_1) mora krožiti satelit okrog Zemlje, da jo obkroži v času t = 90 min?

$\omega_0 = 2\pi/24\text{h} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}/\text{s}$
$\omega_1 = 2\pi/t = 1{,}2 \cdot 10^{-3}/\text{s}$

2.32. Kolikšne so kotne hitrosti urnega (ω_u), minutnega (ω_m) in sekundnega (ω_s) kazalca ure? Dolžina minutnega kazalca je r_m = 2 cm, urnega pa r_u = 1,5 cm. Kolikšni hitrosti (v_m in v_u) imata konici teh kazalcev?

$\omega_u = 2\pi/(12 \cdot 3600\text{ s}) = 1{,}45 \cdot 10^{-4}/\text{s}$
$\omega_m = 1{,}75 \cdot 10^{-3}/\text{s}$, $\omega_s = 0{,}105/\text{s}$
$v_u = r_u\omega_u = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\text{m/s}$
$v_m = r_m\omega_m = 3{,}5 \cdot 10^{-5}\text{m/s}$

2.33. Kdaj (po času t od dvanajste ure) oklepata urna kazalca pravi kot?

V času t opiše minutni kazalec kot $\varphi_m = \omega_m t$, urni pa kot $\varphi_u = \omega_u t$. Razlika $\varphi_m - \varphi_u$ je 90° ali $\pi/2$.

$t = \pi/2(\omega_m - \omega_u) = 16{,}36$ min = 16 minut in 21,6 sekund

2.34. S kolikšno obodno hitrostjo (v) in kotno hitrostjo (ω) kroži Mesec okrog Zemlje? Obhodni čas je t = 27 dni, povprečna oddaljenost je r = 380.000 km.

$\omega = 2\pi/t = 2{,}7 \cdot 10^{-6}/\text{s}$
$v = \omega r = 1{,}0$ km/s

2.35. S kolikšno frekvenco (ν) se vrti avtomobilsko kolo (premer d = 50 cm), če se avtomobil giblje enakomerno s hitrostjo v = 72 km/h?

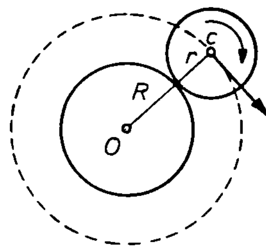
$v = \omega d/2 = \pi d\nu$, $\nu = v/\pi d = 13/\text{s}$

2.36. Jermenica elektromotorja ima premer d_1 = 10 cm in se vrti s frekvenco ν_1 = 300/min. Elektromotor prek jermena poganja stroj, ki ima jermenico s premerom d_2 = 70 cm. S kolikšno hitrostjo (v) se giblje jermen in s kolikšno frekvenco (ν_2) se vrti jermenica stroja?

$v = \omega_1 d_1/2 = \pi\nu_1 d_1 = 1{,}6$ m/s
$v = \pi\nu_2 d_2$, $\nu_2 = \nu_1 d_1/d_2 = \cancel{0{,}22/\text{s}}$ 0,71 /s

2.37. Na mizi leži kovanec s polmerom R. Ob njegovem obodu se kotali manjši kovanec s polmerom $r = R/m$ (m je celo število). Kolikokrat (n) se manjši kovanec zasuka okrog lastne osi, ko obide večji kovanec?

Središče malega kovanca se giblje po krogu s polmerom $r + R$ z obodno hitrostjo v_c, kar pomeni, da se vrti okrog lastne osi s kotno hitrostjo v_c/r oziroma z obhodnim časom $t_1 = 2\pi r/v_c$. Okrog večjega kovanca pride v času $t_0 = 2\pi\,(r + R)/v_c =$
$= (r + R)t_1/r = t_1(1 + m) = t_1 n$:



$n = m + 1$

Pri enakih kovancih (m = 1) je zasuk dvakraten.

2.38. Točkasto telo kroži enakomerno po krogu s polmerom r = 20 cm; v času t = 2 s opiše kot $\varphi = 3\pi$. Kolikšni sta kotna in obodna hitrost? Kolikšen lok (s) preteče točka v času t_1 = 10 s?

$\omega = \varphi/t = 1{,}5\pi/\text{s} = 4{,}7/\text{s}$
$v = r\omega = 0{,}3\pi\text{m/s} = 0{,}94$ m/s
$s = r\varphi(t_1) = r\omega t_1 = vt_1 = 3\pi$ m $= 9{,}4$ m

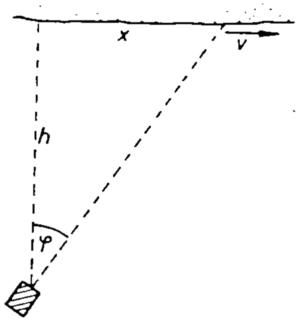
2.39. Izračunaj radialni pospešek teles na ekvatorju zaradi dnevnega vrtenja Zemlje. Za koliko odstotkov (p) je radialni pospešek (a_1) na zemljepisni širini φ = 10° manjši kot na ekvatorju?

$a_0 = R\omega_0^2 = 3{,}4 \cdot 10^{-2}\text{ m/s}^2 = 3{,}4\text{ cm/s}^2$
$a_1 = R\omega_0^2 \cos\varphi = a_0 \cos\varphi$
$p = (a_0 - a_1)/a_0 = 1 - \cos\varphi = 0{,}015 = 1{,}5\%$

2.40. Z največ kolikšno frekvenco (ν) se lahko vrti okrogla plošča s polmerom r = 12 cm, če radialni pospešek na njenem obodu ne sme preseči n = 20-kratne vrednosti težnega pospeška?

$a_r = r\omega^2 = 4\pi^2\nu^2 r = ng$
$\nu = (ng/4\pi^2 r)^{1/2} = 6{,}4/\text{s}$

2.41. Z žarometom svetimo na oblak, ki lebdi na višini h. Kako se hitrost svetlobne lise na oblaku spreminja s časom, če se svetlobni pramen žarometa vrti v navpični ravnini s stalno kotno hitrostjo ω?



$x = h\,\text{tg}\varphi = h\,\text{tg}(\omega t)$
$v = dx/dt = h\omega/\cos^2(\omega t)$

2.42. Okrogla plošča s polmerom $r = 15$ cm se vrti enakomerno pospešeno; v času $t = 3$ s naraste njena obodna hitrost od $v_1 = 2$ m/s na $v_2 = 2{,}3$ m/s. Kolikšen je tangentni pospešek na obodu plošče, kolikšen pa kotni pospešek?

$a_t = (v_2 - v_1)/t = 0{,}1 \text{ m/s}^2$
$\alpha = a_t/r = 0{,}67/\text{s}^2$

2.43. Točkasto telo kroži po krogu s polmerom $r = 20$ cm s stalnim tangnetnim pospeškom $a_t = 5 \text{ cm/s}^2$. Po kolikšnem času (t) od začetka gibanja (začetna hitrost je nič) je radialni pospešek enak tangentnemu?

$a_t = a_r = r\omega^2 = r(\alpha t)^2 = r(a_t t/r)^2 = (a_t t)^2/r$
$t = (r/a_t)^{1/2} = 2$ s

2.44. Točka kroži po krogu s polmerom $r = 5$ cm, njen radialni pospešek se s časom spreminja po enačbi: $a_r = At^4$, $A = 5 \cdot 10^{-4} \text{m/s}^6$. Kolikšen kot ($\varphi_1$) popiše radij točke v času $t_1 = 3$ s, če je začetna hitrost nič? Kolikšen je tangentni pospešek v trenutku $t_2 = 1$ min od začetka gibanja?

$a_r = r\omega^2$ ali $\omega = (a_r/r)^{1/2} = \mathrm{d}\varphi/dt$
$\mathrm{d}\varphi = \omega \mathrm{d}t$
$\varphi_1 = \int_0^{t_1} \omega \mathrm{d}t = (A/r)^{1/2} \int_0^{t_1} t^2 \mathrm{d}t = (A/r)^{1/2} t_1^3/3 = 0{,}9$ rad
$a_t = r\alpha = r\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = 2(Ar)^{1/2} t_2 = 0{,}6 \text{ m/s}^2$

2.45. Ventilator se vrti s frekvenco $\nu_0 = 900/\text{min}$. Ko izključimo motor, se ventilator vrti naprej enakomerno pojemajoče in se po $n = 75$ vrtljajih ustavi. Koliko časa se ustavlja?

$\omega = \omega_0 - \alpha t = 0 \quad , \quad \alpha t = \omega_0 = 2\pi\nu_0$
$\varphi = \text{n} \cdot 2\pi = \omega_0 t - \alpha t^2/2 = \omega_0 t - \omega_0 t/2 = \pi\nu_0 t$
$t = 2n/\nu_0 = 10$ s

2.46. Točkasto telo kroži na razdalji $r = 20$ cm okrog vrtišča tako, da se kot φ spreminja s časom po enačbi: $\varphi = At^2 + Bt$, $A = 0{,}5/\text{s}^2$, $B = 3/\text{s}$. Kako se s časom spreminjata radialni in tangentni pospešek? Po kolikšnem času (t_1) od začetka kroženja napravi telo $n = 10$ obratov?

$\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = 2At + B$
$a_r = r\omega^2 = r(2At + B)^2$
$a_t = r\alpha = r\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = 2Ar = 0{,}2 \text{ m/s}^2$
$\varphi(t_1) = At_1^2 + Bt_1 = n \cdot 2\pi$
$t_1^2 + (B/A)t_1 - 2\pi n/A = 0$
$t_1 = -(B/2A) + [(B/2A)^2 - 2\pi n/A]^{1/2} = 8{,}6$ s

2.47. Kolo s polmerom $r = 15$ cm se vrti okrog stalne osi enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom $\alpha = 3/\text{s}^2$. Kolikšna je kotna hitrost (ω) po času $t = 6$s, če je začetna kotna hitrost $\omega_0 = 2/\text{s}$? Kolikšen kot (φ) popiše radij kolesa v tem času? Kolikšen je celoten pospešek (a) točke na obodu kolesa v trenutku t?

$\omega = \omega_0 + \alpha t = 20/\text{s}$
$\varphi = \omega_0 t + \alpha t^2/2 = 66 \text{ rad} = 10{,}5$ polnih kotov
$a = (a_t^2 + a_r^2)^{1/2} = (r^2\alpha^2 + r^2\omega^4)^{1/2} = 60 \text{ m/s}^2$

2.48. Kolo se začne vrteti enakomerno pospešeno; po $n_1 = 10$ vrtljajih ima kotno hitrost $\omega_1 = 15/\text{s}$. Kolikšen je kotni pospešek? V kolikšnem času (t_2) napravi kolo $n_2 = 20$ vrtljajev?

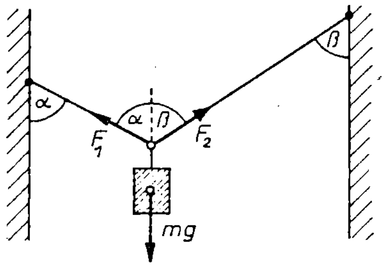
$\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi_1 = 2\alpha\varphi_1 = 2\alpha\, n_1 \cdot 2\pi$
$\alpha = \omega_1^2/(4n_1\pi) = 1{,}8/\text{s}^2$
$\varphi_2 = \alpha t_2^2/2\ ,\ t_2 = (2\varphi_2/\alpha)^{1/2} = (4\pi n_2/\alpha)^{1/2}$
$t_2 = (4\pi/\omega_1)(n_1 n_2)^{1/2} = 12$ s

2.49. Zasuk kolesa se spreminja s časom po enačbi: $\varphi = At + Bt^2 + Ct^3$ ($A = 4/\text{s}$, $B = 50/\text{s}^2$, $C = 800/\text{s}^3$). Za obod kolesa določi radialni, tangentni in celotni pospešek v trenutku $t = 0{,}1$ s. Polmer kolesa je $r = 10$ cm.

$\omega = d\varphi/\mathrm{d}t = A + 2Bt + 3Ct^2$
$v = r\omega = 3{,}8$ m/s , $a_r = r\omega^2 = v\omega = 144 \text{ m/s}^2$
$a_t = r\alpha = r\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = r(2B + 6Ct) = 58 \text{ m/s}^2$
$a = (a_r^2 + a_t^2)^{1/2} = 155 \text{ m/s}^2$

3. RAVNOVESJE SIL IN NAVOROV

3.1. Lahko vrv napnemo med vzporedni steni in nanjo obesimo utež z maso m. Vrv oklepa kot α z levo steno in kot β z desno. Kolikšni sta sili F_1 in F_2 v vrvi na obeh straneh uteži?

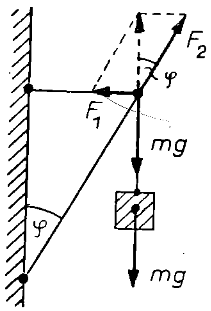


$F_1 \sin\alpha = F_2 \sin\beta$
$F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta = mg$

Iz obeh enačb izračunamo:

$F_1 = mg \sin\beta / \sin(\alpha + \beta)$
$F_2 = mg \sin\alpha / \sin(\alpha + \beta)$

3.2. Obesek z maso $m = 20$ kg je z lahkima drogovoma pritrjen v zid; naklonski kot podpornega droga glede na zid je $\varphi = 30°$. S kolikšnima silama F_1 in F_2 delujeta drogova na zid? Maso drogov zanemarimo v primerjavi z maso obeska.



Vodoravni drog vleče s silo F_1 iz zidu v desno, podporni drog pa potiska s silo F_2 poševno navzdol v zid. S slike je razvidno:

$F_1 = mg\,\mathrm{tg}\varphi = 113$ N
$F_2 = mg/\cos\varphi = 226$ N

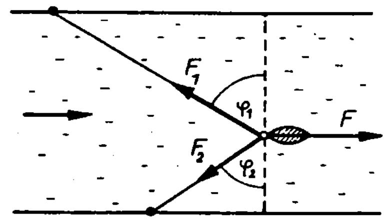
3.3. Čoln je z vrvema privezan na bregova reke, tako da v deroči vodi miruje. Naklonska kota vrvi glede na pravokotnico brega sta $\varphi_1 = 60°$ in $\varphi_2 = 30°$. Kolikšna je sila F_2 v krajši vrvi in s kolikšno silo F deroča reka odriva čoln, če je sila v daljši vrvi enaka $F_1 = 600$ N?

Računamo enako kot pri nalogi 3.1.:

$F_1 \cos\varphi_1 = F_2 \cos\varphi_2$
$F = F_1 \sin\varphi_1 + F_2 \sin\varphi_2$

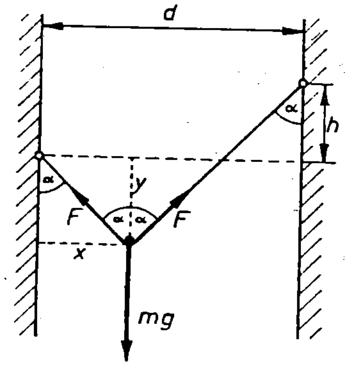
in dobimo:

$F_2 = 346$ N
$F = 693$ N



3.4. Vrv z dolžino $b = 15$ m je napeta med vzporedni steni (razmik med stenama je $d = 10$ m) tako, da je desni konec vrvi pritrjen za $h = 1$ m višje kot levi. Na vrvi je gibljiv škripec z bremenom (masa $m = 10$ kg). V kateri legi (x, y) se škripec umiri? Kolikšna je sila F v vrvi?

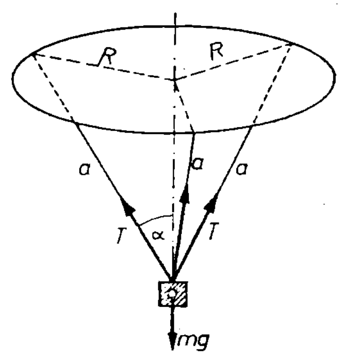
V ravnovesnem stanju sta naklonska kota vrvi ob stenah enaka (α) in enaki sta tudi sili v vrvi na obeh straneh škripca:



$2F \cos\alpha = mg$
$\sin\alpha = d/b,\ \alpha = 42°$
$F = mg/(2 \cos\alpha) = 66$ N
$y = (b \cos\alpha - h)/2 = 5{,}1$ m
$x = y\,\mathrm{tg}\alpha = (d - h\,\mathrm{tg}\alpha)/2$
$x = 4{,}6$ m

3.5. Na stropu je nameščen okrogel obroč s polmerom $R = 25$ cm. Na obroču so v enakih razmikih pritrjene tri enako dolge nitke ($a = 50$ cm). Prosti konci nitk so privezani na utež. Največ kolikšna sme biti masa (m) uteži, da se niti ne pretrgajo, če je vsaka nit lahko obremenjena največ s silo $T = 200$ N?

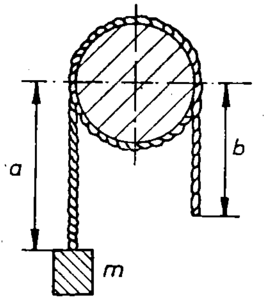
$3T \cos\alpha = mg$
$\cos\alpha = (a^2 - R^2)^{1/2}/a$
$m = (3T/g)(1 - R^2/a^2)^{1/2}$
$m = 53$ kg



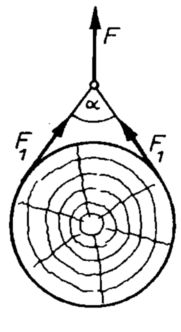
3.6. Vrv navijemo ($n = 2{,}5$ krat) okrog vodoravno položenega droga. Na en viseč konec vrvi (dolžina $a = 1$ m) pritrdimo utež z maso $m = 50$ kg. Kolikšna mora biti dolžina (b) drugega visečega konca vrvi, da utež miruje? Masa na enoto dolžine vrvi je μ, statični torni koeficient med vrvjo in drogom je $k_s = 0{,}25$.

(Glej Visokošolska fizika I, str. 39):

$(m + a\mu)g = b\mu g \exp(n \cdot 2\pi k_s)$
$b = (a + m/\mu)\exp(-2\pi n k_s)$
$b = 0{,}51$ m



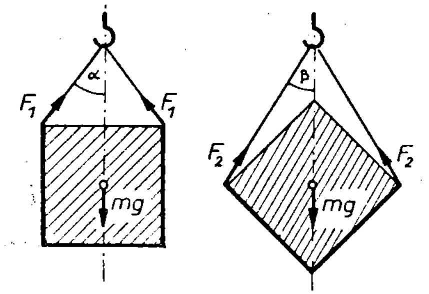
3.7. Vodoravno položen hlod povežemo z jekleno žico, kot kaže slika. Pri katerem kotu α je natezna sila v stranskih žicah večja kot v navpični žici?



$2F_1\cos(\alpha/2) = F$
$F_1 = F/[2\cos(\alpha/2)] > F$ ali
$\cos(\alpha/2) < 1/2$, $\alpha > 120°$

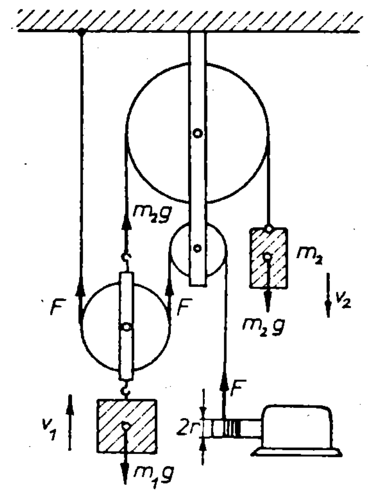
3.8. Vodoravno položen hlod (masa m = 100 kg) s kvadratnim prerezom (stranica a = 20 cm) je prepasan z vrvjo (dolžina b = 1 m), ki visi na kljuki žerjava. Kolikšna je sila v vrvi, če so stranice hlodovega prereza vodoravne oz. navpične (F_1), in kolikšna (F_2), če so pod kotom 45°?

$mg = 2F_1\cos\alpha$
$\sin\alpha = a/(b - 3a) = 0{,}5$
$\alpha = 30°$
$F_1 = mg/(2\cos\alpha) = 566$ N
$mg = 2F_2\cos\beta$
$\sin\beta = a\sqrt{2}/(b - 2a) = 0{,}47$
$\beta = 28°$
$F_2 = mg/(2\cos\beta) = 555$ N



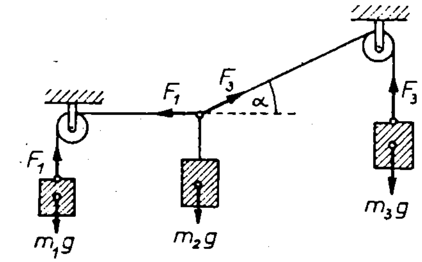
3.9. Dvigalo z maso m_1 = 200 kg in protiutež z maso m_2 = 80 kg sta zvezana z osjo elektromotorja, kot kaže slika. Motor se vrti s stalno frekvenco ν = 50/s tako, da se dvigalo dviga. Kolikšni sta hitrosti dvigala (v_1) in protiuteži (v_2), če je polmer motorne gredi r = 2 cm? S kolikšnim navorom (M) mora motor vrteti gred, da je hitrost stalna? Trenje zanemarimo.

$2F + m_2g = m_1g$
$F = (m_1 - m_2)g/2$
$M = rF = (m_1 - m_2)gr/2$
$M = 12$ Nm
$v_1 = v_2 = r\omega/2 = \pi\nu r$
$= \pi$ m/s



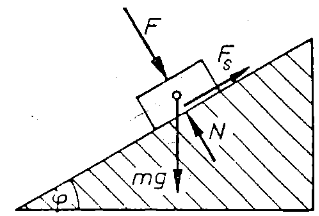
3.10. Tri telesa z masami m_1, m_2 = 10 kg in m_3 = 18 kg povežemo z vrvjo in obesimo prek dveh škripcev, kot kaže slika. Kolikšna je masa m_1, če je vrv med telesoma m_1 in m_2 vodoravna? Kolik je kot α?

$F_1 = m_1g$, $F_3 = m_3g$,
$F_1 = F_3\cos\alpha$,
$m_2g = F_3\sin\alpha$
$\sin\alpha = m_2/m_3 = 5/9$,
$\alpha = 34°$
$\cos\alpha = m_1/m_3$
$m_1 = m_3\cos\alpha = (m_3^2 - m_2^2)^{1/2} = 15$ kg



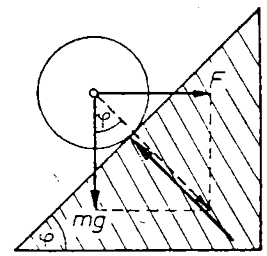
3.11. Telo z maso m = 40 kg položimo na klanec z naklonskim kotom φ = 45°. Z najmanj kolikšno silo (F) moramo pritiskati na telo v smeri pravokotno na klanec, da telo ne drsi navzdol po klancu? Statični torni koeficient med telesom in klancem je k_s = 0,1.

$F + mg\cos\varphi = N$
$F_s = k_sN = mg\sin\varphi$
$N = (mg/k_s)\sin\varphi$
$F = mg(\sin\varphi/k_s - \cos\varphi)$
$F = 2{,}5$ kN



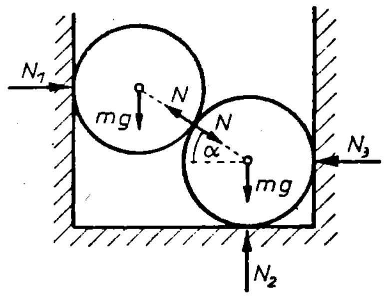
3.12. Valj z maso m = 1 kg položimo na gladek klanec, ki je nagnjen za kot φ = 30°. S kolikšno silo (F) moramo vleči skozi središče valja v vodoravni smeri, da valj na klancu miruje? Trenje med valjem in klancem zanemarimo.

$F = mg\,\mathrm{tg}\varphi = 5{,}7$ N



3.13. Enaki valjasti cevi ležita v vodoravnem pravokotnem žlebu, kot kaže slika. Masa ene cevi je $m = 100$ kg, kot α je 30°. S kolikšnimi silami (N_1, N_2 in N_3) pritiskata cevi na gladke stene žleba?

Pogoj ravnovesja sil nastavimo za vsako cev posebej:

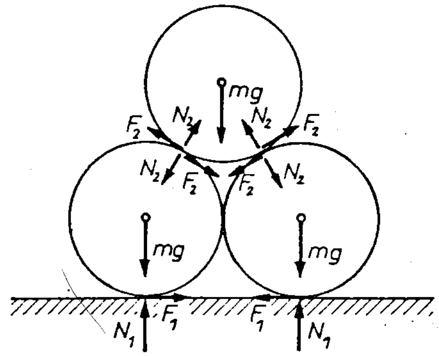


Zgornja cev:
$mg = N \sin\alpha$
$N = mg/\sin\alpha = 2\,mg$
$N_1 = N \cos\alpha = mg \operatorname{ctg}\alpha$
$N_1 = 1{,}70$ kN

Spodnja cev:
$mg + N \sin\alpha = N_2 = 2\,mg = 1{,}96$ kN
$N_3 = N \cos\alpha = N_1 = 1{,}70$ kN

3.14. Trije enaki valji so položeni v kupu na vodoravnih tleh, kot kaže slika. Najmanj kolikšen mora biti statični torni koeficient (k_s) med valji in tlemi, da valji mirujejo?

Pogoj ravnovesja nastavimo za zgornji valj in za enega od spodnjih valjev (zaradi simetrije).



Zgornji valj:
$2N_2 \cos 30° + 2F_2 \sin 30° = mg$
$F_2 = k_s N_2$
$N_2 = mg/(k_s + \sqrt{3})$

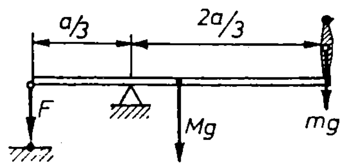
Spodnji valj:
$N_1 = N_2 \cos 30° + F_2 \sin 30° + mg$
$N_1 = 3\,mg/2$
$N_2 \sin 30° = F_2 \cos 30° + F_1$
$F_1 = k_s N_1$

Zgornjo enačbo delimo z $N_2 \sin 30°$ in dobimo kvadratno enačbo za k_s:

$1 = k_s\sqrt{3} + 3\,k_s(k_s + \sqrt{3})$ ali
$k_s^2 + (4/\sqrt{3})k_s - 1/3 = 0$
$k_s = 0{,}14$

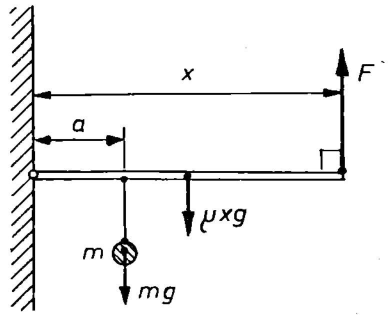
3.15. Skakalna deska z maso $M = 80$ kg je podprta na tretjini svoje dolžine. Na koncu daljšega dela deske stoji skakalec z maso $m = 60$ kg. Krajši del deske je z vrvjo privezan na tla. Kolikšna je sila F v vrvi, če skakalec na deski miruje?

Ravnovesje navorov glede na vodoravno os skozi pritrdišče:



$mg\,2a/3 + Mg\,a/6 = F\,a/3$
$F = 2mg + Mg/2 = 1{,}57$ kN

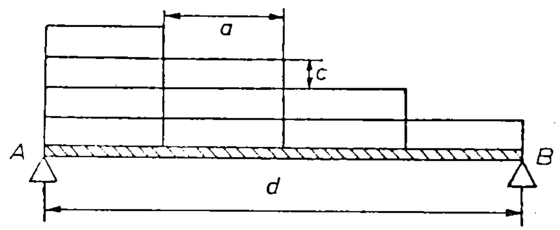
3.16. Palica je vrtljivo pritrjena v zid; masa na enoto dolžine palice je μ. Na razdalji a od zidu je na palico obešena utež z maso m. Na prostem koncu palice deluje navpična sila F, ki drži palico v vodoravni legi. Pri kateri dolžini (x) palice je ta sila najmanjša?



$mga + \mu xg\,x/2 = Fx.$
$F = amg/x + \mu gx/2$
$dF/dx = 0 = -amg/x^2 + \mu g/2$
$x = (2am/\mu)^{1/2}$

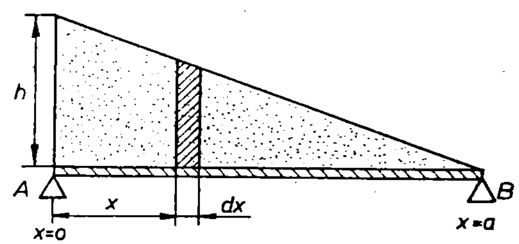
3.17. Na obeh koncih podprta vodoravna deska (dolžina d) je naložena z opeko, kot kaže slika. Dolžina opeke je $a = d/4$, širina je b, višina je c; gostota snovi je ϱ. Kolikšna sta navora (M_A in M_B) glede na vodoravno os skozi podporni točki?

$m = abc\varrho$ = masa kosa opeke
$M_A = mg(4\,a/2 + 3\,3a/2 + 2\,5a/2 + 7\,a/2) = 15\,mga$
$M_B = mg(a/2 + 2\,3a/2 + 3\,5a/2 + 4\,7a/2) = 25\,mga$

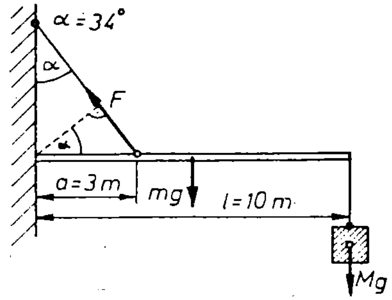


3.18. Naloga je podobna prejšnji, le da je deska obtežena s kupom peska, katerega višina (y) se spreminja z razdaljo x po enačbi $y = h(1 - x/a)$. Širina kupa je c, gostota peska je ϱ.

m = masa peska = $\varrho ahc/2$
$M_A = g \int x\,dm = g\varrho ch \int_0^a x(1 - x/a)dx$
$M_A = g\varrho cha^2/6 = mga/3$
$M_B = g \int (a - x)dm$
$M_B = g\varrho c(h/a) \int_0^a (a^2 + x^2 - 2ax)dx$
$M_B = 2\,mga/3$



3.19. Drog z dolžino l = 10 m in maso m = 40 kg je z jekleno žico pritrjen v zid, kot kaže slika. Na koncu droga je obešeno breme z maso M = 200 kg. S kolikšno silo F je napeta žica? Maso žice zanemarimo.

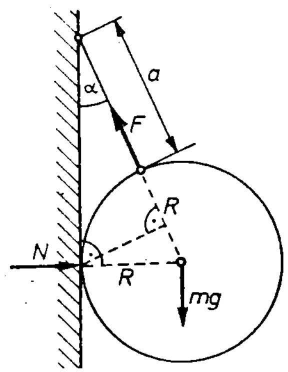


Zadostuje pogoj za ravnovesje navorov:

$Mg\,l + mg\,l/2 = Fa \cos \alpha$
F = 8,7 kN

3.20. Krogla z maso m = 4 kg in polmerom R = 5 cm je privezana na vrv (dolžina a = 20 cm), katere drugi konec je pritrjen na gladek navpičen zid. S kolikšno silo (N) pritiska krogla pravokotno na zid? Kolikšna je sila (F) v vrvi?

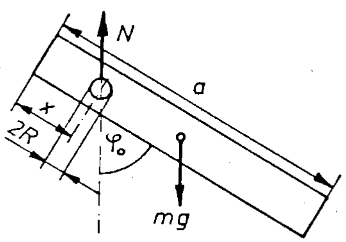
Rezultanta med silo F in težo mg krogle mora biti nasprotno enaka sili N, torej mora biti pravokotna na zid. Sledi:



$F \sin\alpha = N$
$F \cos\alpha = mg$
$\sin\alpha = R/(a + R)$, α = 11,5°
$N = mg \operatorname{tg}\alpha$ = 8,0 N
$F = mg/\cos \alpha$ = 40 N

3.21. Ravnilo z dolžino a = 1 m ima na razdalji x = 5 cm od začetka luknjico s polmerom R = 2 cm, skozi katero potisnemo okrogel svinčnik. Vodoravno položen svinčnik počasi vrtimo, da se ravnilo dviga. Pri katerem kotu φ_0 ravnilo zdrsne ob svinčniku? Statični torni koeficient med svinčnikom in ravnilom je k_s = = 0,9.

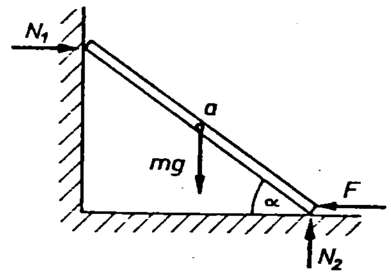
Ravnilo zdrsne, ko se navor teže ravnila izenači z navorom statične torne sile:



$mg(a/2 - x)\sin\varphi_0 = Rk_sN = Rk_smg$
$\sin\varphi_0 = 2Rk_s/(a - 2x)$ = 0,04
φ_0 = 2,3°

3.22. Palica z maso m = 6 kg in dolžino a = 2 m je naslonjena na gladek zid. S kolikšno silo (F) moramo potiskati spodnji konec palice v vodoravni smeri, da palica oklepa kot s tlemi α = 45°? Trenje zanemarimo. S kolikšnima silama (N_1 in N_2) pritiska palica ob zid in tla?

$mg = N_2$ = 59 N
$F = N_1$

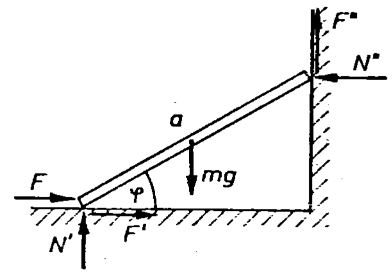


Ravnovesje navorov glede na vodoravno os skozi spodnje dotikališče palice zahteva enačbo:

$mg(a/2) \cos\alpha = N_1 a \sin\alpha$
$N_1 = mg/(2 \operatorname{tg}\alpha)$ = 29 N
F = 29 N

3.23. Spodnji konec homogene palice (dolžina = 2 m, masa m = 20 kg) leži na vodoravnih tleh, zgornji konec je prislonjen ob navpičen zid tako, da palica oklepa s tlemi kot φ = 30°. V kakšnem razponu (med F_1 in F_2) se lahko spreminja potisna sila F, ki pritiska spodnji konec palice v vodoravni smeri, da palica ne zdrsne? Statični torni koeficient med palico in tlemi oziroma zidom je k_s = 0,4.

Spodnjo mejo F_1 potisne sile F dobimo, če palica zdrsne v levo (proč od zidu), zgornjo (F_2) pa, če zdrsne v desno. Na sliki je označen prvi primer:



$F_1 + F' - N'' = 0$, $F' = k_sN'$
$N' - mg + F'' = 0$, $F'' = k_sN''$
$mg(a/2)\cos\varphi - N''a \sin\varphi - F''a \cos\varphi$ $= 0$

Iz zgornjih enačb eliminiramo N' in N'' ter izračunamo F_1:

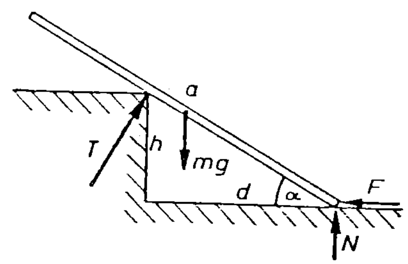
$F_1 = (mg/2)(\cos\varphi - k_s \sin\varphi)/(\sin\varphi + k_s \cos\varphi) - mgk_s/2$ = 38 N

V drugem primeru ima torna sila nasprotno smer. Izraz za F_2 dobimo, če v izrazu za F_1 spremenimo predznak tornega koeficienta:

$F_2 = (mg/2)(\cos\varphi + k_s\sin\varphi)/(\sin\varphi - k_s\cos\varphi) + mgk_s/2$ = 720 N

3.24. Palica z maso m = 5 kg in dolžino a = 3 m je naslonjena na stopnico z višino h = 1 m tako, da je njen spodnji konec oddaljen od stopnice za $d = \sqrt{2}$ m. S kolikšno silo (F) moramo potiskati spodnji konec palice v vodoravni smeri, da je palica v ravnovesju? Trenje zanemarimo. Sila stopnice pritiska pravokotno na palico.

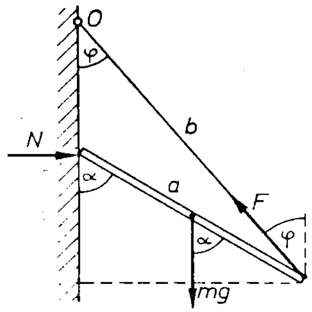
$F = T \sin\alpha$
$N + T \cos\alpha = mg$
$N = mg - F \operatorname{ctg}\alpha$



Ravnovesje navorov glede na vodoravno os skozi dotikališče palice s stopnico zahteva enačbo:

$Nd = Fh + mg[(h^2 + d^2)^{1/2} - a/2]\cos\alpha$
kjer je $\cos\alpha = d(h^2 + d^2)^{-1/2}$
$F = (mg/2)ahd(h^2 + d^2)^{-3/2} = 20\ \text{N}$

3.25. Palica se s prostim koncem naslanja ob navpičen zid. Drug konec palice je z vrvico privezan na zgornji del zidu, kot kaže slika. Pri katerem kotu α je palica v ravnovesju? Trenje zanemarimo.

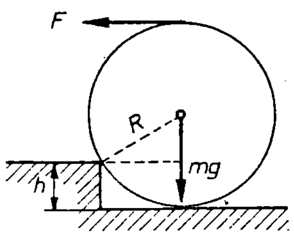


$N = F\sin\varphi = mg\,\mathrm{tg}\varphi$
$mg = F\cos\varphi$

Ravnovesje navorov glede na vodoravno os skozi viseči konec palice da enačbo:

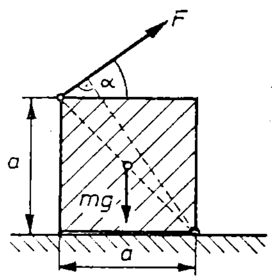
$Na\cos\alpha = mg(a/2)\sin\alpha$ ali
$N = (mg/2)\mathrm{tg}\alpha = mg\,\mathrm{tg}\varphi$
$\mathrm{tg}\alpha = 2\,\mathrm{tg}\varphi$

3.26. Čez stopnico z višino $h = 5$ cm želimo zakotaliti valj z maso $m = 100$ kg in polmerom $R = 40$ cm. V ta namen pritrdimo na obod valja vrv. Z najmanj kolikšno silo (F) moramo vleči vrv v vodoravni smeri, da se valj dvigne čez stopnico?



$F(2R - h) = mg[R^2 - (R - h)^2]^{1/2}$
$F = mg(2Rh - h^2)^{1/2}/(2R - h)$
$F = 253\ \text{N}$

3.27. Kockast zaboj z maso $m = 100$ kg vlečemo s silo $F = 40$ N tako, da drsi zaboj enakomerno po tleh. Največ kolik sme biti naklonski kot vrvi (α), da se zaboj ne prevrne?

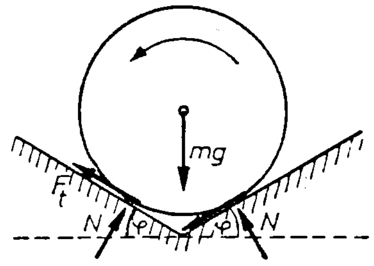


Navor teže zaboja glede na vodoravno os skozi spodnji desni rob mora biti večji od navora vlečne sile:

$mga/2 \geqslant Fa\sqrt{2}\sin(\alpha + 45°)$
$\alpha \leqslant 15°$

3.28. V trikotnem vodoravnem žlebu leži valj z maso $m = 100$ kg in polmerom $R = 20$ cm. Naklonski kot strani žleba glede na tla je $\varphi = 30°$, torni koeficient med valjem in žlebom je $k_t = 0{,}4$. S kolikšno silo (F) moramo potiskati valj v vzdolžni smeri, da drsi po žlebu enakomerno? S kolikšnim navorom (M) ga moramo vrteti okrog geometrijske osi, da se vrti enakomerno?

Drsenje valja v žlebu:

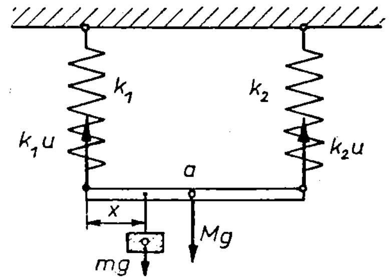


$2N\cos\varphi = mg$
$N = mg/(2\cos\varphi)$
$F_t = k_tN$
$F = 2F_t = k_tmg/\cos\varphi = 453\ \text{N}$

Vrtenje valja:

$M = 2F_tR = FR = 91\ \text{Nm}$

3.29. Palica (dolžina a in masa M) je na konceh pritrjena na prožni vzmeti (k_1 in k_2), ki visita s stropa. Kam (x od vzmeti k_1) moramo na palico obesiti utež z maso m, da je palica v ravnovesju vodoravna? Maso vzmeti zanemarimo.



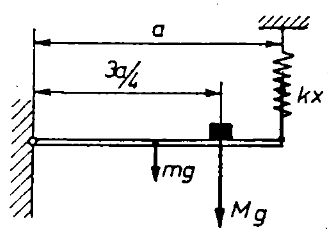
Palica je vodoravna, če se vzmeti (ki sta enako dolgi) zaradi tež palice in uteži za enako raztegneta (npr. za u):

$k_1u + k_2u = mg + Mg$
$u = g(M + m)/(k_1 + k_2)$

Enačbo za ravnovesje navorov nastavimo glede na vodoravno os skozi težišče palice:

$k_1ua/2 = k_2ua/2 + mg(a/2 - x)$
$x = [2k_2am + (k_2 - k_1)Ma]/[2m(k_2 + k_1)]$

3.30. Drog z maso $m = 2$ kg je na eni strani vrtljivo vpet v zid. Na tri četrtine dolžine droga od vrtišča pritrdimo na drog utež z maso $M = 4$ kg, na prosti konec droga pa prožno vzmet s konstanto $k = 2$ kN/m. Za koliko (x) moramo vzmet raztegniti navzgor, da drog miruje v vodoravni legi?

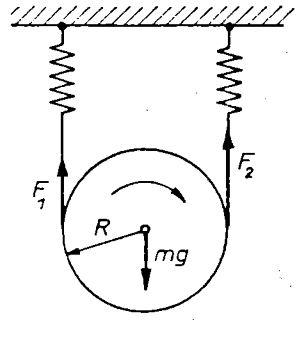


$kx\,a = Mg\,3a/4 + mg\,a/2$
$x = (g/4k)(3M + 2m)$
$x = 2\ \text{cm}$

3.31. Kolo s polmerom $R = 20$ cm je pritrjeno na vodoravno os motorja in leži v jermenu, katerega konca sta prek dinamometrov pritrjena na strop. Če os miruje, kaže vsak dinamometer silo $F_0 = 58$ N. Koliko kažeta dinamometra (F_1 in F_2), če se os vrti enakomerno? Drsni torni koeficient med jermenom in osjo je $k_t = 0{,}2$. Kolik je navor (M) osi motorja?

$mg = 2F_0 = F_1 + F_2$
$F_2 = F_1\exp(k_t\pi)$
(gl. Visokošolska fizika I, str. 39)

$F_1 = 2F_0/[1 + \exp(k_t\pi)]$
$F_1 = 40$ N
$F_2 = 76$ N
$M = (F_2 - F_1)R = 7{,}0$ Nm



3.32. Vzvod (dolžina $a = 20$ cm, masa $m = 0{,}2$ kg) in prožna vzmet (konstanta prožnosti $k = 2{,}0$ N/m) sta pritrjena na valj (polmer $R = 5$ cm), ki je vrtljiv okrog vodoravne geometrijske osi. Vzmet je raztegnjena za toliko (x_0), da je drog vodoraven. Kolikšno utež (masa M) moramo obesiti na konec vodoravnega droga, da se ta zasuče za kot $\varphi = 60°$? Za koliko (x) se pri tem raztegne vzmet?

Prva ravnovesna lega:

$kx_0R = mga/2$

Druga ravnovesna lega:

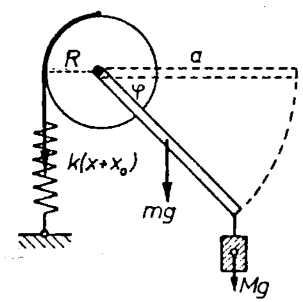
$k(x_0 + x)R = mg(a/2)\cos\varphi + Mga\cos\varphi$

Od druge enačbe odštejemo prvo in dobimo:

$kxR = mg(a/2)(\cos\varphi - 1) + Mga\cos\varphi$

Velja še: $x = R\varphi = R\pi/3$, zato je:

$M = [kR^2\varphi + mga(1 - \cos\varphi)/2]/(ag\cos\varphi) = 0{,}1$ kg
$x = 5{,}2$ cm



3.33. Zaradi povešenih ležajev drsijo vrata po tleh. Najmanj kolikšna sila (F) je potrebna, da vrata odpremo? Masa vrat je $m = 15$ kg, širina je $a = 1$ m, drsni torni koeficient je $k_t = 0{,}6$.

Vrata odpremo z navorom:

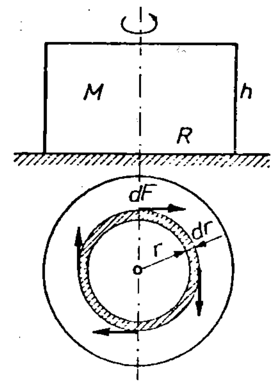
$M = \int dM$, kjer je $dM = xk_tgdm$, $dm = (m/a)dx$
$M = (mgk_t/a)\int_0^a x dx = mgk_ta/2$

Najmanjša sila zadostuje, če vrata primemo na koncu, to je na razdalji a od ležajev, tako da je $M = aF$ ali

$F = mgk_t/2 = 44$ N.

3.34. Valj s polmerom R, višino h in maso m leži na vodoravni podlagi. Najmanj kolik navor je potreben, da zavrtimo valj okrog njegove geometrijske osi? Torni koeficient med valjem in podlago je k_t.

Valj v mislih razrežemo na koaksialne valjaste plasti in izračunamo navor dM za vsako plast posebej:

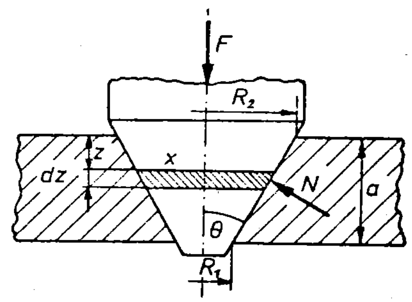


$dM = rdF = r\,k_tgdm$
$= r\,k_tg\,2\pi rh\varrho\,dr$
$dM = 2\pi\varrho ghk_tr^2dr$
$M = \int dM = 2\pi\varrho ghk_t\int_0^R r^2dr$
$M = 2mgk_tR/3$

3.35. Stožčast konec vrtilne osi je v koničastem ležaju; večji polmer ležaja je R_2, manjši R_1, kot ob vrhu stožca je 2θ. Kolikšen navor (M) je potreben, da se os vrti s stalno kotno hitrostjo, če os pritiska na ležaj s silo F v smeri osi? Predpostavimo enakomerno porazdelitev sile F po stični ploskvi osi in ležaja. Torni koeficient je k_t.

$N\sin\theta = F$
$F_t = k_tN = k_tF/\sin\theta$
S = stična ploskev =
$= \pi(R_1 + R_2)a/\cos\theta$
a = debelina ležaja

Stično ploskev razdelimo na koaksialne trakove in izračunamo navore diferencialnih sil za vsak trak posebej:



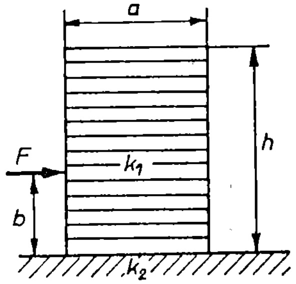
$dM = x\,dF_t = x(F_t/S)\,2\pi xdz/\cos\theta$, $x = R_2 - z\,\mathrm{tg}\theta$
$M = \int dM = [2F_t/a(R_1 + R_2)]\int_0^a (R_2 - z\,\mathrm{tg}\theta)^2dz$
$M = (2/3)F_t\,(R_2^3 - R_1^3)/(R_2^2 - R_1^2)$

3.36. Tanke kvadrataste jeklene plošče (stranica $a = 10$ cm) so naložene v kup z višino $h = 25$ cm. Kup potiskamo s silo F v vodoravni smeri, da drsi s stalno hitrostjo. Največ kolikšna sme biti višina (b) prijemališča potisne sile, da posamezne plošče ne drsijo druga ob drugi in da se kup ne prevrne? Statični torni koeficient med ploščami je $k_1 = 0{,}3$, drsni torni koeficient med ploščami in tlemi pa $k_2 = 0{,}2$.

Plošče ne podrsavajo, če je statična torna sila med sosednjima ploščama na višini b večja od potisne sile:

$k_1(h - b)a^2\varrho g > F$

Potisna sila F je pri enakomernem drsenju celotnega kupa enaka torni sili: $F = F_t = k_2mg$ (m = masa kupa) $= k_2ha^2\varrho g$. Sledi pogoj:



$b < h(1 - k_2/k_1) = 8{,}3$ cm

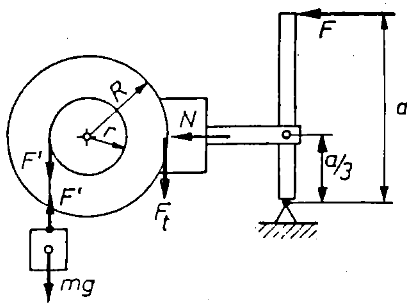
Kup se med drsenjem ne prevrne, če je navor potisne sile manjši od navora teže kupa:

$Fb < mga/2$ ali $b < a/(2k_2) = 25$ cm

Obema pogojema je torej zadoščeno, če je $b < 8{,}3$ cm.

3.37. Kolo s polmerom $R = 50$ cm je pritrjeno na vodoravno valjasto gred (polmer $r = 10$ cm), ki je vpeta v ležaje. Okrog gredi je navita vrv, na kateri visi tovor z maso $m = 500$ kg. Vrtenje kolesa zavira zavora, ki je zgrajena iz lesene klade in vzvoda z dolžino $a = 2$ m. S kolikšno vodoravno silo (F) moramo tiščati vzvod na njegovem prostem koncu, da viseča utež pada s stalno hitrostjo? Drsni torni koeficient med kolesom in klado je $k_t = 0{,}6$.

Pogoj za enakomerno padanje uteži: $F' = mg$



Pogoj za enakomerno vrtenje kolesa:
$F'r = F_tR = k_tNR$ ali
$N = rmg/k_tR$

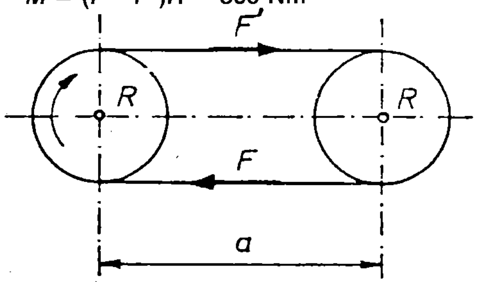
Enačba vzvoda: $Fa = Na/3$ ali
$F = mgr/(3k_tR)$
$F = 540$ N

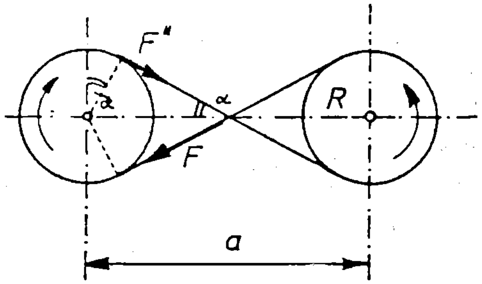
3.38. Jermen je napeljan okrog dveh enakih jermenic (polmer $R = 10$ cm), katerih vzporedni osi sta razmaknjeni za $a = 30$ cm. Največ kolikšen navor (M) lahko prenesemo z ene jermenice na drugo, če je statični torni koeficient med jermenom in jermenico enak $k_s = 0{,}3$ in če jermen prenese največ silo $F = 4$ kN? Kaj pa, če jermen navijemo v obliki osmice?

Prvi primer: $F = F'\exp(\pi k_s)$, $M = (F - F')R = FR[1 - \exp(-\pi k_s)] = 244$ Nm

Drugi primer: $F = F''\exp[k_s(\pi + 2\alpha)]$, $\sin\alpha = R/a$, $\alpha = 41{,}8°$

$M = (F - F'')R = 300$ Nm





4. GRAVITACIJSKA SILA

4.1. Na kateri višini (h) nad zemeljskim površjem je težni pospešek $n = 4$ krat manjši kot na površju. Polmer Zemlje je $R = 6370$ km.

$g = g_0R^2/(R + h)^2$, $g_0 = 9{,}81$ m/s^2 = pospešek na površju Zemlje
$g = g_0/n$
$h = R(\sqrt{n} - 1) = R = 6370$ km

4.2. Na kateri višini (h) nad zemeljskim površjem kroži satelit okrog Zemlje s hitrostjo $v = 5$ km/s?

Satelit kroži na oddaljenosti $r = R + h$ od središča Zemlje z radialnim pospeškom $a_r = v^2/r$, ki je enak težnemu pospešku $g = g_0R^2/r^2$:

$v^2/(R + h) = g_0R^2/(R + h)^2$ ali
$h = g_0R^2/v^2 - R = 9{,}7 \cdot 10^3$ km

4.3. Z najmanj kolikšno začetno hitrostjo (v_0) mora odleteti raketa z zemeljskega površja navpično navzgor, da se dvigne do višine $h = 2000$ km? Upor zraka zanemarimo.

Raketa se dviga pojemajoče s pojemkom $g = g_0R^2/r^2$:

$dv = a\,dt = -g_0R^2r^{-2}dt = -g_0R^2r^{-2}dr(dt/dr)$

Ker je $v = dr/dt$, dobimo:

$v\,dv = -g_0R^2r^{-2}dr$

Enačbo integriramo, na desni od $r = R = 6370$ km do $r = R + h$, na levi pa od v_0 do 0 (raketa se na višini h ustavi):

$v_0^2/2 = g_0R^2[1/R - 1/(R + h)]$ ali

$v_0 = \sqrt{2g_0Rh/(R + h)} = 5{,}5$ km/s

4.4. Meteor se z velike oddaljenosti približuje Zemlji. Kolikšna je njegova hitrost (v) na višini h = 500 km nad površjem Zemlje, če predpostavimo, da se je začel približevati brez začetne hitrosti? Vpliv drugih nebesnih teles in upor zraka zanemarimo.

Uporabimo integral iz prejšnje naloge, le da integriramo od $r = \infty$ (kjer je $v = 0$), do $r = R + h$:

$$\int_0^v v\,dv = -\int_\infty^{R+h} g_0 R^2 r^{-2} dr$$
$$v^2/2 = g_0 R^2/(R + h)$$
$$v = \sqrt{2g_0R^2/(R + h)} = 10{,}8 \text{ km/s}$$

Meteor bi padel na zemeljsko površje ($h = 0$) z drugo kozmično hitrostjo $v_2 = (2g_0R)^{1/2}$ = 11,4 km/s.

4.5. Koliko časa (t_0) potrebuje Lunin modul, da obkroži Luno na višini h = 2000 m nad njenim površjem? Težni pospešek na Luni je g_0 = 2 m/s², polmer Lune je R = 1600 km. Gravitacijski vpliv Zemlje in Sonca zanemarimo. (Glej nalogo 4.2.)

$$a_r = r\omega^2 = r(2\pi/t_0)^2 = g = g_0R^2/r^2,\ r = R + h$$
$$t_0 = (2\pi/R)(R + h)^{3/2}g_0^{-1/2} \approx 2\pi(R/g_0)^{1/2} = 1.56 \text{ h}$$

4.6. S pomočjo podatkov o težnem pospešku na površju Zemlje g_0 = 9,81 m/s² in polmera Zemlje R = 6370 km oceni maso Zemlje (M).

Teža telesa z maso m je enaka gravitacijski sili, s katero Zemlja privlačuje telo na njenem površju:

$mg_0 = GmM/R^2$ $\quad G$ = gravitacijska konstanta = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²
$M = R^2g_0/G = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg

4.7. Oceni maso Sonca in njegovo povprečno gostoto s pomočjo tehle podatkov: obhodni čas Zemlje okrog Sonca je t = 365 dni, povprečna oddaljenost med njima je $r = 1{,}5 \cdot 10^8$ km, zorni premer Sonca je $\alpha = 0{,}5°$.

$GM_sM/r^2 = Mr\omega^2 = Mr(2\pi/t)^2$ $\quad M$ = masa Zemlje
$\quad M_s$ = masa Sonca

$$M_s = (2\pi/t)^2r^3/G = 2{,}0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$
$$M_s = 4\pi R^3\varrho/3$$
$R/r \approx \alpha/2$, R = polmer Sonca
$$\varrho = 6M_s/(\pi\alpha^3r^3) = 1{,}7 \text{ kg/dm}^3$$

4.8. Luna ima n = 81-krat manjšo maso ter m = 3,7-krat manjši polmer kot Zemlja. Kolikokrat je težni pospešek (g_L) na površju Lune manjši kot na Zemlji?

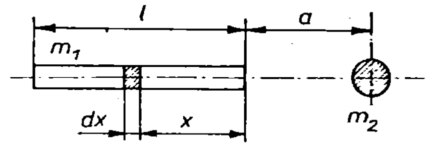
$$g_L = Gm_L/R_L^2 = G(m_Z/n)(m/R_Z)^2 = g_Zm^2/n$$
$$g_Z/g_L = n/m^2 = 6{,}1$$

4.9. Na katerem mestu (na oddaljenosti x od Lune) privlači Luna telo enako močno kot Zemlja? Glej podatke pri prejšnji nalogi. Luna in Zemlja sta povprečno oddaljeni za r = 384 000 km.

$$Gm_Lm/x^2 = Gm_Zm/(r - x)^2$$
$$r - x = x(m_Z/m_L)^{1/2} = 9x$$
$$x = r/10 = 38\,400 \text{ km}$$

4.10. Kroglica z maso m_2 leži v isti premici s tanko homogeno palico (dolžina l, masa m_1), od najbližjega konca palice je oddaljena za a. S kolikšno gravitacijsko silo se privlačujeta?

Palico v mislih razrežemo na tanke (diferencialne) koščke z dolžino dx. Košček z mesta x ima maso $dm = (m_1/l)dx$ in privlačuje kroglico s silo:



$$dF = Gm_2dm/(a + x)^2$$
$$= Gm_2(m_1/l)(a + x)^{-2}dx$$
$$F = \int dF$$
$$F = Gm_2(m_1/l)\int_0^l (a + x)^{-2}dx$$
$$F = Gm_2m_1/a(a + l)$$

4.11. Naloga je podobna prejšnji, le da je kroglica m_2 na simetrali palice, za a oddaljena od njene sredine.

Tokrat so posamezne diferencialne sile dF, izvirajoče od posameznih koščkov dm, različno usmerjene in upoštevamo le projekcijo na smer simetrale:

$$dF_y = dF\cos\alpha = dF\,a/r$$
$$F = \int dF_y = Gm_2(m_1/l)\int_{-l/2}^{+l/2} r^{-2}\cos\alpha\,dx$$

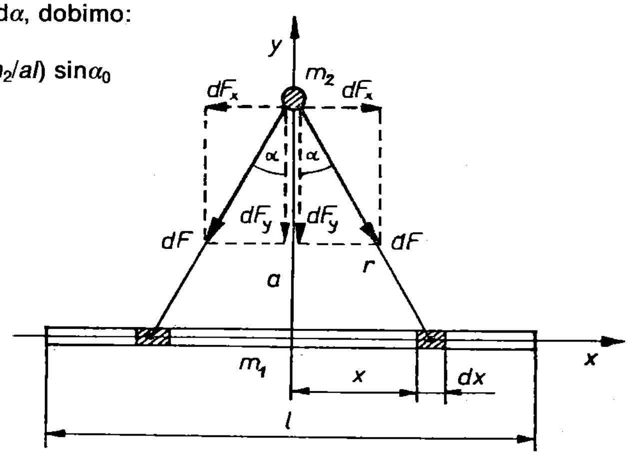
Ker je $x = a\,\mathrm{tg}\alpha$ in $dx = (a/\cos^2\alpha)d\alpha$, dobimo:

$$F = Gm_2(m_1/l)\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\cos\alpha\,d\alpha = (2Gm_1m_2/al)\sin\alpha_0$$

Mejni kot α_0 je določen z enačbo $\sin\alpha_0 = l(l^2 + 4a^2)^{-1/2}$.

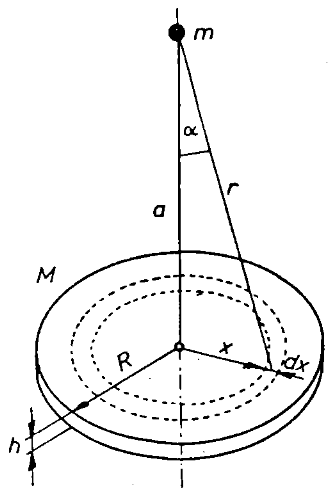
$$F = (2Gm_1m_2/a)(l^2 + 4a^2)^{-1/2}$$

Za $l \ll a$ dobimo $F = Gm_1m_2/a^2$, kot da bi palica bila točkasto telo. Za $l \gg a$ pa dobimo silo med točkastim telesom m_2 in neskončno dolgo palico: $F = G_2\mu/a$, kjer je μ masa na enoto dolžine palice.



4.12. S kolikšno gravitacijsko silo se privlačujeta okrogla plošča z maso M in polmerom R ter kroglica z maso m, ki je na simetrali plošče, za a oddaljena od sredine plošče?

Ploščo v mislih razrežemo na koncentrične kolobarje s širino dx. Kolobar s polmerom x ima maso $dM = (M/\pi R^2)dS = (M/\pi R^2) \cdot 2\pi x dx = (2M/R^2)x dx$ in privlačuje kroglico s silo $dF = Gm(dM/r^2)\cos\alpha$ v smeri simetrale.



$\cos\alpha = a/r$
$x = a\,\mathrm{tg}\alpha$, $dx = (a/\cos^2\alpha)d\alpha$
$F = \int dF = (2GmM/R^2)\int_0^{\alpha_0}\sin\alpha d\alpha$
$\cos\alpha_0 = a(a^2 + R^2)^{-1/2}$
$F = (2GmM/R^2)[1 - a(a^2 + R^2)^{-1/2}]$

Za $R \ll a$ lahko zapišemo $(a^2 + R^2)^{-1/2} = (1/a)(1 - R^2/2a^2 + ...)$ in dobimo: $F = GmM/a^2$, kar velja za točkasta telesa.

Za $R \gg a$ pa dobimo gravitacijsko silo med kroglico in neskončno veliko ploščo:

$F = 2GmM/R^2 = 2Gm\pi\sigma$

kjer je $\sigma = M/(\pi R^2)$, ploskovna gostota mase plošče.

5. SILA IN POSPEŠEK PRI PREMEM GIBANJU

5.1. Sili $F_1 = 30$ N in $F_2 = 10$ N učinkujeta v nasprotnih smereh na telo z maso $m = 20$ kg. V kateri smeri se telo giblje pospešeno in kolik je pospešek (a)? Kolikšna je hitrost (v_1) po času $t_1 = 10$ s od začetka delovanja sil, če je telo tedaj mirovalo? Kolikšno pot (x_1) naredi telo v tem času? V trenutku t_1 preneha delovati močnejša sila F_1. Kako se telo giblje naprej? Kje (na razdalji x_2 od izhodišča) in kdaj (po času t_2 od začetka) se telo ustavi? Po kolikšnem času (t_3 od začetka) spet doseže izhodišče?

Telo se giblje pospešeno v smeri močnejše sile F_1 s pospeškom $a = (F_1 - F_2)/m = 20\text{ N}/20\text{ kg} = 1\text{ m/s}^2$

$v_1 = at_1 = 10$ m/s
$x_1 = at_1^2/2 = 50$ m

Telo se giblje naprej enakomerno pojemajoče s pojemkom $a_1 = F_2/m = 0{,}5\text{ m/s}^2$. Ustavi se po času $t' = v_1/a_1 = 20$ s od začetka pojemanja oziroma po času $t_2 = t_1 + t' = 30$ s od začetka gibanja, na razdalji $x_2 = x_1 + a_1t'^2/2 = 50\text{ m} + 100\text{ m} = 150$ m od izhodišča. Po ustavitvi se giblje nazaj do izhodišča enakomerno pospešeno s pospeškom a_1, ki ga doseže po času t'' od ustavitve:

$x_2 = a_1t''^2/2$ ali $t'' = (2x_2/a_1)^{1/2} = 24$ s
$t_3 = t_2 + t'' = 54$ s

5.2. S kolikšno silo (F) moramo potiskati telo z maso $m = 50$ kg, da napravi pot $x = 100$ m v času $t = 10$ s? Začetna hitrost je nič. Trenje zanemarimo.

$x = at^2/2$, $a = 2x/t^2$
$F = ma = 2mx/t^2 = 100\text{ kgm/s}^2 = 100$ N

5.3. S kolikšno silo (F) moramo vleči sani z maso $m = 100$ kg pod kotom $\alpha = 35°$ glede na vodoravna tla, da drsijo s pospeškom $a = 0{,}5\text{ m/s}^2$? Drsni torni koeficient med sanmi in podlago je $k_t = 0{,}1$.

$F\cos\alpha - F_t = ma$, $F_t = k_tN$
$F\sin\alpha + N - mg = 0$

Eliminiramo N in dobimo:

$F = m(a + k_t g)/(\cos\alpha + k_t \sin\alpha) = 170$ N.

5.4. Dvigalo z maso $m = 8$ t se spušča s hitrostjo $v_0 = 450$ m/min. Obešeno je na vrv, ki je lahko obremenjena največ s silo $F = 140$ kN. Na najmanj kolikšni razdalji zaviranja (x) se dvigalo lahko ustavi?

Med enakomernim spuščanjem je sila v vrvi enaka teži dvigala (mg), med pojemanjem pa se ta sila poveča za ma. Največji pojemek je zato dan z enačbo: $F = mg + ma$ ali $a = (F - mg)/m = 7{,}7$ m/s^2. Pot x ustavljanja izračunamo iz enačbe: $v^2 = v_0^2 - 2ax = 0$ ali $x = v_0^2/2a = 3{,}7$ m.

5.5. Na strop dvigala pritrdimo $b = 40$ cm dolgo prožno vzmet in nanjo obesimo utež (masa m). Med enakomernim spuščanjem dvigala je vzmet dolga $x_0 = 50$ cm. Če se dvigalo dviga enakomerno pospešeno, pa se vzmet podaljša na $x_1 = 55$ cm. Kolik je pospešek (a_1) dviganja?

Med enakomernim padanjem se vzmet raztegne za toliko ($x_0 - b$), da je sila raztegnjene vzmeti enaka teži uteži: $k(x_0 - b) = mg$ ali $k = mg/(x_0 - b)$. Med pospešenim dviganjem pa se sila v vzmeti poveča za ma_1:

$k(x_1 - b) = k(x_0 - b) + ma_1 = mg + ma_1$
$a_1 = g[(x_1 - b)/(x_0 - b) - 1] = g(x_1 - x_0)/(x_0 - b)$
$a_1 = g/2 = 5$ m/s^2

5.6. S kolikšnim pospeškom drsi telo navzdol po klancu z nagibom $p = 5\%$, če je drsni torni koeficient $k_t = 0{,}02$? V kolikšnem času predrsa pot $s = 600$ m, če je v začetku mirovalo?

$a = g(\sin\varphi - k_t \cos\varphi)$
$p = \mathrm{tg}\varphi = 0{,}05 \approx \varphi$
$a \approx g(\varphi - k_t) = 0{,}03\,g = 0{,}3$ m/s^2
$s = at^2/2, \quad t = 63$ s

5.7. Smučar zapelje s hitrostjo $v_0 = 15$ m/s v klanec z naklonskim kotom $\varphi = 25°$. Na kolikšni višini (h od vznožja klanca) se ustavi? Drsni torni koeficient je $k_t = 0{,}1$.

Smučar drsi navzgor enakomerno pojemajoče s pojemkom:

$a = g(\sin\varphi + k_t\cos\varphi) = 5{,}0$ m/s^2

Ustavi se po poti $s = at^2/2 = v_0^2/2a$ oziroma po višinski razliki $h = s\sin\varphi = (v_0^2/2a)\sin\varphi = 9{,}5$ m

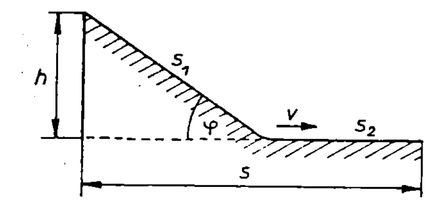
5.8. Telo porinemo z začetno hitrostjo $v_1 = 20$ m/s v klanec z naklonskim kotom $\varphi = 30°$. Po kolikšnem času (t) in s kolikšno hitrostjo (v_2) se vrne? Drsni torni koeficient je $k_t = 0{,}2$.

Enakomerno pojemajoče dviganje s pojemkom $a_1 = g(\sin\varphi + k_t\cos\varphi) = 6{,}6$ m/s^2 traja čas $t_1 = v_1/a_1 = 3{,}0$ s. Telo se ustavi na poti $s = v_1^2/2a_1 = 30$ m.

Enakomerno pospešeno drsenje s pospeškom $a_2 = g(\sin\varphi - k_t\cos\varphi) = 3{,}2$ m/s^2 traja čas $t_2 = v_2/a_2 = (2s/a_2)^{1/2} = 4{,}3$ s.
$v_2 = a_2 t_2 = 14$ m/s
$t = t_1 + t_2 = 3{,}0$ s $+ 4{,}3$ s $= 7{,}3$ s

5.9. Sani začno drseti z vrha klanca, z višine h nad vodoravnimi tlemi. Kolik je drsni torni koeficient (k_t) med sanmi in podlago (klancem in tlemi), če se sani ustavijo na vodoravni oddaljenosti s od starta? Spremembo hitrosti ob prelomu klanca zanemarimo.

Sani drsijo navzdol po klancu s pospeškom $a = g(\sin\varphi - k_t\cos\varphi)$, kjer je $\sin\varphi = h/s_1$ in $\cos\varphi = (s - s_2)/s_1$. Do dna klanca pridrsijo s hitrostjo $v = (2as_1)^{1/2}$. Naprej se gibljejo enakomerno pojemajoče s pojemkom $k_t g$. Ustavijo se na vodoravni razdalji s_2, tako da je $v^2 = 2k_t g s_2 = 2as_1$ ali



$k_t s_2 = s_1(\sin\varphi - k_t\cos\varphi) = h - k_t(s - s_2)$
$k_t = h/s$

5.10. Velik balon, ki ima s tovorom vred maso $M = 500$ kg, pada enakomerno pospešeno s pospeškom $a = 0{,}2$ m/s^2. Kolikšno breme (masa m) moramo odvreči, da se balon dviga enakomerno pospešeno s pospeškom a? Upor zraka zanemarimo.

Pospešeno padanje: $Mg - F = Ma, \quad F =$ vzgon
Pospešeno dviganje: $F - (M - m)g = (M - m)a$
Enačbi seštejemo in dobimo: $mg = (2M - m)a$ ali

$m = 2aM/(a + g) = 20$ kg

5.11. Telo (masa $m_1 = 10$ kg) je z vrvjo zvezano z drugim telesom (masa $m_2 = 30$ kg). S kolikšnim pospeškom (a) se telesi gibljeta po vodoravni podlagi, če desno telo m_2 vlečemo v desno s stalno silo $F = 20$ N? S kolikšno silo (F_1) je napeta vrv? Trenje zanemarimo.

Newtonov zakon za telo m_1:

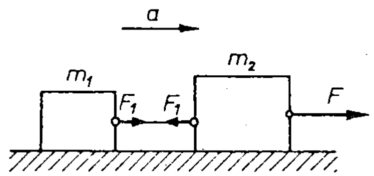
$F_1 = m_1 a$

za telo m_2:

$F - F_1 = m_2 a$

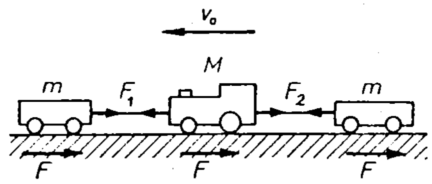
Enačbi seštejemo in dobimo:

$a = F/(m_1 + m_2) = 0{,}5$ m/s^2
$F_1 = m_1 F/(m_1 + m_2) = 5$ N



5.12. Vlak je sestavljen iz lokomotive (masa $M = 30\ t$) in dveh vagonov (masa enega $m = 20\ t$); lokomotiva je na sredini. Pri hitrosti $v_0 = 72$ km/h blokiramo vsa kolesa, tako da na vsak vagon in lokomotivo deluje enaka zaviralna sila $F = 28$ kN. Kolikšna sila (F_1) deluje med prvim vagonom in lokomotivo in kolikšna (F_2) med lokomotivo ter zadnjim vagonom?

Vagona in lokomotiva se gibljejo z enakim pojemkom a:



$$a = (F + F_1)/m$$
$$= (F - F_1 + F_2)/M$$
$$= (F - F_2)/m$$

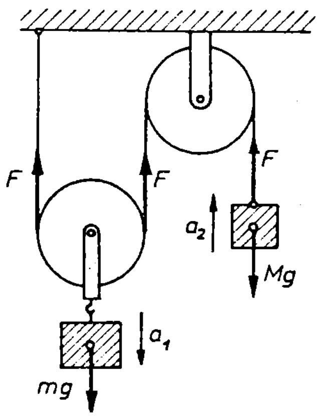
Sledi:

$$F_2 = -F_1 = F(M - m)/(M + 2m) = 4\ \text{kN}$$

5.13. Z začetno hitrostjo $v_0 = 5$ m/s porinemo voziček navzgor v klanec, katerega nagib je $\varphi = 11{,}5°$. Čez koliko časa se voziček pripelje nazaj? Trenje zanemarimo. (Glej nalogo 5.8.)

Voziček se bilje navzgor enakomerno pojemajoče s pojemkom $g \sin\varphi$; ustavi se po času $t_1 = v_0/(g \sin\varphi)$. Navzdol se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom $g \sin\varphi$; dno klanca doseže po enakem času t_1. Nazaj se pripelje po času $t = 2t_1 = 2v_0/(g \sin\varphi) = 5{,}1$ s.

5.14. Dvigalo (masa $m = 200$ kg) in protiutež (masa $M = 80$ kg) sta povezana, kot kaže slika. S kolikšnim pospeškom (a_1) se giblje dvigalo in s kolikšnim (a_2) protiutež? Trenje in vrtenje škripcev zanemarimo. Kolikšna je sila (F) v vrvi?



Če se protiutež dvigne za x, se dvigalo spusti za $x/2$, torej velja: $a_2 = 2a_1$.

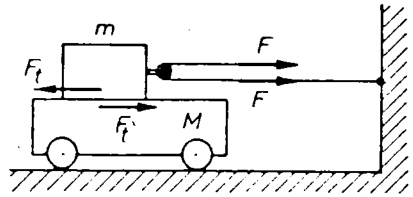
$$mg - 2F = ma_1$$
$$F - Mg = Ma_2 = 2Ma_1$$

Iz enačb izračunamo:

$$a_1 = (m - 2M)g/(m + 4M) = 0{,}75\ \text{m/s}^2$$
$$a_2 = 2a_1 = 1{,}50\ \text{m/s}^2$$
$$F = 3mMg/(m + 4M) = 900\ \text{N}$$

5.15. Na vozičku z maso $M = 150$ kg leži utež z maso $m = 25$ kg. Drsni torni koeficient med utežjo in vozičkom je $k_t = 0{,}2$. Prek škripca vlečemo utež s silo $F = 100$ N v vodoravni smeri. S kolikšnim pospeškom (a_1) se giblje utež in s kolikšnim (a_2) voziček? .

Utež vlečeta oba konca vrvi s silo $2F$, zavira pa drsna torna sila $F_t = k_t mg$:

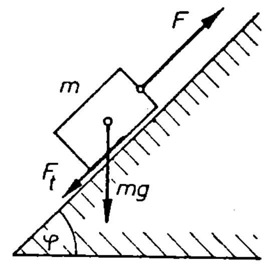


$$2F - k_t mg = ma_1 \text{ ali}$$
$$a_1 = 2F/m - k_t g = 6{,}0\ \text{m/s}^2$$

Voziček pospešuje v desno drsna torna sila $F_t = k_t mg$, zato je:

$$k_t mg = Ma_2 \text{ ali}$$
$$a_2 = k_t mg/M = 0{,}33\ \text{m/s}^2$$

5.16. Na klancu z naklonskim kotom $\varphi = 45°$ leži zaboj z maso $m = 30$ kg. S kolikšno silo (F) moramo vleči zaboj navzgor po klancu, da naredi pot $x = 10$ m v času $t = 10$ s? Drsni torni koeficient je $k_t = 0{,}05$.



Iz poti in časa izračunamo pospešek drsenja navzgor: $a = 2x/t^2 = 0{,}2\ \text{m/s}^2$.

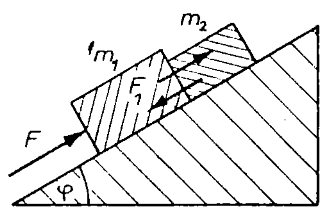
$$F - mg \sin\varphi - F_t = ma\ ,\ F_t = k_t N = k_t mg \cos\varphi$$
$$F = ma + mg(\sin\varphi + k_t \cos\varphi) = 224\ \text{N}$$

5.17. Sila $F = 150$ N potiska telesi z masama $m_1 = 30$ kg in $m_2 = 15$ kg navzgor v klanec z naklonskim kotom $\varphi = 5°$. Drsni torni koeficient med telesoma in klancem je $k_t = 0{,}2$. Kolik je pospešek (a) teles? S kolikšno silo (F_1) potiska spodnje težje telo zgornje telo pred seboj?

Enačba Newtonovega zakona dinamike za spodnje telo:

$$F - F_1 - F_{t1} - m_1 g \sin\varphi = m_1 a\ ,\ F_{t1} = k_t m_1 g \cos\varphi$$

za zgornje telo:



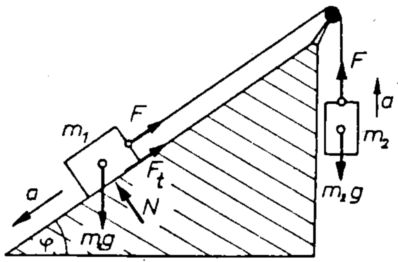
$$F_1 - F_{t2} - m_2 g \sin\varphi = m_2 a\ ,\ F_{t2} = k_t m_2 g \cos\varphi$$

Zgornji enačbi seštejemo, da izpade F_1, in dobimo:

$$a = F/(m_1 + m_2) - g(\sin\varphi + k_t \cos\varphi) = 0{,}53\ \text{m/s}^2$$
$$F_1 = m_2 F/(m_1 + m_2) = 50\ \text{N}$$

5.18. Na klancu z naklonskim kotom $\varphi = 30°$ leži telo ($m_1 = 200$ kg), ki je z vrvjo prek škripca na vrhu klanca povezano z visečim telesom ($m_2 = 50$ kg). Drsni torni koeficient med telesom in klancem je $k_t = 0{,}2$. S kolikšnim pospeškom (a) se gibljeta telesi? Kolikšna je sila (F) v vrvi?

Telesi se gibljeta z enako velikim pospeškom a. Recimo, da se viseče telo m_2 dviguje, telo m_1 pa spušča. Če dobimo za pospešek a pozitiven rezultat, smo pravilno uganili smer gibanja, drugače pa je smer nasprotna. Nastavimo enačbo dinamike za vsako telo posebej:



$$m_1g\sin\varphi - F - k_t m_1 g\cos\varphi = m_1a$$
$$F - m_2g = m_2a$$

Enačbi seštejemo in dobimo:

$$a = [m_1(\sin\varphi - k_t\cos\varphi) - m_2]g/(m_1 + m_2) = 0{,}6\ \mathrm{m/s^2}$$
$$F = m_2(g + a) = 520\ \mathrm{N}$$

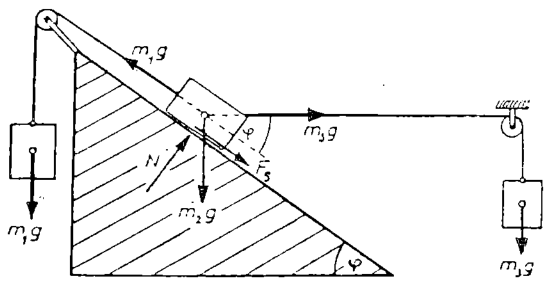
5.19. Tri telesa z masami m_1, $m_2 = 5$ kg in $m_3 = 1$ kg so povezana z vrvjo, kot kaže slika. Naklonski kot klanca je $\varphi = 45°$, statični torni koeficient med telesom in klancem je $k_s = 0{,}3$. Maso m_1 počasi povečujemo. Pri katerem m_1 se telo m_2 na klancu premakne navzgor?

Dokler telo m_2 na klancu miruje, je:

$$N + m_3g\sin\varphi - m_2g\cos\varphi = 0 \text{ ali } N = (m_2\cos\varphi - m_3\sin\varphi)g$$
$$m_1g - m_2g\sin\varphi - m_3g\cos\varphi - F_s = 0\ ,\ F_s = k_sN$$

Dobimo:

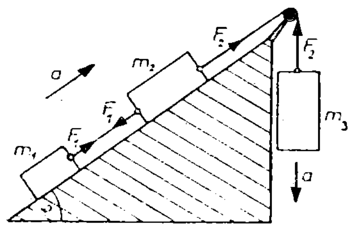
$$m_1 = m_3\cos\varphi + m_2\sin\varphi + k_s(m_2\cos\varphi - m_3\sin\varphi) = 5{,}1\ \mathrm{kg}$$



5.20. Tri telesa z masami $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg in $m_3 = 4$ kg so povezana z vrvjo in ležе na klancu, kot kaže slika. Kolikšni sta sili F_1 in F_2 v vrvi, če telesa drsijo v narisani smeri? Naklonski kot klanca je $\varphi = 30°$, trenje zanemarimo. Kakšna mora biti zveza med masami teles, da le-ta drsijo s stalno hitrostjo? Kolikšni sta tedaj sili (F_1' in F_2') v vrvi?

$$m_3g - F_2 = m_3a\ ,\ F_2 - F_1 - m_2g\sin\varphi = m_2a$$
$$F_1 - m_1g\sin\varphi = m_1a$$

Vse tri enačbe seštejemo, da sili F_1 in F_2 izpadeta, in dobimo:

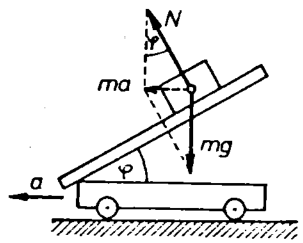


$$(m_1 + m_2 + m_3)a = m_3g - (m_1 + m_2)g\sin\varphi$$
$$F_1 = m_1m_3g(1 + \sin\varphi)/(m_1 + m_2 + m_3) = 8{,}4\ \mathrm{N}$$
$$F_2 = F_1(m_1 + m_2)/m_1 = 25\ \mathrm{N}$$

Telesa se gibljejo enakomerno, če je $a = 0$, to je za $m_3 = (m_1 + m_2)\sin\varphi$. Tedaj sta sili v vrvi enaki:

$$F_1' = m_1g\sin\varphi \text{ in } F_2' = (m_1 + m_2)g\sin\varphi = m_3g$$

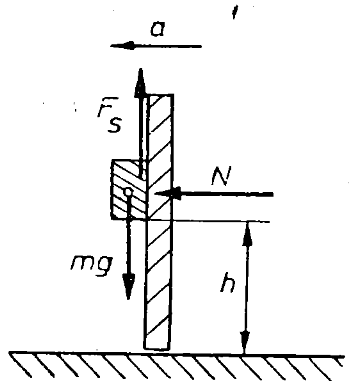
5.21. Telo z maso m položimo na gladka tla vozička, ki so nagnjena za kot $\varphi = 30°$. S kolikšnim pospeškom (a) moramo potiskati voziček v levo, da telo ne drsi po tleh vozička? Trenje zanemarimo.



Ker telo miruje na vozičku, se giblje s pospeškom a v levo. Torej je rezultanta sile podlage (N) in teže mg telesa enaka ma in usmerjena v levo.

Sledi: $N\cos\varphi = mg$ in
$N\sin\varphi = ma$ ali
$a = g\,\mathrm{tg}\varphi = 5{,}7\ \mathrm{m/s^2}$

5.22. Navpična deska se giblje s pospeškom $a = 2\,g$ v vodoravni smeri. Na višini $h = 1$ m nad vodoravno podlago se deske dotika ploščica z maso $m = 20$ g. S kolikšno silo (N) deluje ploščica na desko? V kolikšnem času (t) pade ploščica na tla? Z najmanj kolikšnim pospeškom (a_0) se mora deska gibati, da ploščica miruje glede na desko? Statični torni koeficient med desko in ploščico je $k_s = 0{,}3$, drsni pa $k_t = 0{,}2$.



Ploščici daje pospešek a sila N, s katero jo deska odriva: $N = ma$. Padanje ploščice zadržuje statična torna sila $F_s = k_sN = k_sma = 0{,}6\ mg$. Ker je ta sila manjša od teže mg, ploščica pada, in sicer s pospeškom $a_1 = g - k_ta = 0{,}6\,g$. Na tla pade po času $t = (2h/a_1)^{1/2} = 0{,}6$ s.

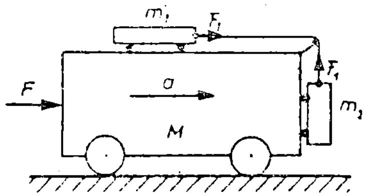
Ploščica ne drsi navzdol po deski, če se ta giblje najmanj s pospeškom a_0, tako da je $F_s = mg = k_sma_0$ ali $a_0 = g/k_s = 3{,}3\ g = 33\ \mathrm{m/s^2}$.

5.23. Na vozu (masa $M = 2$ kg) sta vozička z masama $m_1 = 0{,}2$ kg in $m_2 = 0{,}6$ kg. S kolikšno silo (F) moramo potiskati voz v vodoravni smeri, da voziček m_1 na vozu miruje? Trenje zanemarimo.

Če vozička glede na voz mirujeta, se vsi skupaj gibljejo kot enotno telo z maso $M + m_1 + m_2$, ki ga potiska sila F, zato je:

$F = (M + m_1 + m_2)a$

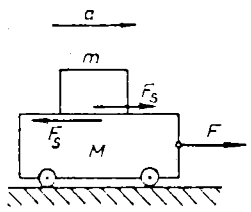
Voziček m_1 na vozu se giblje s pospeškom a v desno, ki ga določa sila F_1 v vrvi: $F_1 = m_1a$. Ta sila tudi vzdržuje ravnovesje teži m_2g drugega telesa, ki visi ob vozu in v navpični smeri nima pospeška: $F_1 = m_2g$. Sledi:



$a = gm_2/m_1$ ter
$F = m_2g(M + m_1 + m_2)/m_1 = 82$ N

5.24. Breme z maso $m = 150$ kg leži na vozičku z maso $M = 100$ kg. Statični torni koeficient med bremenom in vozičkom je $k_s = 0{,}4$. Z največ kolikšno silo (F) smemo vleči voziček v vodoravni smeri, da breme na vozičku ne zdrsne? Kolikšen je pospešek (a) vozička oziroma bremena?

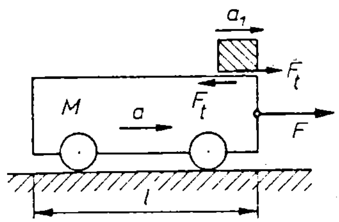
Bremenu m daje pospešek a vodoravna komponenta sile podlage, ki ima zgornjo mejo $F_s = k_smg$. Torej se lahko breme giblje največ s pospeškom $F_s/m = k_sg$, kar je obenem največji dovoljeni pospešek voza, če naj breme ne zdrsne:



$F = (M + m)a = (M + m)k_sg = 980$ N

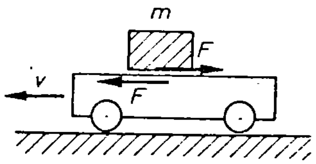
5.25. Voziček z maso $M = 20$ kg vlečemo v vodoravni smeri s silo $F = 200$ N. Na zgornji ploskvi vozička je majhna utež z maso $m = 1$ kg. Po kolikšnem času (t) od začetka, ko je utež mirovala na sprednjem delu mirujočega vozička, zdrsne utež z zadnjega dela vozička? Dolžina vozička je $l = 0{,}5$ m, drsni torni koeficient med utežjo in vozičkom je $k_t = 0{,}2$. Trenje med vozičkom in tlemi zanemarimo.

Drsna torna sila $F_t = k_tmg$ daje uteži pospešek $a_1 = k_tg$ v smeri na desno, medtem ko se voziček giblje v desno s pospeškom $a = (F - F_t)/M = (F - k_tmg)/M = 9{,}9$ m/s^2, ki je večji od a_1. Torej se utež giblje glede na voziček s pospeškom $a - a_1 = a_r = 7{,}9$ m/s^2 v levo. Rob vozička doseže po času $t = (2l/a_r)^{1/2} = 0{,}4$ s.



5.26. Na ravnem dnu tovornega avtomobila, ki vozi s hitrostjo $v = 36$ km/h, leži zaboj (masa m). Na najmanj kolikšni razdalji (x) se avtomobil med enakomernim zaviranjem lahko ustavi, da zaboj na avtomobilu ne zdrsne? Statični torni koeficient med zabojem in dnom je $k_s = 0{,}4$.

Zaboj zavira vodoravna komponenta sile podlage (F), katere zgornja meja je statična torna sila $F_s = k_smg$, zato se lahko giblje brez podrsavanja največ s pojemkom k_sg, kar je tudi zgornja meja za pojemek avtomobila. Ta se mora ustaviti na poti x, ki je večja od $v^2/(2k_sg) = 13$ m.



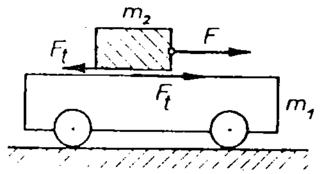
5.27. Telo z maso $m_2 = 4$ kg leži na vozičku z maso $m_1 = 40$ kg. Drsni torni koeficient med telesom in vozičkom je $k_t = 0{,}2$, statični torni pa $k_s = 0{,}25$. S kolikšnima pospeškoma se gibljeta telo (a_2) in voziček (a_1), če vlečemo telo v vodoravni smeri s stalno silo a) $F_1 = 2$ N in b) $F_2 = 100$ N? Trenje med vozičkom in tlemi zanemarimo.

Statična torna sila $F_s = k_sm_2g = 9{,}8$ N je v primeru a) večja od vlečne sile (zato telo ne zdrsne na vozičku), v primeru b) pa manjša (in telo zdrsne).

a) Telo in voziček se gibljeta z enakim pospeškom: $a_1 = a_2 = F_1/(m_1 + m_2) = 0{,}05$ m/s^2

b) Vozičku daje pospešek a_1 drsna torna sila $F_t = k_tm_2g = 7{,}8$ N

$a_1 = F_t/m_2 =$ 0,2 m/s^2
$a_2 = (F_2 - F_t)/m_2 = 23$ m/s^2



5.28. Na vozičku z maso $M = 25$ kg, ki se lahko brez trenja giblje po vodoravnih tleh, je montiran klanec z naklonskim kotom $\varphi = 45°$ in višino $h = 2$ m. Po klancu drsi telo z maso $m = 5$ kg. Za kolikšno pot (x) se voziček premakne v vodoravni smeri v času, ko se telo spusti z vrha do vznožja klanca? Trenje zanemarimo.

Pospešek telesa glede na tla razstavimo na vodoravno komponento a_x in na navpično komponento a_y, pospešek voza a je usmerjen v levo. Nastavimo Newtonov zakon dinamike za telo in voz:

$ma_x = N\sin\varphi, \quad ma_y = mg - N\cos\varphi$
$Ma = N\sin\varphi = ma_x$ ali
$a_x = (M/m)a$

Lahko si mislimo, da se klanec z vozom ne giblje pospešeno v levo s pospeškom a, ampak da miruje in da se telo giblje v desno (glede na klanec) s pospeškom $a_x + a$. Rezultanta pospeškov $a_x + a$ ter a_y mora imeti smer klanca, zato velja:

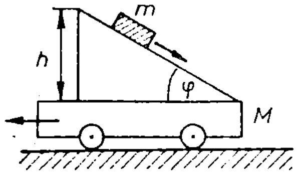
$a_y = (a_x + a)\mathrm{tg}\varphi = a(1 + M/m)\mathrm{tg}\varphi$

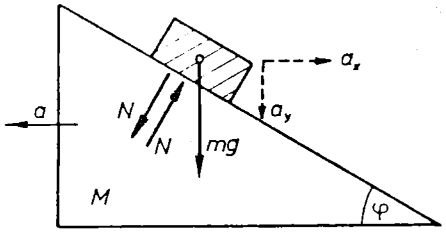
Izraza za a_x in a_y vstavimo v enačbi za telo in dobimo pospešek:

$a = mg/[M\,\mathrm{ctg}\varphi + (m + M)\mathrm{tg}\varphi] = 0{,}9$ m/s^2
$a_y = (m + M)g\,\mathrm{tg}\varphi/[M\,\mathrm{ctg}\varphi + (m + M)\mathrm{tg}\varphi] = 5{,}4$ m/s^2

Telo pridrsa do dna klanca (to je višinsko razliko h) v času $t = (2h/a_y)^{1/2}$. Med tem časom se voz v vodoravni smeri premakne za

$$x = at^2/2 = ha/a_y = hm/[(m + M)\mathrm{tg}\varphi] = 0{,}33 \text{ m}$$





5.29. Naloga je podobna prejšnji, le da potiskamo voziček s stalno silo, tako da se giblje s pospeškom $a = 1 \text{ m/s}^2$. Po kolikšnem času (t) od začetka, ko je bilo telo na vrhu klanca, doseže telo dno klanca? Kolik je pospešek (a_0) telesa?

Enačbe dinamike za telo so enake kot prej, le da pospešek klanca (a) tokrat poznamo, usmerjen je v desno. Telo je ves čas na klancu, če ima rezultanta pospeškov a_y ter $a_x - a$ smer klanca, to je:

$$a_y = (a_x - a)\mathrm{tg}\varphi$$

Iz enačb eliminiramo N in dobimo:

$$a_x = a \sin^2\varphi + g \sin\varphi \cos\varphi$$
$$a_y = g \sin^2\varphi - a \sin\varphi \cos\varphi$$
$$a_0 = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2} = \sin\varphi\, (a^2 + g^2)^{1/2} = 7{,}0 \text{ m/s}^2$$
$$h = a_y t^2/2,\ t = 1{,}0 \text{ s}$$

5.30. Hitrost telesa se povečuje s časom po enačbi: $v = b(1 - \exp(-ct))$, kjer sta b in c znana parametra. Kako se s časom spreminja rezultanta F vseh sil, ki učinkujejo na telo?

$$F = ma = m\, dv/dt = mbc \exp(-ct)$$

Sila F eksponento pojema s časom.

5.31. Motorni čoln se giblje s hitrostjo v_0, ko ugasne motor. Nakar se čoln giblje pojemajoče, pojemek je premo sorazmeren s kvadratom hitrosti: $dv/dt = -kv^2$ (k je znana konstanta). Kako se s časom spreminjata hitrost čolna in prevožena pot (x)? Kako je hitrost odvisna od poti?

$$dv/v^2 = -k\, dt$$

Integriramo pri začetnem pogoju $v = v_0$ za $t = 0$ in dobimo:

$$v = v_0/(1 + kv_0 t)$$
$$dx = v\, dt = v_0(1 + kv_0 t)^{-1} dt$$

Tokrat je začetni pogoj $x = 0$ za $t = 0$:

$$x = (1/k)\ln(1 + kv_0 t)$$

Da dobimo zvezo med v in x, eliminiramo čas t:

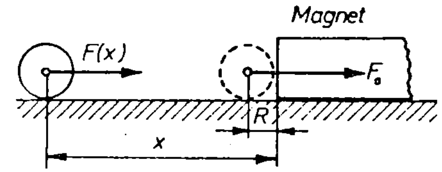
$$v = v_0 \exp(-kx)$$

Hitrost čolna se eksponento zmanjšuje s pretečeno potjo.

5.32. Kroglica z maso in m in polmerom R leži na oddaljenosti s od magnetnega pola. Magnet privlačuje kroglico s silo, ki je obratno sorazmerna s kvadratom oddaljenosti od magnetnega pola. S kolikšno hitrostjo (v_0) udari kroglica ob magnetni pol potem, ko jo spustimo? Poznamo še silo F_0, ki je potrebna, da kroglico odtrgamo od pola.

Na oddaljenosti x od pola ima kroglica hitrost $v(x)$ in nanjo deluje magnetna privlačna sila $F = k/x^2 = F_0 (R/x)^2$. Pospešek kroglice je:

$$a = F/m = dv/dt =$$
$$= (dv/dx)(dx/dt) = -v\, dv/dx$$



ali

$$v\, dv = -(F/m)dx = -(F_0 R^2/m)x^{-2} dx$$

Integriramo pri začetnem pogoju $v = 0$ za $x = s$ in dobimo:

$$v^2 = 2F_0(R^2/m)(1/x - 1/s); \quad v = v_0 \text{ za } x = R$$
$$v_0^2 = 2F_0(R/m)(1 - R/s)$$

5.33. Veriga (dolžina b, masa na enoto dolžine μ) leži na mizi tako, da njen del visi prek roba mize. Pri kateri dolžini (x_0) visečega konca verige začne veriga drseti, če je statični torni koeficient med verigo in mizo enak k? Kolikšna je hitrost verige (v_0) v trenutku, ko njen zadnji konec zdrsne prek roba? Drsni torni koeficient je zaradi enostavnosti enak statičnemu.

$$\mu x_0 g = k(b - x_0)\,\mu g \text{ ali}$$
$$x_0 = kb/(1 + k)$$

Pri dolžini x visečega konca verige ima veriga hitrost v in pospešek $a = F/m = [\mu xg - k(b - x)\mu g]/(\mu b) = (g/b)(x - kb + kx) = dv/dt = (dv/dx)(dx/dt) = v\, dv/dx$ ali

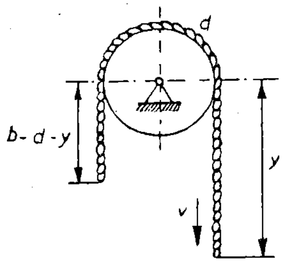
$$v\, dv = (g/b)[(1 + k)x - kb]dx$$

Enačbo integriramo z začetnim pogojem $v = 0$ za $x = x_0$ in dobimo:

$$v^2 = (g/b)[(1 + k)(x^2 - x_0^2) - 2kb(x - x_0)]$$
$$v = v_0 \text{ za } x = b:$$
$$v_0^2 = gb/(1 + k)$$

5.34. Vrv (dolžina $b = 1$ m, masa na enoto dolžine je $\mu = 2$ kg/m) visi prek lahkega škripca; dolžina prostega konca vrvi na eni strani škripca je $h_1 = 20$ cm, na drugi strani pa $h_2 = 60$ cm. Vrv spustimo, da se začne pospešeno odvijati s škripca. Kolikšna je hitrost (v_1) vrvi v trenutku, ko viseči konec vrvi na drugi strani škripca izgine?

$b = h_1 + h_2 + d$,
$d = 20$ cm = pol obsega



V nekem vmesnem trenutku visi na desni strani vrv z dolžino y, na levi strani pa z dolžino $b - d - y$. Pospešek vrvi je odvisen od razlike tež visečih koncev vrvi:

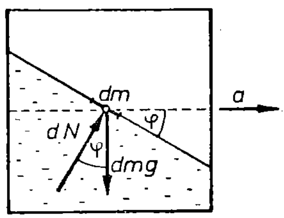
$\mu(2y - b + d)g = b\mu\, dv/dt = b\mu v\, dv/dy$
$v\, dv = (g/b)(2y - b + d)dy$

Integriramo z začetnim pogojem: $v = 0$ za $y = h_2$ in dobimo:

$v^2 = (2g/b)(y - h_1)(y - h_2)$
$v = v_1$ za $y = b - d$:
$v_1^2 = (2g/b)(b - d - h_1)(b - d - h_2) = 2gh_1h_2/b$
$v_1 = 1{,}5$ m/s

5.35. V kockastem akvariju sega voda do polovice višine. Kolikšen naklonski kot (φ) oklepa gladina vode z vodoravno smerjo, če akvarij porinemo v vodoravni smeri s pospeškom a? Pri kolikšnem pospešku (a_1) se voda razlije čez rob?

Na element tekočine z maso dm na nagnjeni gladini deluje pravokotna sila dN in teža gdm. Rezultanta med njima je adm in vodoravna, zato velja: $dN \cos\varphi = gdm$ in $dN \sin\varphi = adm$. Sledi:

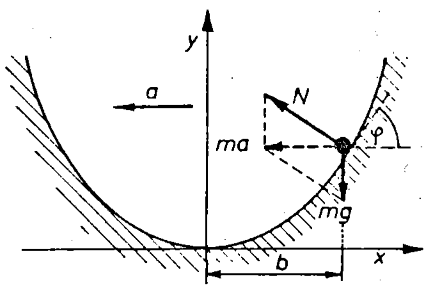


$\mathrm{tg}\varphi = a/g$

Voda se razlije čez rob, če je $\varphi > 45°$ (ker je akvarij do polovice napolnjen z vodo), to je pri $a_1 = g$.

5.36. Kroglica leži na dnu gladke parabolične skodelice ($y = kx^2$). Skodelico porinemo v levo, kroglica se premakne desno navzgor. Kolik je pospešek (a) skodelice, če kroglica »obmiruje« na razdalji b od navpične simetrale skodelice? Trenje zanemarimo.

Na kroglico delujeta teža mg in pravokotna sila podlage N. Njuna rezultanta je usmerjena v levo in enaka ma, zato velja:



$N \sin\varphi = ma$ in
$N \cos\varphi = mg$ ali
$\mathrm{tg}\varphi = a/g = dy/dx$
$a = g \cdot 2kx = 2kbg$

6. SILA IN POSPEŠEK PRI KROŽENJU

6.1. Kako dolg (t_0) bi moral biti dan, da telesa na ekvatorju ne bi pritiskala na tla? Polmer Zemlje je $R = 6400$ km.

$mg - N = mR\omega^2$
$N = m(g - R\omega^2)$ = pritisk telesa na tla
$N = 0$ da $g = R\omega^2 = R(2\pi/t_0)^2$ ali
$t_0 = 2\pi(R/g)^{1/2} = 1{,}4$ h

6.2. Točkasto telo z maso $m = 0{,}1$ kg je pritrjeno na vrvico z dolžino $r = 25$ cm, ki jo vrtimo v vodoravni ravnini enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom $\alpha = 0{,}2/\mathrm{s}^2$. S kolikšno silo ($F$) je vrvica napeta po $n = 10$ vrtljajih od začetka vrtenja?

$F = ma_r = mr\omega^2 = mr\, 2\alpha\varphi = mr\, 2\alpha\, 2\pi n = 4\pi\alpha mnr = 0{,}63$ N

6.3. Avto vozi skozi ovinek s polmerom $R = 200$ m enakomerno pospešeno; njegova hitrost se na ločni poti $s_1 = 150$ m poveča od $v_1 = 36$ km/h na $v_2 = 72$ km/h. Kolik je celoten pospešek (a) avtomobila po poti $s_2 = 200$ m?

$a^2 = a_t^2 + a_r^2$
$v_2^2 = v_1^2 + 2a_ts_1$ ali $a_t = (v_2^2 - v_1^2)/2s_1 = 1{,}0\ \mathrm{m/s^2}$
$a_r = v^2/R = (v_1^2 + 2a_ts_2)/R = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$
$a = 2{,}7\ \mathrm{m/s^2}$

6.4. S kolikšno silo (F) in v kateri smeri moramo delovati na telo z maso $m = 0{,}5$ kg, da telo kroži s stalno kotno hitrostjo $\omega = 120/\mathrm{s}$ po krogu s polmerom $R = 0{,}5$ m? Kaj moramo storiti, da se telo z enakomernim zaviranjem ustavi po času $t = 10$ s od začetka zaviranja?

$F = ma_r = mR\omega^2 = 3{,}6$ kN

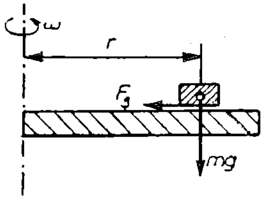
Sila F mora biti usmerjena k središču kroženja.

Dodatna sila F_1 mora biti tangentna na krožnico, nasprotno smeri kroženja:

$F_1 = ma_t = mr\alpha = mr\omega/t = 3$ N.

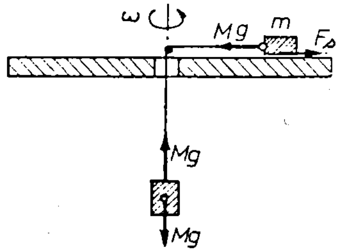
6.5. Na vodoravni plošči, ki se lahko vrti okrog navpične osi, leži predmet na razdalji $r = 30$ cm od osi. Statični torni koeficient med predmetom in ploščo je $k_s = 0{,}4$. Plošča se začne vrteti enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom $\alpha = 0{,}2/\mathrm{s}^2$. Po kolikšnem času ($t$) od začetka vrtenja začne predmet drseti po plošči?

Dokler predmet ne zdrsne, se vrti z radialnim pospeškom $r\omega^2$, ki ga omogoča vodoravna komponenta sile podlage. Ta je največ lahko enaka statični torni sili $F_s = k_s mg$, zato:



$k_s mg = ma_r = mr\omega^2 = mr(\alpha t)^2$ ali
$t = (k_s g/r\alpha^2)^{1/2} = 18$ s

6.6. Vodoravna plošča se vrti okrog navpične geometrijske osi s stalno kotno hitrostjo ω. Na plošči leži telo z maso m, ki je prek škripca na osi povezano z visečo utežjo (masa M). Pri katerih oddaljenostih (r_1 in r_2) od osi je telo na plošči v ravnovesju? Statični torni koeficient med telesom in ploščo je k_s.



Na telo učinkujeta v radialni smeri sila v vrvi, ki je enaka teži Mg viseče uteži, ter vodoravna komponenta sile podlage. Ta je usmerjena k osi, če hoče telo zdrsniti navzven, in proč od osi, če hoče telo zdrsniti navznoter.

Rezultanta obeh sil določa radialni pospešek:

Zdrs navzven : $Mg + k_s mg = mr_2\omega^2$, $r_2 = (g/\omega^2)(k_s + M/m)$
Zdrs navznoter: $Mg - k_s mg = mr_1\omega^2$, $r_1 = (g/\omega^2)(-k_s + M/m)$

Na povsem gladki plošči ($k_s = 0$) je $r_1 = r_2 = gM/(m\omega^2)$
Telo na vrteči se plošči ne zdrsne, če je oddaljeno od osi med r_1 in r_2.

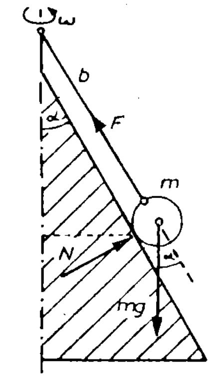
6.7. Pilot aviona, ki leti vodoravno s hitrostjo $v_1 = 720$ km/h, izključi motor in usmeri letalo v navpičen krog s polmerom $R = 790$ m. S kolikšno silo (F_2) pritiska sedež na pilota v najvišji legi in s kolikšno (F_1) v najnižji legi kroga? Masa pilota je $m = 70$ kg.

$F_1 - mg = mv_1^2/R$, $F_1 = mg + mv_1^2/R = 4230$ N
$v_2^2 = v_1^2 - 2g.2R$ (v_2 = hitrost letala v najvišji legi)
$mg + F_2 = mv_2^2/R$, $F_2 = mv_2^2/R - mg = mv_1^2/R - 5mg = 114$ N

6.8. Kroglica z maso m visi na nitki (dolžina $b = 0{,}2$ m), katere drugi konec je pritrjen ob vrh stožca. Kot ob vrhu stožca je $2\alpha = 60°$. Pri kateri frekvenci (v_0) vrtenja stožca okrog geomemtrijske osi se kroglica odlepi od plašča stožca? Trenje zanemarimo.

Na kroglico delujejo tri sile: teža mg, sila F v vrvi in pravokotna sila podlage N. Njihova rezultanta je usmerjena k osi in enaka $ma_r = mr\omega^2 = mb\sin\alpha(2\pi v)^2$. Sledi:

$F\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0$
$F\sin\alpha - N\cos\alpha = mb\sin\alpha\,\omega^2$



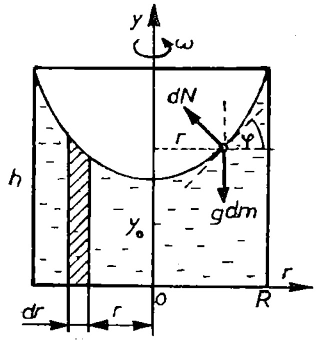
Iz enačb eliminiramo F in izračunamo:

$N = m\sin\alpha\,(g - b\omega^2\cos\alpha)$

Kroglica se odlepi, ko je $N = 0$, to je pri frekvenci v_0, ki zadošča enačbi: $g = b(2\pi v_0)^2\cos\alpha$ ali

$v_0 = (1/2\pi)(g/b\cos\alpha)^{1/2} = 1{,}2$ /s

6.9. Lonec s polmerom $R = 5$ cm in višino $h = 15$ cm je poln vode. Vrtimo ga okrog navpične geometrijske osi s stalno kotno hitrostjo $\omega = 5$/s. Kakšno obliko dobi gladina vode v loncu? Koliko (volumen V) vode izteče iz lonca? S kolikšno kotno hitrostjo (ω_1) moramo vrteti lonec, da gladina vode doseže dno lonca?



Računamo podobno kot pri nalogi 5.35., le da imamo namesto linearnega pospeška a radilni pospešek $r\omega^2$.
$dN\cos\varphi = gdm$
$dN\sin\varphi = dm\,r\omega^2$

Enačbi delimo:

$\mathrm{tg}\varphi = r\omega^2/g = dy/dr$ (y je višina elementa vode z gladine nad dnom lonca na oddaljenosti r od osi)

$dy = (\omega^2/g)r\,dr$

Integriramo pri robnem pogoju $y = y_0$ za $r = 0$ in dobimo:

$y = y_0 + \omega^2 r^2/2g$ (t.i. rotacijski parabolid)

Integracijska konstanta y_0 je odvisna od množine vode v loncu oziroma od pogojev na robu lonca. Za $r = R$ je $y = h$ in dobimo:

$y_0 = h - \omega^2 R^2/2g$ ter
$y = h - \omega^2(R^2 - r^2)/2g = y(r)$

Volumen V iztečene vode je:

$V = \pi R^2 h - \int_0^R y(r)\,2\pi r\,dr = \pi\omega^2 R^4/4g = 12{,}5\ \mathrm{cm}^3$

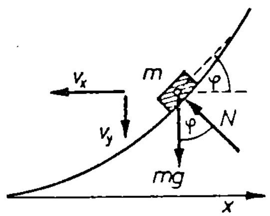
Gladina vode doseže dno lonca za $r = 0$ pri $\omega = \omega_1$, ko je $y_0 = y(0) = 0$, to je za $h - \omega_1^2 R^2/2g = 0$ ali

$\omega_1 = (2\,gh/R^2)^{1/2} = 34$/s

6.10. Košček ledu brez trenja drsi po parabolični podlagi, katere enačba je $y = kx^2$ (k je znana konstanta). Kolikšna sta njegova hitrost (v_0) in pospešek (a_0) na dnu, če ga spustimo z višine H? S kolikšno silo (N_0) pritiska na podlago v najnižji točki?

Na košček delujeta teža mg in sila podlage N, ki je pravokotna na podlago. Enačbo gibanja napišemo za navpične in vodoravne projekcije:

$mg - N\cos\varphi = ma_y = m\,dv_y/dt$
$N\sin\varphi = ma_x = m\,dv_x/dt$



Strmina tangente na krivuljo je

$\mathrm{tg}\varphi = dy/dx = 2kx = v_y/v_x$

Iz zgornjih enačb gibanja eliminiramo N in dobimo:

$dv_x/dt = 2kx(g - dv_y/dt)$

Ker je $v_y = 2kxv_x$, dobimo za v_x diferencialno enačbo:

$dv_x/dt = 2kxg - 4k^2x^2 dv_x/dt + 4k^2xv_x^2$

Odvajanje po času nadomestimo z odvajanjem po koordinati x. Ker je $v_x = -dx/dt$, je $dv_x/dt = (dv_x/dx)(dx/dt) = -v_x dv_x/dx$ in:
$-v_x dv_x/(g + 2kv_x^2) = 2kx dx/(1 + 4k^2x^2)$

Enačbo integriramo z začetnim pogojem $v_x = 0$ za $x = x_0$ (kjer je $H = kx_0^2$) in dobimo:

$v_x^2 = 2g(H - y)/(1 + 4ky)$

$v_y^2 = 4k^2x^2v_x^2 = 4ky\,v_x^2$

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (1 + 4ky)v_x^2 = 2g(H - y)$

Na dnu jame ($x = y = 0$) je $v = v_0 = (2gH)^{1/2}$. Ta rezultat poznamo, saj je to hitrost po prostem padanju (brez upora ali trenja) za višinsko razliko H.

Pospešek koščka ledu je:

$a_x = dv_x/dt = -v_x dv_x/dx = -(1/2)d(v_x^2)/dx$
$a_x = 2gkx(1 + 4kH)/(1 + 4k^2x^2)^2$
$a_y = dv_y/dt = (dv_y/dx)(dx/dt) = -v_x\,dv_y/dx$
$a_y = -2kv_x^2 - kx\,d(v_x^2)/dx$
$a_y = 4gk(4k^3x^4 + 2kx^2 - H)/(1 + 4k^2x^2)^2$

Na dnu jame ($x = 0$) je $a_x = 0$ in $a_y = -4gkH = a_0$

Sila podlage:

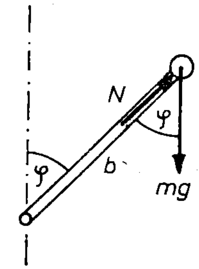
$N = ma_x/\sin\varphi = ma_x(1 + \mathrm{ctg}^2\varphi)^{1/2}$
$N = mg(1 + 4kH)(1 + 4k^2x^2)^{-3/2}$
$N_0 = mg(1 + 4kH)$

Sila podlage je na dnu večja od teže koščka (radialni pospešek je usmerjen navzgor).

6.11. Lahka palica (dolžina b) se lahko vrti okrog vodoravne osi skozi en konec palice. Na drugem koncu palice je pritrjena utež z maso m. Palico spustimo z najvišje (navpične) lege. Pri katerem kotu (φ_0) palice glede na navpičnico v palici ni napetosti? Kolikšna je sila (N_0) v palici, ko palica prečka vodoravno smer, in kolikšna je (N_1), ko gre palica skozi najnižjo lego?

Utež se giblje pospešeno po krogu s polmerom b, zato velja:

$N - mg\cos\varphi = mb\omega^2$
$mg\sin\varphi = ma_t = mb\alpha = mb\,d\omega/dt$



Iz zadnje enačbe dobimo:

$g\sin\varphi = b(d\omega/d\varphi)(d\varphi/dt)$
$\quad = b\omega(d\omega/d\varphi)$ ali
$\omega d\omega = (g/b)\sin\varphi d\varphi$.

Začetni pogoj: $\omega = 0$ za $\varphi = 0$:

$\omega^2 = (2g/b)(1 - \cos\varphi)$
$N = mb\omega^2 + mg\cos\varphi = mg(2 - 3\cos\varphi)$
$N = 0$ pri $\varphi = \varphi_0 = 48°$
$N_0 = N$ pri $\varphi = 90°$, $N_0 = 2\,mg$
$N_1 = N$ pri $\varphi = 180°$, $N_1 = 5\,mg$

6.12. Vedro vode vrtimo v navpičnem krogu s polmerom $R = 1{,}5$ m. Najmanj kolikšno hitrost (v_0) mora imeti vedro v najvišji točki kroga, da voda ne izteče iz njega?

Vedro pritiska na vodo (masa m) s silo N, tako da v najvišji točki kroga velja:

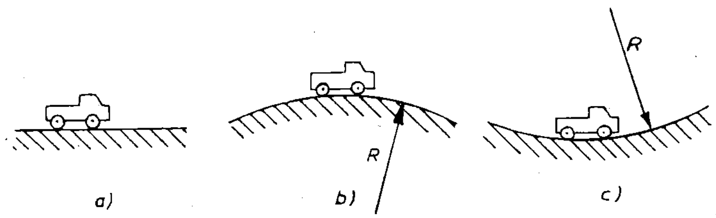
$N + mg = mv^2/R$ ali

$N = m(v^2/R - g)$

Voda ne izteče iz vedra, če je $N \geqslant 0$ (voda pritiska na dno vedra), to je pri $v^2 \geqslant gR$.

$v_0 = (gR)^{1/2} = 3{,}8$ m/s

6.13. Avtomobil vozi s hitrostjo $v = 20$ m/s po cesti, ko voznik nenadoma blokira kolesa; drsni torni koeficient je $k_t = 0{,}5$. S kolikšnim pojemkom (a) začne drseti a) na vodoravni cesti, b) na vrhu konveksno zakrivljene ceste s polmerom $R = 200$ m in c) na dnu konkavno zakrivljene ceste z enakim polmerom R?



$a = F_t/m = k_t N/m$

a) $N = mg,\ a = k_t g = 4{,}9\ \mathrm{m/s^2}$
b) $N = mg - mv^2/R\ ,\ a = k_t(g - v^2/R) = 3{,}9\ \mathrm{m/s^2}$
c) $N = mg + mv^2/R,\ a = k_t(g + v^2/R) = 5{,}9\ \mathrm{m/s^2}$

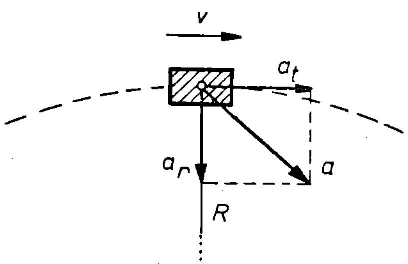
6.14. Z največ kolikšno hitrostjo lahko pelje avtomobil skozi vodoraven ovinek s polmerom $R = 46$ m, če je statični torni koeficient med kolesi in cestiščem enak $k_s =$ $= 0{,}5$?

$F_s = ma_r$
$k_s mg = mv^2/R$
$v = (k_s gR)^{1/2} = 54$ km/h

6.15. Med vožnjo po vodoravnem cestišču s polmerom $R = 51$ m pospešuje tovornjak s stalnim tangentnim pospeškom $a_t = 4{,}5\ \mathrm{m/s^2}$. Pri kateri hitrosti zaboj na tovornjaku zdrsne? Statični torni koeficient med tovornjakom in zabojem je $k_s = 0{,}5$.

Na zaboj z maso m »učinkuje« vztrajnostna sila ma, kjer je a celoten pospešek tovornjaka:

$a = (a_t^2 + a_r^2)^{1/2} = (a_t^2 + v^4/R^2)^{1/2}$

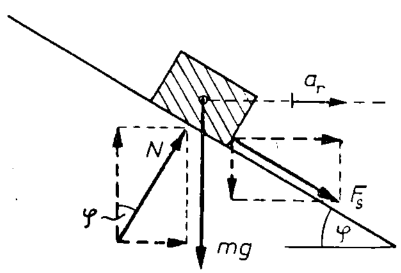


Zaboj zdrsne, ko je vztrajnostna sila ma enaka statični torni sili $k_s mg$. Sledi:

$k_s mg = ma = m(a_t^2 + v^4/R^2)^{1/2}$ ali
$v = [R^2(g^2k_s^2 - a_t^2)]^{1/4} = 10$ m/s

6.16. Avto zapelje v ovinek s polmerom $R = 80$ m, ki je nagnjen za kot $\varphi = 6{,}5°$ glede na vodoravno smer. V katerem intervalu mora biti njegova hitrost (med v_1 in v_2), da na nagnjenem cestišču ne zdrsne? Statični torni koeficient je $k_s = 0{,}1$.

Za $v \geqslant v_1$ avto zdrsne navzgor in velja:



$N \cos\varphi - mg - F_s \sin\varphi = 0$
$N \sin\varphi + F_s \cos\varphi = mv_1^2/R$
$F_s = k_s N$

Iz zgornjih enačb eliminiramo N in F_s ter izračunamo:

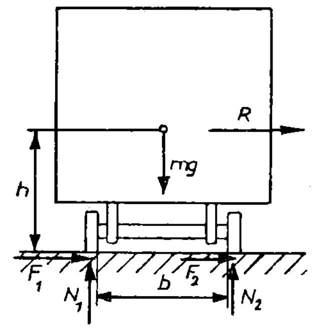
$v_1^2 = gR(\mathrm{tg}\varphi + k_s)/(1 - k_s \mathrm{tg}\varphi)$
$v_1 = 47$ km/h

Za $v \leqslant v_2$ avto zdrsne navzdol. Enačbe so podobne kot zgoraj, le da spremenimo predznak k_s:

$v_2^2 = gR(\mathrm{tg}\varphi - k_s)/(1 + k_s\ \mathrm{tg}\varphi)$
$v_2 = 12$ km/h

Pri popolnoma gladkem cestišču ($k_s = 0$) je $v_1 = v_2 = (gR\ \mathrm{tg}\varphi)^{1/2} = 34$ km/h.

6.17. Vagon vozi skozi vodoraven ovinek s polmerom $R = 240$ m. Višina težišča vagona nad tračnicama je $h = 1{,}5$ m, razdalja med tračnicama je $b = 1{,}435$ m. Z največ kolikšno hitrostjo (v) lahko vozi, da se v ovinku ne prevrne?



$N_1 + N_2 = mg$
$F_1 + F_2 = mv^2/R$

Enačbo za ravnovesje navorov napišemo glede na os skozi težišče vagona:

$(N_1 - N_2)b/2 - (F_1 + F_2)h = 0$
ali
$N_1 - N_2 = (2h/b)(F_1 + F_2) = (2h/b)mv^2/R$

Dobljeno enačbo seštejemo s prvo enačbo zgoraj in dobimo:

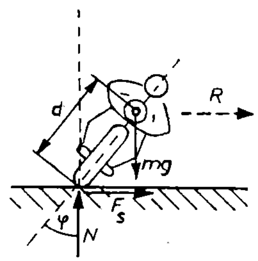
$N_1 = mg/2 + (h/b)mv^2/R$ ter $N_2 = mg/2 - (h/b)mv^2/R$

Vagon se začne prevračati, ko se pritisk na notranjo tračnico (N_2) zmanjša na nič, kar se zgodi pri $v^2 = gbR/2h$, $v = 34$ m/s

6.18. Z največ kolikšno hitrostjo (v) lahko vozi motorist skozi vodoraven ovinek s polmerom $R = 90$ m, da se ne prevrne? Statični torni koeficient med kolesoma in tlemi je $k_s = 0{,}4$. Za kolik kot (φ) se mora pri tem nagniti?

Navpična komponenta sile tal N drži ravnovesje motoristovi teži $N = mg$. Vodoravna komponenta (ki je največ enaka statični torni sili $F_s = k_s N$), pa daje motoristu radialni pospešek:

$F_s = mv^2/R = k_s mg$
$v = (Rk_s g)^{1/2} = 19$ m/s

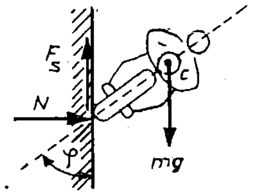


Motorist se ne prevrne, če je navor teže glede na vodoravno os skozi podporno točko enak navoru vztrajnostne sile mv^2/R:

$mgd \sin\varphi = (mv^2/R)d \cos\varphi$ ali
$\mathrm{tg}\varphi = v^2/Rg = k_s = 0{,}4$
$\varphi = 22°$

6.19. Naloga je podobna prejšnji, le da motorist vozi po navpičnem valjastem zidu s polmerom $R = 20$ m. Statični torni koeficient je $k_s = 0{,}8$, težišče motorista z motorjem je na oddaljenosti $d = 0{,}7$ m od dotikališča.

$F_s = mg = k_sN$
$N = mv^2/(R - d \sin\varphi)$



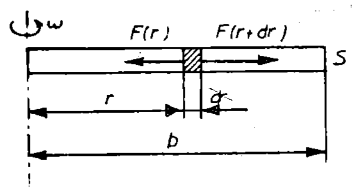
Kot φ izračunamo iz enačbe za ravnovesje navorov:

$F_sd \sin\varphi = Nd \cos\varphi$
$\text{ctg}\varphi = k_s$
$\varphi = 51°$
$v = 15$ m/s

6.20. Z največ kolikšno frekvenco (ν_0) smemo vrteti palico (dolžina b = 1 m), da se ta ne odtrga od osi? Natezna trdnost palice je $\sigma_0 = 10^7$ N/m^2, gostota palice je ϱ = = 8 g/cm^3.

Palico v mislih razdelimo na elemente dm. Na element dm z oddaljenosti r od osi delujeta v radialni smeri sila $F(r)$ navznoter in sila $F(r + \text{d}r)$ navzven. Njuna rezultanta $F(r) - F(r + \text{d}r)$ daje elementu zahtevani radialni pospešek:

$F(r) - F(r + \text{d}r) = -\text{d}F = a_r\text{d}m = \text{d}m\, r\omega^2$
$\text{d}F = -\varrho\omega^2 Sr\,\text{d}r$



Integriramo pri robnem pogoju $F = 0$ za $r = b$ in dobimo:

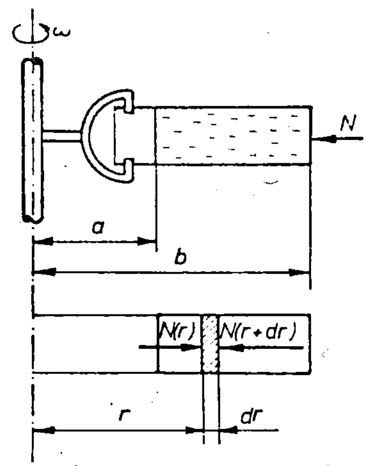
$F(r) = \varrho S\omega^2(b^2 - r^2)/2$

Sila v palici je največja ob osi ($r = 0$), kjer je $F_0 = S\varrho\omega^2b^2/2 = S\sigma_0$. Sledi:

$\omega_0 = (2\sigma_0/\varrho b^2)^{1/2} = 50$/s , $\nu_0 = \omega_0/2\pi = 8$/s

6.21. Centrifuga z epruvetami se vrti s krožno frekvenco ω = 3600/ min. Gladina vode v epruvetah je od osi odmaknjena za a = 7 cm, dno epruvet pa za b = 15 cm. Kolik je tlak (p) na dnu epruvet?

Računamo podobno kot pri prejšnji nalogi:



$N(r + \text{d}r) - N(r) = \text{d}N = r\omega^2\text{d}m$ ali
$\text{d}N = S\varrho\omega^2 r\text{d}r$

Tokrat je robni pogoj:
$N = 0$ za $r = a$, zato dobimo:

$N(r) = S\varrho\omega^2(r^2 - a^2)/2$
$p = N/S = \varrho\omega^2(b^2 - a^2)/2$
$p = 32$ kN/m^2 = 3,2 N/cm^2

7. GIBALNA KOLIČINA

7.1. Enaki žogi (vsaka ima maso m = 0,2 kg) se gibljeta enako hitro, s hitrostjo v_1 = = $v_2 = v$ = 5 m/s. Kolikšna je njuna skupna gibalna količina (G), če se gibljeta a) v isti smeri, b) v nasprotni smeri in c) v pravokotnih smereh?

$\vec{G} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$
$G = m(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos\varphi)^{1/2}$

kjer je φ kot med smerema gibanja žog.

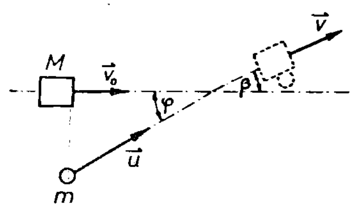
a) $\varphi = 0$, $G = m(v_1 + v_2) = 2\,mv = 2$ kgm/s
b) $\varphi = \pi$, $G = m(v_1 - v_2) = 0$
c) $\varphi = \pi/2$, $G = m(v_1^2 + v_2^2)^{1/2} = mv\sqrt{2} = 1{,}4$ kgm/s

7.2. Blok z maso M = 5 kg drsi po vodoravni podlagi s stalno hitrostjo v_0 = 12 m/s. Pod kotom φ = 30° glede na njegovo smer ustrelimo vanj kroglo z maso m = 0,1 kg in s hitrostjo u = 600 m/s. Pod katerim kotom (β glede na prvotno smer) in s kolikšno hitrostjo (v) se blok giblje potem, ko krogla obtiči v njem?

Ohranitev gibalne količine sitema obeh teles:

$M\vec{v}_0 + m\vec{u} = (M + m)\vec{v}$

ali za projekcije:



$Mv_0 + mu \cos\varphi = (M + m)v \cos\beta$
$mu \sin\varphi = (M + m)v \sin\beta$

Enačbi delimo, da se v krajša, in dobimo:

$\text{tg}\beta = mu \sin\varphi/(Mv_0 + mu \cos\varphi)$

Enačbi kvadriramo in nato seštejemo, da kot β izpade:

$v^2 = (M^2v_0^2 + m^2u^2 + 2Mmuv_0 \cos\varphi)/(M + m)^2$
$v = 23$ m/s, $\beta = 15°$

7.3. Na mirujoče telo z maso $m = 200\,\mathrm{g}$ začne delovati stalna sila $F = 20$ N. Kolikšna sta sunek sile in hitrost telesa po času $t = 0{,}03\,\mathrm{s}$?

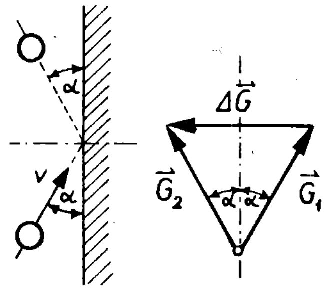
Sunek stalne sile $= Ft = 0{,}6$ Ns

$\Delta G = Ft = mv - 0 = mv,$
$v = Ft/m = 3$ m/s

7.4. Žoga z maso $m = 0{,}5$ kg s hitrostjo $v = 10$ m/s pod kotom $\alpha = 30°$ glede na zid zadene ob zid in se od njega prožno odbije (to je z enako veliko hitrostjo in pod enakim kotom, kot vpade). Kolikšna je sprememba gibalne količine žoge ob odboju?

Narišemo vektor gibalne količine žoge pred odbojem ($\vec{G}_1$) in po njem ($\vec{G}_2$). Vektorja sta enako dolga: $G_1 = G_2 = mv$. Njuna vektorska razlika je pravokotna na zid in znaša:

$|\Delta\vec{G}| = 2mv \sin\alpha = 5$ kgm/s



7.5. Krogla z maso $m = 12$ g se giblje skozi puškino cev; zapusti jo s hitrostjo $v = 700$ m/s po času $t = 3$ ms. Kolikšna povprečna sila (F) deluje na kroglo v puški? S kolikšno hitrostjo (v_1) se premakne nazaj puška (z maso $M = 4$ kg), ko krogla zapusti cev? Oceni povprečen pospešek (a) krogle v cevi ter dolžino (b) puškine cevi.

$Ft = \Delta G = G = mv$
$F = mv/t = 2{,}8$ kN
$mv = Mv_1$, $v_1 = mv/M = 2{,}1$ m/s
$F = ma$, $a = F/m = 2{,}3 \cdot 10^5$ m/s^2
$b = at^2/2 = 1{,}0$ m

7.6. Človek z maso $m = 80$ kg se po lestvi vzpenja na helikopter z maso $M = 2500$ kg, ki lebdi v zraku. S kolikšno hitrostjo (v) se zaradi tega spušča helikopter, če se človek dviguje s hitrostjo $v_0 = 0{,}5$ m/s glede na helikopter?

Človek se dviga z enako gibalno količino (glede na tla), kot se helikopter spušča, torej je: $Mv = m(v_0 - v)$ ali

$v = mv_0/(M + m) = 0{,}02$ m/s $= 2$ cm/s

7.7. Balon se dviguje s stalno hitrostjo $v_1 = 10$ m/s, ko z njega odvržemo navzdol vrečo peska s hitrostjo $v_2 = 10$ m/s glede na balon. Za koliko se pri tem spremeni hitrost balona, če je masa vreče $n = 2$-krat manjša od mase m preostalega balona?

$(m + m/n)v_1 = m(v_1 + v) - (m/n)(v_2 - v_1)$
$v = v_2/n = 5$ m/s

7.8. Vagon z maso $M = 1{,}5$ t se giblje po vodoravnem tiru enakomerno s hitrostjo $v = 85$ km/h. Z višine $H = 20$ m spustimo telo z maso $m = 500$ kg, tako da pade na vagon pravokotno na smer njegove hitrosti. S kolikšno hitrostjo (v_1) se nato giblje vagon skupaj s telesom?

Zaradi pravokotnega vpada se gibalna količina vagona ne spremeni. Hitrost vagona se zmanjša zato, ker se masa pri enaki gibalni količini poveča:

$Mv = (M + m)v_1$
$v_1 = Mv/(M + m) = 64$ km/h

(Podatek za H je potemtakem odveč).

7.9. Vagon z maso m se giblje po vodoravnem tiru enakomerno s hitrostjo v_0. Nanj začne padati dež enakomerno s stalnim masnim tokom Φ_m. Kako se zaradi padajočega dežja s časom spreminja hitrost vagona?

V času t od začetka padanja dežja ima vagon maso $m(t) = m + \Phi_m t$ in hitrost $v(t)$. Ker dež pada pravokotno na smer gibanja vagona, se gibalna količina vagona zaradi dežja ne spreminja:

$mv_0 = m(t)v(t)$ ali
$v(t) = mv_0/(m + \Phi_m t)$

7.10. Tovornjaka z masama $m_1 = 30$ t in $m_2 = 50$ t istočasno zapuščata trajekt; gibljeta se vštric in z enako hitrostjo $v = 2$ m/s glede na obalo. S kolikšno hitrostjo (v_1) se premakne trajekt z maso $M = 1000$ t, ko ga tovornjaka zapustita?

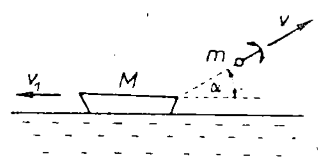
$(m_1 + m_2)v = Mv_1$
$v_1 = v(m_1 + m_2)/M = 0{,}16$ m/s

7.11. Vagoni vlaka prihajajo na trajekt s hitrostjo $v = 2$ m/s in se na njem ustavljajo. S kolikšno silo (F) je zaradi tega napeta vrv, s katero je trajekt privezan na obalo? Masa na enoto dolžine vlaka je $\mu = 2$ t/m.

V časovnem intervalu dt se zaradi prispelih vagonov gibalna količina trajekta poveča za $\mathrm{d}G = v\mathrm{d}m = v\mu\mathrm{d}x = v\mu v\mathrm{d}t$. Sila F je enaka spremembi gibalne količine v časovni enoti: $F = \mathrm{d}G/\mathrm{d}t = \mu v^2 = 8$ kN.

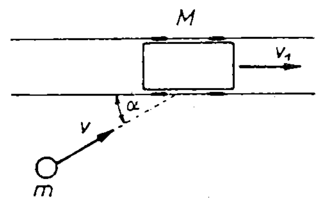
7.12. Čoln z maso $M = 200$ kg miruje na morski gladini. S čolna odvržemo sidro (masa $m = 30$ kg) s hitrostjo $v = 5$ m/s pod kotom $\alpha = 30°$ glede na morsko gladino. S kolikšno hitrostjo (v_1) se zaradi tega odmakne čoln?

Ker se čoln premika v vodoravni smeri, je pomembna vodoravna komponenta hitrosti sidra:



$Mv_1 = mv \cos\alpha$
$v_1 = (mv/M)\cos\alpha = 0{,}65$ m/s

7.13. Vagonček z maso M = 200 kg miruje na vodoravnem tiru. Pod kotom α = 30° glede na tir priteče človek z maso m = 80 kg in skoči na vagonček s hitrostjo v = 4 m/s. S kolikšno hitrostjo (v_1) se zaradi tega premakne vagonček? Kolik sunek sile (Ft) prevzameta tračnici v prečni smeri?



$(M + m)v_1 = mv \cos\alpha$, $v_1 = mv \cos\alpha/(M + m) =$
$= 1$ m/s
$Ft = mv \sin\alpha = 160$ kgm/s

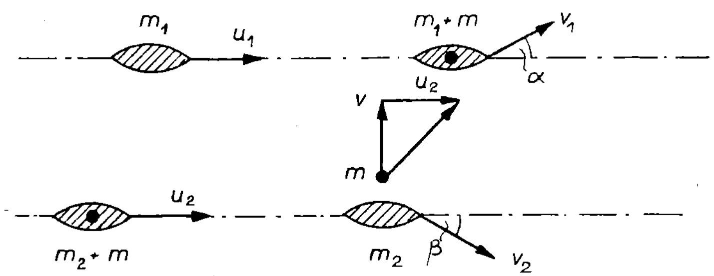
7.14. Čoln z maso m_1 = 300 kg pluje enakomerno s hitrostjo u_1 = 6 m/s. Dohiteva ga drug čoln z maso m_2 = 200 kg, ki pluje s hitrostjo u_2 = 10 m/s v isti smeri. Ko je poleg prvega čolna, skoči z njega človek (masa m = 60 kg) v prvi čoln s hitrostjo v = 15 m/s glede na vodo, in sicer v smeri pravokotno na smer plovbe obeh čolnov. Kako plujeta čolna potem?

S človekom vred prejme prvi čoln gibalno količino mv v pravokotni smeri in obenem gibalno količino mu_2 v smeri gibanja, zato se njegova hitrost spremeni od u_1 na v_1 pod kotom α glede na prvotno smer, tako da je:

$m_1u_1 + mu_2 = (m_1 + m)v_1 \cos\alpha$
$mv = (m_1 + m)v_1 \sin\alpha$

Enačbi delimo, da se v_1 krajša, in dobimo:

$\mathrm{tg}\alpha = mv/(m_1u_1 + mu_2)$, $\alpha = 21°$
$v_1 = mv/[(m_1 + m)\sin\alpha] = 7$ m/s



Kakršno gibalno količino prejme prvi čoln, takšno drugi izgubi, zato se njegova hitrost spremeni od u_2 na v_2 pod kotom β glede na prvotno smer gibanja:

$(m + m_2)u_2 = m_2v_2 \cos\beta$
$mv = m_2v_2 \sin\beta$

Iz zadnjih enačb izračunamo:

$\mathrm{tg}\beta = mv/[(m + m_2)u_2]$, $\beta = 19°$
$v_2 = mv/(m_2 \sin\beta) = 14$ m/s

7.15. Iz raketnega orožja na mirujočem železniškem vagonu (skupna masa je M = 20 t) izstrelimo raketo (masa m = 200 kg) z začetno hitrostjo v_0 = 1000 m/s pod kotom α = 45° glede na smer vodoravnih tračnic. S kolikšno hitrostjo (v) se zaradi tega premakne vagon?

$(M-m)v = mv_0 \cos\alpha$, $v = 7$ m/s

7.16. Mirujoča čolna na jezeru sta povezana z napeto vrvjo. V prvem čolnu je človek, ki vleče vrv s stalno silo F = 200 N. Kolikšna je hitrost prvega čolna glede na obalo (v_1) in glede na drug čoln (v_r) po času t = 2 s od začetka vleka? Masa prvega čolna s človekom vred je m_1 = 450 kg, masa drugega čolna je m_2 = 200 kg.

Izrek: »Sunek sile je enak spremembi gibalne količine« napišemo posebej za prvi in posebej za drugi čoln. Dobimo:

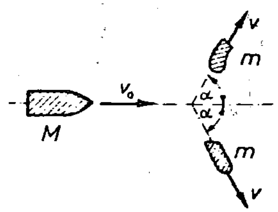
$Ft = m_1v_1 = m_2v_2$
$v_1 = Ft/m_1 = 0{,}9$ m/s = hitrost prvega čolna glede na obalo
$v_2 = Ft/m_2 = 2{,}0$ m/s = hitrost drugega čolna glede na obalo
$v_r = v_1 + v_2 = 2{,}9$ m/s

7.17. Oklepni voz (masa m = 10 t) se giblje enakomerno s hitrostjo v_0 = 10 m/s, ko istočasno ustrelita sprednji in zadnji top. Sprednji izstreli granato z maso m_1 = 500 kg in s hitrostjo v_1 = 500 km/h (glede na voz) v smeri vožnje, zadnji pa izstreli granato z maso m_2 = 200 kg s hitrostjo v_2 = 250 km/h (glede na voz) proti ismeri vožnje. Kolikšna je nova hitrost (v) oklepnega voza?

Ko napišemo enačbo o ohranitvi gibalnih količin, moramo upoštevati hitrosti teles glede na Zemljo:

$mv_0 = (m - m_1 - m_2)v + m_1(v_1 + v_0) - m_2(v_2 - v_0)$
$v = 4$ m/s

7.18. Granata z maso M = 500 kg se giblje s hitrostjo v_0 = 400 m/s, ko se razpoči na enaka dela, ki odletita z enakima hitrostma vsaksebi pod kotom α = 60° glede na prvotno smer gibanja. Kolikšna je njuna hitrost (v)?



$2mv \cos\alpha = Mv_0$
$v = Mv_0/(2m \cos\alpha) = 800$ m/s

7.19. Granata se pri hitrosti v_0 = 10 m/s razdeli na neenaka dela. Težji del, katerega masa je p = 60 odstotkov mase cele granate, se giblje naprej v prvotni smeri s hitrostjo v_1 = 25 m/s. V kateri smeri in s kolikšno hitrostjo se giblje lažji del?

Lažji del odleti s hitrostjo v_2 nazaj, tako da se celotna gibalna količina ne spremeni:

$mv_0 = pmv_1 - (1 - p)mv_2$
$v_2 = (pv_1 - v_0)/(1 - p) = 12{,}5$ m/s

7.20. Na ledu stoječ drsalec z maso $M = 72$ kg odvrže v vodoravni smeri kamen (masa $m = 3$ kg) s hitrostjo $v = 8$ m/s, zaradi česar se začne gibati v nasprotno smer. Za koliko (x) se premakne, če je drsni torni koeficient med drsalkami in ledom $k_t = 0{,}02$?

Začetna hitrost drsalca je $v_0 = mv/M = 0{,}33$ m/s. Po odmetu se drsalec giblje enakomerno pojemajoče s pojemkom $k_t g$. Ustavi se po času $t = v_0/k_t g$ na poti $x = k_t g t^2/2 = v_0^2/(2k_t g) = 0{,}3$ m.

7.21. Kovinska krogla z maso $m = 250$ g se s hitrostjo $v_1 = 6$ m/s v vodoravni smeri zaleti v pokončno ploščo, ki je pritrjena na vzmet za merjenje sile. Meritev pokaže, da plošča deluje na kroglo s silo $F = kt(t_0 - t)$, kjer je $k = 12$ kN/s^2, $t_0 =$ čas trajanja trka $= 0{,}1$ s. S kolikšno hitrostjo (v_2) se krogla odbije od plošče?

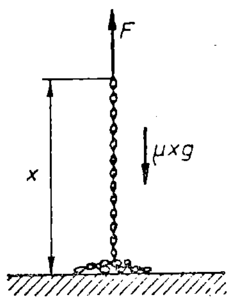
Med trkom (to je v časovnem intervalu od 0 do t_0) prejme krogla sunek sile:

$$\int_0^{t_0} F\,dt = k\int_0^{t_0}(t_0 t - t^2)\,dt = kt_0^3/6$$

ki je usmerjen proč od plošče in je enak spremembi gibalne količine krogle. Če vzamemo smer proč od plošče kot pozitivno, dobimo:

$mv_2 - (-mv_1) = kt_0^3/6$ ali
$v_2 = kt_0^3/6\,m - v_1 = 2$ m/s

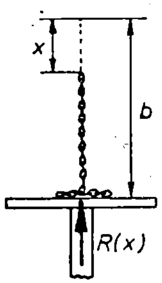
7.22. Na vodoravnih tleh leži veriga; masa na enoto dolžine je μ. En konec verige vlečemo navzgor s silo F. Kako se mora ta sila spreminjati z višino x, da je hitrost (v) dvigajoče se verige stalna?



Na dvignjeni del verige z dolžino x deluje v smeri navzgor sila $F - \mu xg$, katere sunek v kratkem časovnem intervalu dt poveča gibalno količino dvignjenega dela verige za dG:

$dG = (F - \mu xg)dt = d(\mu xv) = v\mu\,dx$
($v =$ konst.)
$F - \mu gx = v\mu\,dx/dt = v^2\mu$ ali
$F = \mu v^2 + \mu gx$

7.23. Verigo z dolžino b in z maso μ na enoto dolžine držimo nad tehtnico, tako da se spodnji konec verige ravno dotika tehtnice. Verigo spustimo; spodnji del verige obmiruje na tehtnici. Kolikšno silo (Q) kaže tehtnica v odvisnosti od poti (x), za katero se spusti zgornji konec verige?



$Q(x) = R(x) + \mu xg.$

kjer je $R(x)$ sila, ki je potrebna za ustavitev verige na tehtnici. Padajoči del verige ima maso

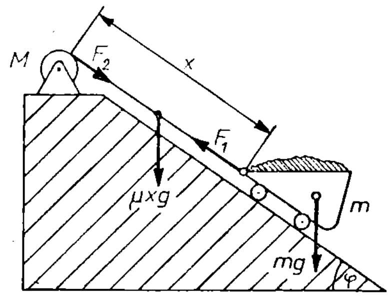
$m = \mu(b - x)$ in hitrost $v = (2gx)^{1/2}$. Njegova gibalna količina mv se zato spreminja z višino. Njena sprememba (dG) je enaka sunku sile $F = (b - x)\mu g - R(x)$:

$F = dG/dt = d(mv)/dt = v\,d(mv)/dx = v^2dm/dx + mv\,dv/dx$
$(b - x)\mu g - R(x) = -\mu v^2 + \mu(b - x)v(g/2x)^{1/2} = -2\mu gx + (b - x)\mu g$
$R(x) = 2\mu gx$

Sila na tehtnico je sestavljena iz teže μgx mirujočega dela verige na tehtnici in iz sile $2\mu gx$, ki padajoči del verige zaustavi na tehtnici.

7.24. Voziček z maso m se začne spuščati po klancu z naklonskim kotom φ. Privezan je na težak kabel (dolžina b, masa na enoto dolžine je μ), ki je navit okrog bobna na vrhu klanca. Masa bobna je M, njegov polmer je R. Kolikšno hitrost (v) doseže voziček v trenutku, ko se kabel odvije z bobna? Trenje zanemarimo.

$mg\sin\varphi - F_1 = ma$
$F_1 + \mu xg\sin\varphi - F_2 = \mu b\,a$
$F_2 R = J\alpha = (MR^2/2)a/R$



Vsak del kabla (tudi tisti, ki je še navit na bobnu) se giblje z enakim pospeškom a kot voziček, zato kabel vzamemo kot celoto. Sila v kablu se zaradi pospešenega gibanja spreminja vzdolž kabla. F_2 je celotna sila, s katero boben ovira pospešeno odvijanje kabla. Iz zgornjih enačb gibanja vozička, kabla in vrtenja bobna eliminiramo sili F_1 in F_2 (ki ju ne potrebujemo) in izračunamo pospešek a vozička (oziroma kabla):

$a = g\sin\varphi\,k(1 + \mu x/m)$, kjer je $k = m/(m + M/2 + \mu b)$
$dv = a\,dt = a\,dx(dt/dx) = (a/v)dx$ ali
$v\,dv = kg\sin\varphi(1 + \mu x/m)dx$

Integriramo z začetnim pogojem $v = 0$ za $x = 0$ in dobimo:

$v^2(x) = 2g\sin\varphi\,k(x + \mu x^2/2m)$ oziroma pri $x = b$:
$v^2 = 2kg\sin\varphi\,(b + \mu b^2/2m)$

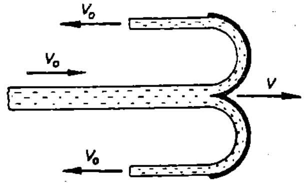
Nalogo lahko rešimo tudi drugače: kabel razdelimo na del, ki se giblje premo vzdolž klanca, in na del, ki se vrti z bobnom. Za premo gibajoči se del kabla velja: $F_1 + \mu xg\sin\varphi - F_2 = d(\mu xv)/dt$, za vrtenje bobna s kablom pa: $F_2 R = d\Gamma/dt = d(Jv/R)/dt$, kjer je J vztrajnostni moment bobna in navitega dela kabla.

7.25. Curek vode z masnim tokom $\Phi_m = 2$ kg/s in s hitrostjo $v = 5$ m/s pod kotom $\varphi = 45°$ brizga na steno ter se enako odbija od nje. S kolikšno silo (F) pritiska curek ob steno?

Računamo podobno kot pri nalogi **7.4.**, le da tu curek kontinuirano udarja ob steno. V kratkem časovnem intervalu dt pade na steno $dm = \Phi_m dt$ vode, katere gibalna količina se ob odboju spremeni za:

$dG = 2v dm \sin\varphi$ (v smeri pravokotno na steno)
$F = dG/dt = 2v \sin\varphi \, dm/dt = 2\Phi_m v \sin\varphi = 14$ N

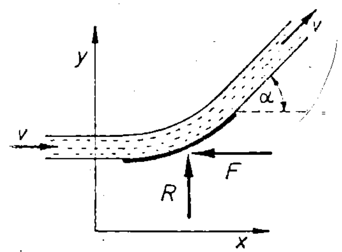
7.26. Vodni curek s presekom $S = 2$ cm^2 s hitrostjo $v_0 = 10$ m/s vpada na lopatico Peltonove turbine. S kolikšno silo (F) odriva lopatico, če ta miruje, in s kolikšno (F_1), če se giblje s hitrostjo $v = 3$ m/s v smeri curka?



$F = dG/dt = 2v_0\Phi_m = 2v_0 \varrho S v_0 = 2\varrho S v_0^2 = 40$ N

V drugem primeru se curek približuje lopatici z relativno hitrostjo $v_0 - v$ in se z enako veliko relativno hitrostjo odbija proč od nje. Hitrost odbitega curka glede na okolico je $v_0 - 2v$ v smeri nazaj. V časovnem intervalu dt se gibalna količina curka spremeni za $dG = dm(v_0 + v_0 - 2v) = 2(v_0 - v)dm = 2(v_0 - v).(v_0 - v)\varrho S dt$.
$F_1 = dG/dt = 2\varrho S(v_0 - v)^2 = 20$ N

7.27. Iz šobe s prerezon S priteka s hitrostjo v vodni curek in vpada na mirujočo lopatico, ki spreminja smer cukra za kot α. Kolikšni sta vzdolžna (F) in prečna (R) komponenta sile, s katero curek odriva lopatico?

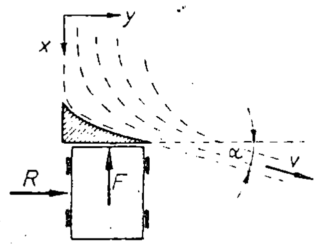


Na območju lopatice je v danem trenutku nekaj vode. V naslednjem kratkem časovnem intervalu dt vstopi na lopatico $dm = S\varrho v dt$ vode, ki prinese v vpadni smeri x gibalno količino $v dm$. Obenem odteka z lopatice enaka množina vode, ki odnese gibalno količino $v dm$ v smeri kot α. Zato velja:

$F = dG_x/dt = (v - v\cos\alpha)dm/dt = S\varrho v^2(1 - \cos\alpha)$
$R = dG_y/dt = v \sin\alpha \, dm/dt = S\varrho v^2 \sin\alpha$

Vzdolžna sila F je največja pri kotu $\alpha = 180°$, ko je $R = 0$. Prečna sila R pa je največja, če se smer curka zasuka za pravi kot.

7.28. Snežni plug se giblje po vodoravni cesti s stalno hitrostjo $u = 20$ km/h in odmetava sneg z masnim tokom $\Phi_m = 50$ t/min. Sneg izstopa iz plužne brane pod kotom $\alpha = 20°$ glede na prečno smer gibanja pluga in sicer s hitrostjo $v = 3$ m/s relativno na brano. S kolikšno silo (F) mora plug potiskati brano naprej in kolikšna sila (R) pritiska na kolesa pluga od strani?

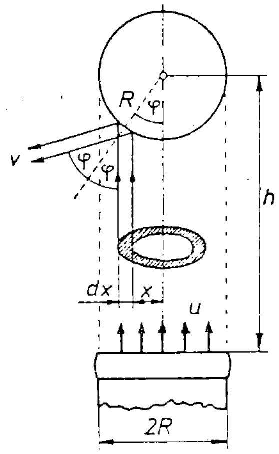


Lahko predpostavimo, da plug miruje in sneg vstopa na brano z relativno hitrostjo u, izstopa pa s hitrostjo v v smeri kota α. Računamo podobno kot pri prejšnji nalogi:

$F = \Phi_m(u - v\sin\alpha) = 3{,}8$ kN
$R = \Phi_m v \cos\alpha = 2{,}4$ kN

7.29. Žoga (masa M) »stoji« na navpičnem vodnem curku, ki izhaja iz šobe s hitrostjo u. Na kolikšni višini (h) nad šobo »sedi«? Premer žoge ($2R$) je majhen v primerjavi z dolžino (višino) curka (h).

Vodni curek udarja ob žogo s hitrostjo v, ki zadošča enačbi: $v^2 = u^2 - 2gh$ (neodvisno od mesta x, kjer udari ob žogo, ker je $h \gg R$). Od žoge se odbije z enako hitrostjo in pod enakim kotom (φ) glede na pravokotnico.



Prerez curka v mislih razdelimo na ozke koncentrične kolobarje. Skozi kolobar s polmerom x in širino dx teče masni tok $d\Phi_m = 2\pi x dx \varrho v$. Temu delu curka se pri udarcu ob žogo spremeni navpična komponenta hitrosti za $\Delta v_z = v - (-v\cos 2\varphi) = v(1 + \cos 2\varphi) = 2v\cos^2\varphi = 2v(1 - x^2/R^2)$. Žoga miruje, če je njena teža enaka celotni sili curka:

$Mg = \int \Delta v_z d\Phi_m = 4\pi\varrho v_0^2 \int_0^R (1 - x^2/R^2)x dx = \pi R^2 \varrho v^2$
$h = (u^2 - v^2)/2g = (u^2 - Mg/\pi\varrho R^2)/2g$

7.30. S kolikšno hitrostjo (u) mora helikopter z vodoravnim propelerjem potiskati zrak navzdol, da lebdi v zraku? Masa helikopterja je M, polmer propelerja je R, povprečna gostota zraka je ϱ.

$Mg = u\Phi_m$ (reakcijska sila zračnega toka) $= S\varrho u^2 = \pi R^2 \varrho u^2$
$u = (Mg/\pi\varrho R^2)^{1/2}$

7.31. Raketa z maso $m = 10$ t se začne gibati navpično navzgor. Po kolikšnem času (t) doseže višino $h = 70$ m, če odmetuje $\Phi_m = 200$ kg/s plinov s stalno relativno hitrostjo $u = 600$ m/s? Zmanjšanje teže rakete zaradi izpušnih plinov zanemarimo.

$u\Phi_m - mg = ma$
$a = u\Phi_m/m - g = 2{,}2$ m/s^2
$h = at^2/2$, $t = 8{,}0$ s

7.32. Mirujoča raketa začne izmetavati pline s stalno hitrostjo $u = 300$ m/s v vodoravni smeri; masni tok iztekajočih se plinov je $\Phi_m = 1$ kg/s. Čez koliko časa (t_1) od začetka doseže raketa hitrost $v_1 = 40$ m/s v vodoravni smeri? Kolikšna je njena vodoravna hitrost (v_0) v trenutku, ko izrabi vso zalogo goriva $m_0 = 1{,}8$ kg? Masa rakete in začetne zaloge goriva je $M = 10$ kg. Upor zraka zanemarimo.

Ker nas zanima le gibanje v vodoravni smeri, teže ni treba upoštevati. V vmesnem trenutku t ima raketa hitrost v in maso $m = M - \Phi_m t$, nanjo pa deluje reakcijska sila $u\Phi_m$ izpušnih plinov, ki je po Newtonovem zakonu enaka produktu ma:

$ma = u\Phi_m = m\,dv/dt$ ali
$dv = u\Phi_m dt/(M - \Phi_m t)$

Po integraciji, upoštevaje začetni pogoj $v = 0$ za $t = 0$, dobimo:

$v = u \ln[M/(M - \Phi_m t)]$ ali
$t = (M/\Phi_m)[1 - \exp(-v/u)]$, $t_1 = 1{,}2$ s

Raketa porabi zalogo goriva v času $t_0 = m_0/\Phi_m$. Tedaj ima hitrost:

$v_0 = u \ln[M/(M - m_0)] = 60$ m/s

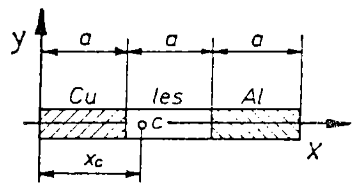
8. TELO – TEŽIŠČE, VZTRAJNOSTNI MOMENT

8.1. Določi težišče palice, ki je sestavljena iz treh enako velikih kosov (vsak je dolg $a = 20$ cm) bakra, lesa in aluminija. Gostota lesa je $\varrho_l = 0{,}8$ g/cm^3, aluminija $\varrho_{Al} = 2{,}7$ g/cm^3 in bakra $\varrho_{Cu} = 8{,}9$ g/cm^3.

$Sa(\varrho_{Cu}a/2 + \varrho_l 3a/2 + \varrho_{Al}5a/2)$
$= Sa(\varrho_{Cu} + \varrho_l + \varrho_{Al})x_c$

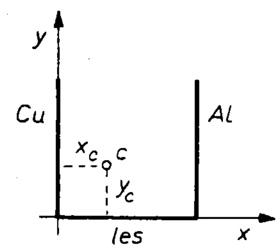
S = presek palice

$x_c = a(\varrho_{Cu} + 3\varrho_l + 5\varrho_{Al})/[2(\varrho_{Cu} + \varrho_l + \varrho_{Al})]$
$x_c = 20$ cm
$y_c = 0$



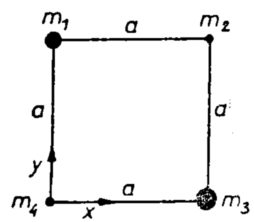
8.2. Naloga je podobna prejšnji, le da je palica na obeh stičiščih prepognjena v pravi kot. Poišči koordinati x_c in y_c nastanega lika.

$x_c = a(0{,}5\varrho_l + \varrho_{Al})/(\varrho_{Cu} + \varrho_l + \varrho_{Al}) = 5{,}0$ cm
$y_c = (a/2)(\varrho_{Cu} + \varrho_{Al})/(\varrho_{Cu} + \varrho_l + \varrho_{Al}) = 9{,}4$ cm

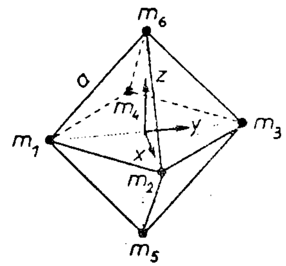


8.3. Kroglice z masami $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, $m_3 = 2$ kg in $m_4 = 0{,}75$ kg so pritrjene v ogliščih kvadrata s stranico $a = 50$ cm. Poišči lego težišča teh kroglic.

$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$
$x_c = a(m_2 + m_3)/m = 29$ cm
$y_c = a(m_1 + m_2)/m = 18$ cm



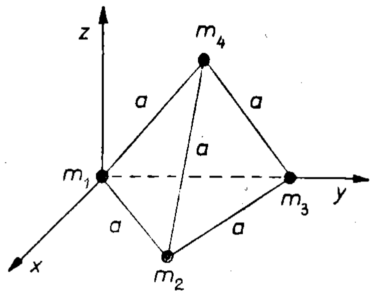
8.4. Točkasta telesa $m_1 = 1$ g, $m_2 = 2$ g, $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$, $m_5 = 3$ g in $m_6 = 4$ g so razporejena po ogliščih oktaedra z robom $a = 20$ cm. Kje je njihovo težišče?



Ker je $m_3 = m_1$ in $m_4 = m_2$, je težišče na osi z, zato računamo le z_c ($x_c = y_c = 0$):

$(2m_1 + 2m_2 + m_5 + m_6)z_c = (m_6 - m_5)a/\sqrt{2}$
$z_c = 1{,}1$ cm .

8.5. Kroglice z masami $m_1 = 1$ dag, $m_2 = 2$ dag, $m_3 = 3$ dag in $m_4 = 4$ dag so razvrščene po ogliščih tetraedra z robom $a = 10$ cm. Poišči njihovo težišče.



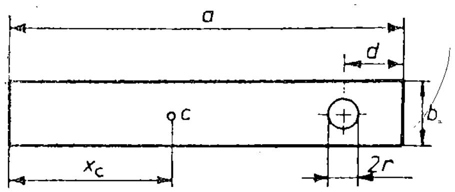
$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$

$x_c = (a\sqrt{3}/6)(3m_2 + m_4)/m = 2{,}9$ cm

$y_c = (a/2)(m_2 + 2m_3 + m_4)/m = 6{,}0$ cm

$z_c = a\sqrt{2/3}\, m_4/m = 3{,}3$ cm

8.6. Poišči težišče lesene deske (dolžina $a = 100$ cm, širina $b = 10$ cm), ki ima na razdalji $d = 20$ cm od roba izvrtano okroglo luknjo s polmerom $r = 5$ cm.

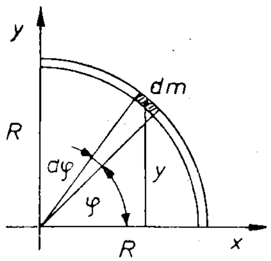


Deska z luknjo je, kar se tiče računanja težišča, ekvivalentna polni deski in luknji z negativno maso.

$(abc\varrho - \pi r^2 c\varrho)x_c =$
$= abc\varrho a/2 - \pi r^2 c\varrho(a - d)$
$x_c = [a^2b/2 - \pi r^2(a - d)]/(ab - \pi r^2) =$
$= 47$ cm

8.7. Tanko žico zvijemo v četrtino krožnega loka s polmerom R. Masa na enoto dolžine žice je μ.

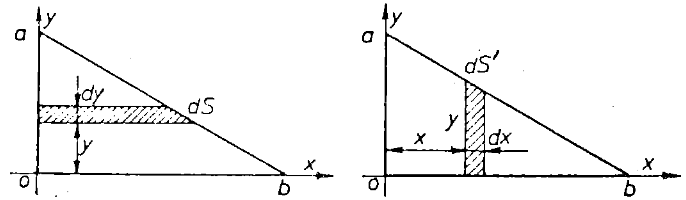
Poišči težišče zvite žice.



$x_c = y_c$
$y_c(\pi R/2)\mu = \int y dm$
$= \int_0^{\pi/2} R \sin\varphi\, \mu R d\varphi$
$y_c = (2R/\pi) \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi$
$y_c = 2R/\pi$

8.8. Poišči težišče tanke ploščice, ki ima obliko pravokotnega trikotnika s katetama $a = 10$ cm in $b = 15$ cm.

$y_c S = \int y dS$, $dS = x dy$, $S = ab/2$
$y_c ab/2 = b\int_0^a (1 - y/a)y dy = ba^2/6$
$y_c = a/3 = 3{,}3$ cm
$x_c S = \int x dS'$, $dS' = y dx = a(1 - x/b)dx$
$x_c = b/3 = 5$ cm



8.9. Poišči težišče četrtine krožne ploščice s polmerom $R = 15$ cm, nato še za polovico in tri četrtine krožne ploščice.

a) četrtina ploščice: $x_c = y_c$

$y_c \pi R^2/4 = \int_0^R (R^2 - y^2)^{1/2} y dy = R^3/3$, $y_c = 4R/3\pi$

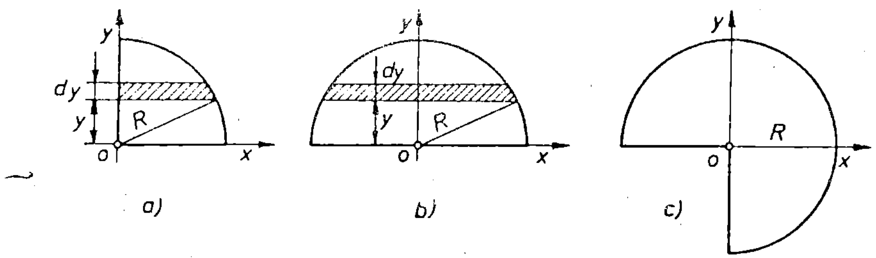
b) polovica ploščice: sestavljena je iz dveh četrtin, ki sta zrcalno simetrični glede na os y:

$x_c = 0$, $y_c \pi R^2/2 = 2(\pi R^2/4)(4R/3\pi)$, $y_c = 4R/3\pi$

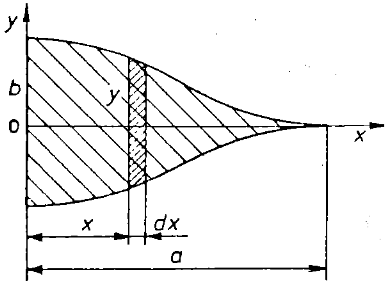
c) tri četrtine ploščice: $x_c = y_c$

$y_c \cdot 3\pi R^2/4 = (\pi R^2/4)(4R/3\pi)$, $y_c = 4R/9\pi$

Krajni četrtini, ki sta diagonalno simetrični, imata skupno težišče v koordinatnem izhodišču, zato upoštevamo le srednjo četrtino.



8.10. Poišči težišče ravne ploskve, ki je omejena s krivuljo $y = \pm(b/2)(1 + \cos(\pi x/a))$.



$S = 2\int_0^a y\,dx = ab$

$y_c = 0$

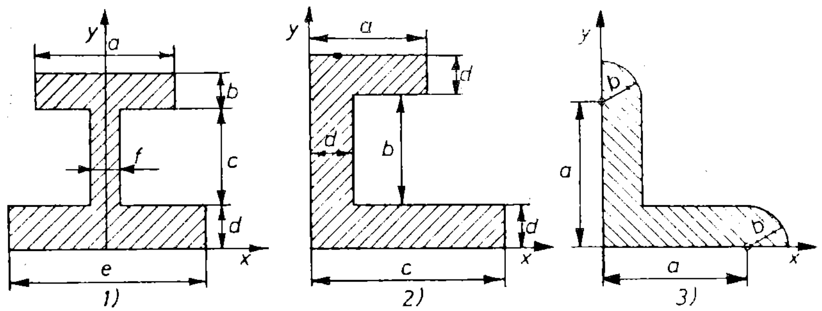
$x_c = (2/S)\int_0^a xy\,dx$

$x_c = (a/2)(1 - 4/\pi^2)$

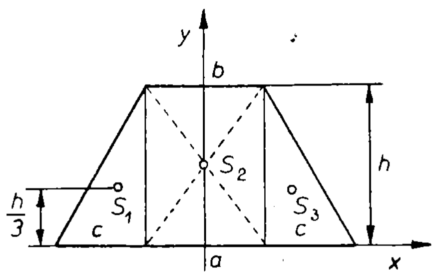
$x_c = 0{,}3\ a$

8.11. Poišči lego težišča ravnih likov na sliki.

1. $x_c = 0,\ y_c(ed + cf + ab) = edd/2 + cf(d + c/2) + ab(d + c + b/2)$
2. $y_c(a + b + c) = cd/2 + b(d + b/2) + a(b + 3d/2)$
   $x_c(a + b + c) = c^2/2 + bd/2 + a^2/2$
3. $x_c = y_c$
   $y_c(2a - b + \pi b/2) = ab/2 + a^2/2 + b^2/6 + \pi ab/4$



8.12. Poišči težišče ploščice v obliki enakokrakega trapeza z osnovnicama a in b ter višino h.



$S_1 = S_3 = ch/2$.

$S_2 = bh$

$x_c = 0$

$y_c\ (S_1 + S_2 + S_3) = S_1h/3 + S_2h/2 + S_3h/3$

$y_c = (h/3)(a + 2b)/(a + b)$

8.13. Izračunaj lego težišča naslednjih homogenih, rotacijsko simetričnih teles:
a) prisekanega stožca (R_1 = spodnji polmer, R_2 = zgornji polmer, h = višina)
b) votle polkroge (R_2 = zunanji polmer, R_1 = notranji polmer)
c) kocke z izsekano polkroglo (a = stranica kocke, $R = a/2$ = polmer polkroglastega izseka)
č) valjastega stolpa s stožčasto streho (R = polmer valja in stožca, h_1 = višina valja, h_2 = višina stožca)

a) m = masa prisekanega stožca $= \varrho\pi h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)/3$

$z_c = (1/m)\int z\,dm = (\pi\varrho/m)\int_0^h zr^2dz,\ r = R_1 - (R_1 - R_2)z/h$

$z_c = (h/4)(R_1^2 + 2R_1R_2 + 3R_2^2)/(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$

Cel stožec: $R_2 = 0,\ R_1 = R,\ z_c = h/4$

b) $m = 2\pi(R_2^3 - R_1^3)\varrho/3$ = masa votle polkrogle

$z_c = (\pi\varrho/m)(R_2^2 - R_1^2)\int_0^{R_1} z\,dz + (\pi\varrho/m)\int_{R_1}^{R_2} zr^2dz,\ r^2 = R_2^2 - z^2$

$z_c = (3/8)(R_2^4 - R_1^4)/(R_2^3 - R_1^3)$

Polna polkrogla: $R_1 = 0,\ R_2 = R,\ z_c = 3R/8$

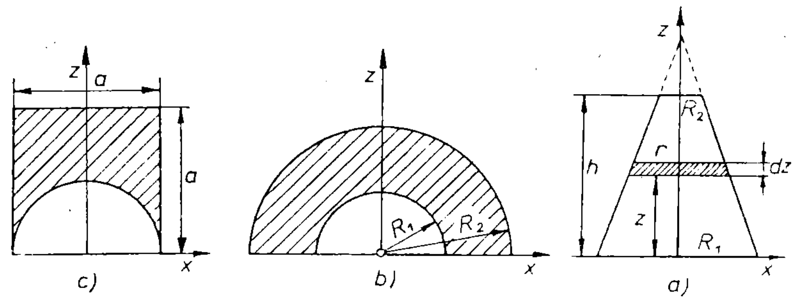
c) vzamemo polno kocko in pokroglo z negativno maso:

$z_c(\varrho a^3 - \varrho\pi a^3/12) = \varrho a^3a/2 - \pi(\varrho a^3/12)\cdot 3a/16$

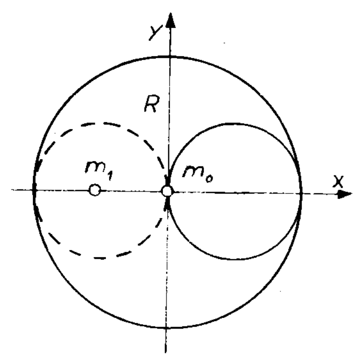
$z_c = a(1 - \pi/32)/(2 - \pi/6) = 0{,}61\ a$

č) $z_c\pi R^2\varrho(h_1 + h_2/3) = \pi R^2h_1\varrho h_1/2 + (\pi R^2h_2\varrho/3)(h_1 + h_2/4)$

$z_c = (h_2^2 + 4h_1h_2 + 6h_1^2)/4(3h_1 + h_2)$



8.14. Poišči težišče valja s polmerom R, iz katerega je izrezan manjši valj s polmerom $R/2$. Os izrezanega valja je za $R/2$ od osi večjega valja.



Valj z izvrtino lahko nadomestimo z valjem z dvema simetrično ležečima izvrtinama in z valjem s polmerom $R/2$ in maso $m_1 = \pi(R/2)^2h\varrho$.

$y_c = 0$

$z_c = h/2$, h = višina valja

$x_c(m_1 + m_0) = - m_1R/2,$

m_0 = masa valja z dvema izvrtinama =

$= (\pi R^2 - 2\pi R^2/4)\varrho h =$

$= \pi\varrho hR^2/2$

$x_c = -R/6$

Nalogo lahko rešimo tudi s pomočjo negativne mase: vzamemo poln valj in izvrtino z negativno maso.

$x_c(m - m_1) = (R/2)(-m_1)$,
$m = \pi\varrho h R^2$
$x_c = -R/6$

8.15. Enakostranični valj je pokrit s polkroglo z enakim polmerom R. V kakšnem medsebojnem razmerju morata biti gostoti obeh teles, da je težišče sestavljenega telesa na meji med valjem in polkroglo?

$m_k = (2\pi R^3/3)\varrho_k$ = masa polkrogle
$m_v = 2\pi R^3\varrho_v$ = masa valja
$z_c(m_k + m_v) = m_v R + m_k(2R + 3R/8)$
$z_c = (R/8)(24\varrho_v + 19\varrho_k)/(3\varrho_v + \varrho_k)$

Zahtevamo $z_c = 2R$.

$\varrho_k/\varrho_v = 8$

8.16. Pokončna piramida s kvadratno osnovno ploskvijo (stranica a, višina h) je narejena iz snovi, katere gostota se z višino z spreminja po enačbi: $\varrho(z) = \varrho_0(1 + Kz)$; ϱ_0 je gostota na dnu piramide ($z = 0$), K je znana konstanta. Izračunaj težišče te piramide.

$m = \int_0^h \varrho(z)x^2 dz = (a^2 h\varrho_0/3)(1 + Kh/4)$ = masa piramide,
$x = a(h - z)/h$

$z_c = (1/m)\int z dm = (1/m)\int_0^h z(1 + Kz)(h - z)^2 dz\, a^2\varrho_0/h^2$
$z_c = (h/5)(5 + 2Kh)/(4 + Kh)$

Za homogeno snov je $K = 0$ in $z_c = h/4$.

8.17. Litina novo srebro vsebuje p_1 = 65 odstotkov bakra (gostota ϱ_1 = 8,93 g/cm³), p_2 = 20 odstotkov cinka (ϱ_2 = 7,15 g/cm³) in p_3 = 15 odstotkov niklja (ϱ_3 = = 8,90 g/cm³). Kolikšna je povprečna gostota litine, če se odstotki nanašajo na volumen (ϱ'), in kolikšna (ϱ''), če se nanašajo na maso?

a) $m = \varrho' V = \varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2 + \varrho_3 V_3$

$V_1 = p_1 V,\ V_2 = p_2 V,\ V_3 = p_3 V$

$\varrho' = p_1\varrho_1 + p_2\varrho_2 + p_3\varrho_3 = 8{,}57$ g/cm³

b) $V = m/\varrho'' = m_1/\varrho_1 + m_2/\varrho_2 + m_3/\varrho_3$

$m_1 = p_1 m,\ m_2 = p_2 m,\ m_3 = p_3 m$

$1/\varrho'' = p_1/\varrho_1 + p_2/\varrho_2 + p_3/\varrho_3$

$\varrho'' = 8{,}50$ g/cm³

8.18. Krogla s polmerom R ima v sredi okroglo jedro s polmerom R_0. Gostota sredine je ϱ_0 = 7,8 g/cm³, zunanjega dela pa ϱ = 2,7 g/cm³. Poišči razmerje R/R_0, če je povprečna gostota krogle $\bar{\varrho}$ = 3,3 g/cm³.

$\bar{\varrho}4\pi R^3/3 = \varrho_0 4\pi R_0^3/3 + \varrho 4\pi(R^3 - R_0^3)/3$
$R/R_0 = [(\varrho_0 - \varrho)/(\bar{\varrho} - \varrho)]^{1/3} = 2$

8.19. Steber (dolžina a = 5 m, presek S = 1 m²) ima na spodnjem koncu gostoto ϱ_0 = 2,2 t/m³, zgoraj pa $\varrho_1 = 0{,}8\,\varrho_0$. Vmes se gostota spreminja eksponentno z višino. Izračunaj maso in povprečno gostoto stebra.

$\varrho(z) = \varrho_0\exp(-kz)$
$\varrho_1 = \varrho_0\exp(-ka)$ ali $k = (1/a)\ln(\varrho_0/\varrho_1) = 0{,}045$/m
$m = S\int_0^a \varrho(z)dz = S\varrho_0\int_0^a \exp(-kz)dz = S(\varrho_0/k)(1 - \exp(-ka))$
$m = (S/k)(\varrho_0 - \varrho_1) = 9{,}9$ t
$\bar{\varrho} = m/V = (\varrho_0 - \varrho_1)/ka = 2{,}0$ t/m³

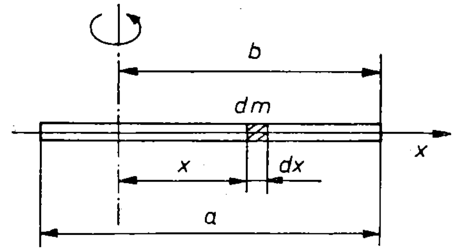
8.20. Izračunaj maso in povprečno gostoto nehomogene krogle s polmerom R = = 4,0 dm, katere gostota se spreminja z oddaljenostjo od središča po enačbi:

$\varrho = \varrho_0(1 - r^2/4R^2)$, ϱ_0 = 5,0 kg/dm³.

$m = 4\pi\int_0^R \varrho(r)r^2 dr = 4\pi\varrho_0\int_0^R (1 - r^2/4R^2)r^2 dr$
$m = 17\pi\varrho_0 R^3/15 = 1{,}1$ t
$\bar{\varrho} = m/V = 17\varrho_0/20 = 4{,}2$ kg/dm³

8.21. Izračunaj vztrajnostni moment tanke homogene palice (dolžina a, masa m) glede na os, ki je pravokotna na palico in za b oddaljena od konca palice.

$dm = (m/a)dx$
$dJ = x^2 dm = (m/a)x^2 dx$
$J = (m/a)\int_{b-a}^{b} x^2 dx$
$J = (m/3a)[(a - b)^3 + b^3]$
$J = (m/a)(ab^2 - a^2 b + a^3/3)$



Posebna primera:
$b = a$ (os skozi konec palice): $J = ma^2/3$
$b = a/2$ (os skozi sredino palice): $J = ma^2/12$

8.22. Izračunaj vztrajnostni moment (J_1) tanke homogene palice (masa m, dolžina a) za os, ki gre skozi sredino palice in oklepa s palico kot α. Kolik je vztrajnostni moment (J_2) te palice glede na os, ki je vzporedna palici in oddaljena od nje za b? Kaj pa (J_3) za os, ki je pravokotna na palico in oddaljena od njene sredine za c?

$J_1 = m(a\sin\alpha)^2/12$
$J_2 = mb^2$ (vsa snov palice je za b oddaljena od osi)
$J_3 = m(c^2 + a^2/12)$ (glej prejšnjo nalogo za $b = c + a/2$)

8.23. Izračunaj vztrajnostni moment tanke nehomogene palice (masa m, dolžina a) glede na os, ki gre skozi težišče palice in je pravokotna nanjo. Gostota palice se spreminja s koordinato x vzdolž palice po enačbi: $\varrho = \varrho_0(1 - x/2a)$; ϱ_0 je gostota palice na začetku $x = 0$.

Najprej izračunamo težišče palice:

$$x_c = (1/m)\int x\mathrm{d}m = (1/m)S\int_0^a \varrho(x)x\mathrm{d}x = (S\varrho_0/m)\int_0^a (1 - x/2a)x\mathrm{d}x$$

kjer je S = presek palice.

$$m = S\int_0^a \varrho(x)\mathrm{d}x = 3S\varrho_0 a/4 \text{ ali } S = 4m/(3\varrho_0 a)$$

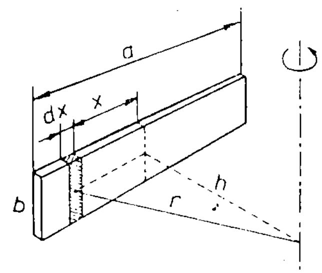
$$x_c = 4a/9$$

$$J = \int (x - x_c)^2\mathrm{d}m = S\varrho_0\int_0^a (1 - x/2a)(x - 4a/9)^2\mathrm{d}x$$

$$J = 13S\varrho_0 a^3/216$$

$$J = 13\,ma^2/16\cancel{5}2$$

8.24. Izračunaj vztrajnostni moment tanke deske (masa m, dolžina a, širina b) glede na os, ki je pravokotna na dolžino deske in oddaljena od nje za h.



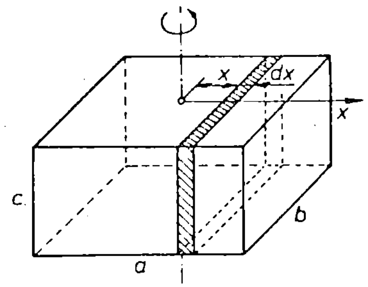
$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m = (h^2 + x^2)(m/a)\mathrm{d}x$$

$$J = 2(m/a)\int_0^{a/2} (h^2 + x^2)\mathrm{d}x$$

$$J = mh^2 + ma^2/12$$

Rezultat lahko dobimo neposredno s Steinerjevim stavkom.

8.25. Izračunaj vztrajnostne momente kvadra (masa m, stranice a, b in c) glede na tri geometrijske, med seboj pravokotne osi.

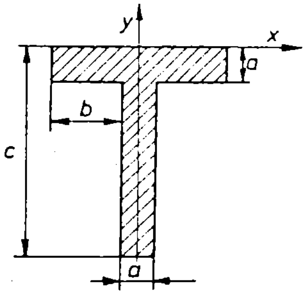


Kvader v mislih razrežemo na tanke, vzporedne plasti. Vztrajnostni moment ene takšne plasti z debelino $\mathrm{d}x$ na oddaljenosti x od osi je $\mathrm{d}J = \mathrm{d}m \cdot b^2/12 + \mathrm{d}mx^2$ (glej prejšnjo nalogo), kjer je $\mathrm{d}m = (m/a)\mathrm{d}x$ masa plasti.

$J = \int \mathrm{d}J = mb^2/12 + ma^2/12 = (m/12)(b^2 + a^2) = J_c$
(vztrajnostni moment glede na os, ki je vzdolž stranice c)

J_a (vzdolž stranice a) $= (m/12)(b^2 + c^2)$
$J_b = (m/12)(c^2 + a^2)$

8.26. Izračunaj vztrajnostna momenta J_x in J_y črke T, ki je izrezana iz tanke pločevine. Masa črke je m.



Črko T razstavimo na tri ploščice, od katerih sta krajni enaki:

$J_x = 2abd\varrho a^2/3 + acd\varrho c^2/3$
$J_x = m(2a^2b + c^3)/(6b + 3c)$
$J_y = ad\varrho(2b + a)^3/12 + ad\varrho(c - a)a^2/12$
$J_y = m[(2b + a)^3 + (c - a)a^2]/(24b + 12c)$

8.27. Izračunaj vztrajnostni moment votlega valja z maso m, višino h, notranjim polmerom R_1 in zunanjim R_2. Iz dobljenega rezultata izpelji vztrajnostni moment tankega obroča.

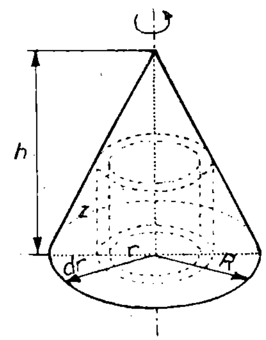
Valj v mislih razrežemo na tanke koaksialne plasti. Plast s polmerom r in debelino $\mathrm{d}r$ ima maso $\mathrm{d}m = 2r\mathrm{d}rm/(R_2^2 - R_1^2)$, njen vztrajnostni moment je $\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m$. Celotni vztrajnostni moment je:

$$J = \int \mathrm{d}J = [2m/(R_2^2 - R_1^2)]\int_0^R r^3\mathrm{d}r = [2m/(R_2^2 - R_1^2)](R_2^4 - R_1^4)/4$$

$$J = (m/2)(R_2^2 + R_1^2)$$

Za poln valj je $R_1 = 0$ in $R_2 = R$ ter $J = mR^2/2$, za tanek obroč pa $R_1 \approx R_2 = R$ in $J = mR^2$.

8.28. Izračunaj vztrajnostni moment stožca (masa m, polmer R, višina h) glede na njegovo geometrijsko os.

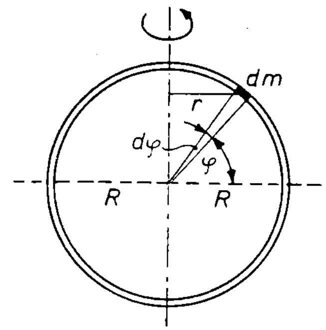


$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m$
$\mathrm{d}m = (3m/\pi R^2h)2\pi rz\mathrm{d}r$
$z = h(1 - r/R)$

$$J = (6m/R^2)\int_0^R (1 - r/R)r^3\mathrm{d}r$$

$$J = 3mR^2/10$$

8.29. Izračunaj vztrajnostni moment tankega obroča (masa m, polmer R) glede na diametralno os.



$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m = (R\cos\varphi)^2(m/2\pi)\mathrm{d}\varphi$
$J = \int \mathrm{d}J$

$$J = (mR^2/2\pi)\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$J = mR^2/2$$

8.30. Izračunaj vztrajnostni moment tanke krožne ploščice glede na njeno diametralno os. Masa ploščice je m, polmer je R.

Ploščico v mislih razrežemo na tanke trakove, vzporedne vrtilni osi. Trak z oddaljenosti r od osi je širok $\mathrm{d}r$ in visok $2z$, kjer je $z^2 = R^2 - r^2$. Njegova masa je $\mathrm{d}m = (m/\pi R^2) \cdot 2z\mathrm{d}r$, vzrajnostni moment pa $\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m$.

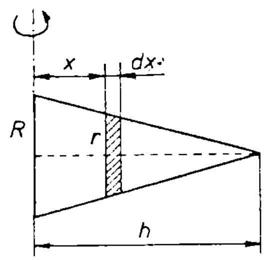
$$J = \int \mathrm{d}J = (4m/\pi R^2)\int_0^R r^2(R^2 - r^2)^{1/2}\mathrm{d}r = mR^2/4$$

8.31. Izračunaj vztrajnostni moment valja glede na os, ki je pravokotna na geometrijsko os valja in gre skozi njegovo središče. Masa valja je m, polmer je R, dolžina je h.

Valj v mislih razrežemo na krožne ploščice z debelino $\mathrm{d}x$. Ploščica z oddaljenosti x od osi ima maso $\mathrm{d}m = (m/h)\mathrm{d}x$ in vzrajnostni moment $\mathrm{d}J = x^2\mathrm{d}m + \mathrm{d}m\, R^2/4$ (upoštevamo Steinerjev stavek in rezultat prejšnje naloge).

$$J = \int \mathrm{d}J = 2(m/h)\int_0^R (x^2 + R^2/4)\mathrm{d}x = mR^2/4 + mh^2/12$$

8.32. Izračunaj vztrajnostni moment stožca glede na os, ki gre skozi sredino osnovne ploskve in je pravokotna na višino stožca (diametralna os osnovne ploskve). Masa stožca je m, višina je h, polmer je R.



Postopamo enako kot pri prejšnji nalogi, le da zdaj polmeri posameznih ploščic niso enaki. Ploščica z odaljenosti x od osi ima polmer $r = R(1 - x/h)$, maso $\mathrm{d}m = (3m/\pi R^2 h)\,\pi r^2\mathrm{d}x$ in vztrajnostni moment $\mathrm{d}J = x^2\mathrm{d}m + r^2\mathrm{d}m/4$.

$$J = (3m/h)\int_0^h (1 - x/h)^2[x^2 + (R^2/4)(1 - x/h)^2]\mathrm{d}x$$
$$J = mh^2/10 + 3mR^2/20$$

8.33. Izračunaj vztrajnostne momente rotacijskih teles, ki nastanejo z vrtenjem narisanih likov okrog osi x ali osi y.

1. $J_x = mb^2/2$, $J_y = ma^2/2$ (valj), m = masa telesa
2. $J_x = 3mb^2/10$
   $J_y = 3ma^2/5$ (iz polnega valja izrežemo stožec)
3. $J_x = 2mb^2/5$, $J_y = 2ma^2/5$
4. $J_x = \int y^2\mathrm{d}m = 2\pi\varrho\int_0^b y^3(a - x)\mathrm{d}y = \pi\varrho b^4 a/6$

Ker je $m = \pi\varrho ab^2/2$ masa nastalega rotacijskega telesa, dobimo:

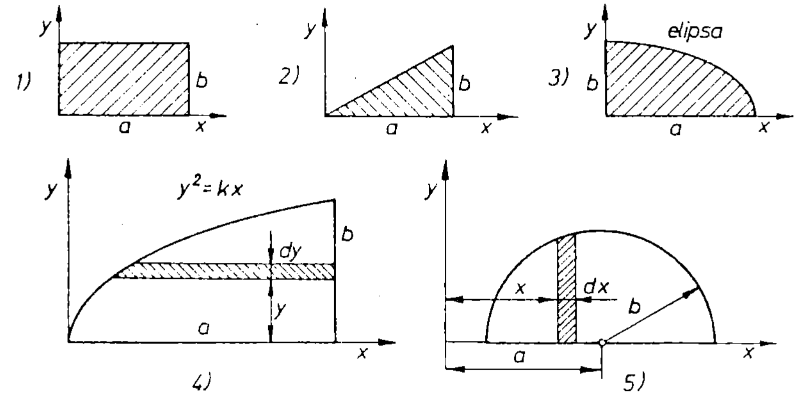
$$J_x = mb^2/3.$$
$$J_y = \int x^2\mathrm{d}m = \int_0^a x^2 2\pi\varrho xy\mathrm{d}x = 5ma^2/9,$$

kjer je $m = 4\pi\varrho a^2 b/5$ masa nastalega telesa.

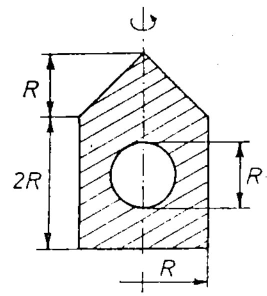
5. $J_x = 2ma^2/5$ (krogla)
   $J_y = \int x^2\mathrm{d}m = 2\pi\varrho\int_{a-b}^{a+b} x^3 y\mathrm{d}x, \quad y^2 = b^2 - (x - a)^2$

Vstavimo novo spremenljivko: $\sin\alpha = (x - a)/b$ in dobimo:

$$J_y = 2\pi\varrho b^2\int_0^\pi (a + b\sin\alpha)^3\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$
$$J_y = \pi^2\varrho ab^2(a^2 + 3b^2/4), \quad m = \pi^2\varrho ab^2$$
$$J_y = ma^2 + 3mb^2/4$$



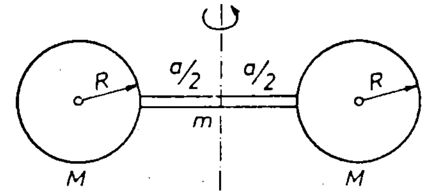
8.34. Rotacijsko telo je sestavljeno iz stožca (polmer R, višina R) in iz pokončnega valja (polmer R, višina $2R$), ki ima na sredini izvrtano luknjo s polmerom $R/2$). Gostota snovi je ϱ. Kolik je vztrajnostni moment telesa glede na simetrijsko os?



$J = 3m_sR^2/10 + m_vR^2/2 - 2m_kR^2/20$
m_s = masa stožca $= \varrho\pi R^3/3$
m_v = masa polnega valja $= 2\varrho\pi R^3$
m_k = masa izvrtane krogle $= \varrho\pi R^3/6$
m = masa celotnega telesa $= m_s + m_v - m_k = 13\varrho\pi R^3/6$
$J = 13\varrho\pi R^5/12 = mR^2/2$

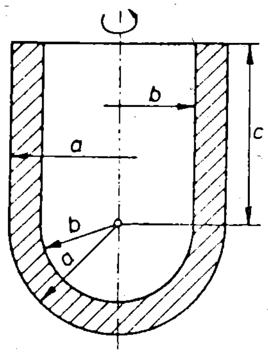
8.35. Telovadna ročka je sestavljena iz dveh krogel (masa M, polmer R), ki sta pritrjeni na konceh tanke homogene palice (masa m, dolžina a). Kolikšen je vztrajnostni moment ročke glede na os, ki gre pravokotno skozi sredino palice?

$J = ma^2/12 + 2J_k$
$J_k = 2MR^2/5 + M(R + a/2)^2 = 7Ma^2/5 + MaR + Ma^2/4$
$J = ma^2/12 + 14MR^2/5 + 2MaR + Ma^2/2$



8.36. Valjast lonec ima polkroglasto dno, notranji polmer je b, zunanji polmer je a, višina je c. Narejen je iz snovi z gostoto ϱ. Kolikšen je vztrajnostni moment lonca glede na simetrijsko os?

Lonec je sestavljen iz votlega valja in iz votle polkrogle:

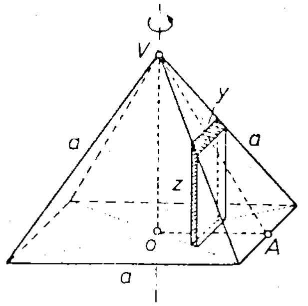


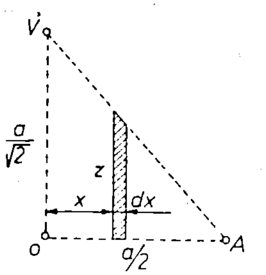
$J = J_v + J_k$
$J_v = \pi a^2 c\varrho a^2/2 - \pi b^2 c\varrho b^2/2 = (\pi c\varrho/2)(a^4 - b^4)$
$J_k = (2\pi a^3\varrho/3)\cdot 2a^2/5 - (2\pi b^3\varrho/3)\cdot 2b^2/5 =$
$= (4\pi\varrho/15)(a^5 - b^5)$
$J = (\pi c\varrho/2)(a^4 - b^4) + (4\pi\varrho/15)(a^5 - b^5)$

8.37. Poišči izraz za vztrajnostni moment pokončne, enakostranične, štiristrane piramide glede na njeno geometrijsko os.

Piramido razdelimo vzdolž stranskih robov na štiri enake dele, vsako četrtino pa na pokončne pravokotne plasti. Plast z oddaljenosti x od osi ima širino $y = 2x$, višino $z = (a - 2x)/\sqrt{2}$ in debelino dx. Njen vztrajnostni moment je (glej nalogo 8.23.):

$dJ = x^2 dm + y^2 dm/12,$ kjer je $dm = \varrho yzdx$
$J = 4\int dJ = (16/3)\int x^2 dm = (16\varrho/3)\int_0^{a/2} x^2 zydx$
$J = \varrho a^5/(30\sqrt{2}) = ma^2/10,$ $m = \varrho a^3/(3\sqrt{2})$ = masa piramide.





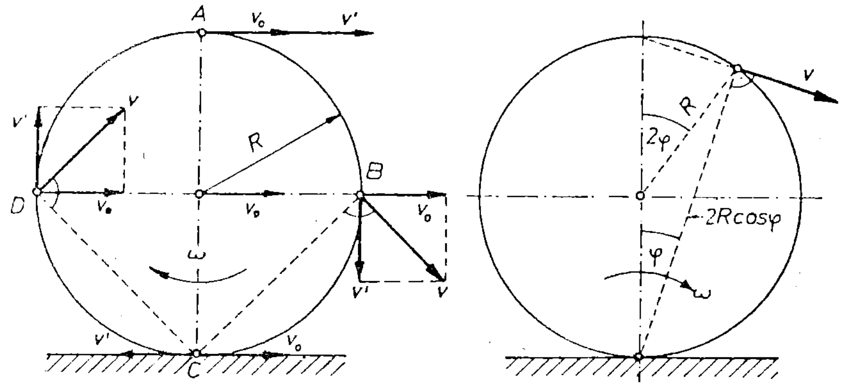
8.38. Naloga je podobna prejšnji, le da vrtilna os leži v osnovni ploskvi in je simetrala njenih stranskih robov.

Piramido zdaj razrežemo na kvadrataste plasti, vzporedno z osnovno ploskvijo. Plast z oddaljenosti z od osi ima stranico $y = a - \sqrt{2}\,z$ in maso $dm = \varrho y^2 dz$. Njen vztrajnostni moment je $dJ = z^2 dm + y^2 dm/12$.

$J = \varrho\int_0^{a/\sqrt{2}} z^2(a - \sqrt{2}\,z)^2 dz + (\varrho/12)\int_0^{a/\sqrt{2}}(a - \sqrt{2}\,z)^4 dz$
$J = \varrho a^5/60\sqrt{2} + \varrho a^5/5\sqrt{2} = 13\varrho a^5/60\sqrt{2} = 13\,ma^2/20$

9. VRTENJE TOGEGA TELESA OKROG STALNE OSI IN KOTALJENJE

9.1. Valj s polmerom R = 10 cm se kotali po vodoravnih tleh; njegovo težišče se giblje enakomerno s hitrostjo v_0 = 0,5 m/s. Kolikšne hitrosti imajo mesta A, B, C in D?



Kotaljenje brez podrsavanja lahko predstavimo kot čisto vrtenje okrog trenutne osi, ki gre skozi dotikališče telesa s podlago.

$v' = R\omega = v_0$
$v = 2R\omega\cos\varphi$
$v_A = 2v_0\ (\varphi = 0),\ v_B = v_D = v_0\sqrt{2}$ $(\varphi = 45°)$
$v_C = 0\ (\varphi = 90°)$

9.2. Jermen vleče jermenico (ki ima polmer R = 60 cm in vztrajnostni moment J = 1000 kgm²) s tangentno silo F = 2 kN. S kolikšnim kotnim pospeškom se vrti jermenica?

$\alpha = M/J = FR/J = 1{,}2/s^2$

9.3. Gred z vztrajnostnim momentom J = 10 kgm² vrtimo s stalnim navorom M = 10 Nm. Gred je prek jermena povezana z enako gredjo, na kateri je pritrjeno kolo s polmerom R = 20 cm. Kolik je tangentni pospešek (a_t) na obodu tega kolesa?

$a_t = R\alpha = RM/J = 0{,}2\ m/s^2$

9.4. Na osi elektromotorja je pritrjeno zobato kolo z maso $m = 6$ kg in vztrajnostnim radijem $r = 2$ m. Elektromotor vrti zobato kolo z navorom $M = 200$ Nm. Kolikšna je kotna hitrost kolesa (ω_1) po času $t_1 = 3$ s od začetka vrtenja? V kolikšnem času (t) se kolo zasuče $n = 100$ krat?

$M = J\alpha$, $\alpha = M/J = M/(mr^2) = 8{,}3/\mathrm{s}^2$
$\omega_1 = \alpha t_1 = 25/\mathrm{s}$
$\varphi = n2\pi = \alpha t^2/2$, $t = (2\varphi/\alpha)^{1/2} = 12$ s

9.5. Vztrajnik v obliki valja z maso $m = 100$ kg in polmerom $R = 50$ cm se vrti okrog geometrijske osi s stalno kotno hitrostjo $\omega_0 = 5/\mathrm{s}$. V trenutku $t = 0$ začne delovati zaviralni navor $M = -b\omega^2$ ($b = 2$ Nms^2). Po kolikšnem času (t_1) se kotna hitrost vztrajnika zmanjša na polovico? Koliko vrtljajev (n) napravi v tem času?

$M = J\alpha$, $J = mR^2/2 = 12{,}5$ kgm^2
$-b\omega^2 = J\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
$\omega^{-2}\mathrm{d}\omega = -(b/J)\mathrm{d}t$, $\omega = \omega_0$ pri $t = 0$
$1/\omega = 1/\omega_0 + (b/J)t$, $\omega = \omega_0/2$ za $t = t_1$
$t_1 = J/b\omega_0 = 1{,}25$ s
$\mathrm{d}\varphi = \omega \mathrm{d}t = (1/\omega_0 + bt/J)^{-1}\mathrm{d}t$
$\varphi = (J/b)\ \ln(1 + b\omega_0 t_1/J) = 2\pi n$
$n = mR^2(\ln 2)/4\pi b = 0{,}7$

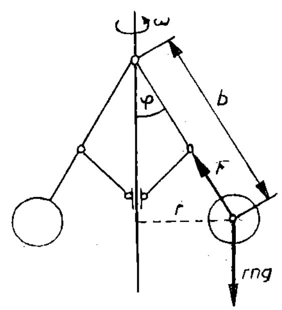
9.6. Valj z maso $M = 20$ kg in polmerom $R = 20$ cm je vrtljiv okrog vodoravne osi. Okrog valja je navita vrv, na kateri visi utež z maso $m = 1$ kg. Utež spustimo in valj se začne pospešno vrteti. Kolikšna sta kotni pospešek valja in pospešek padanja uteži (a)? Kolikšna je sila (F) v vrvi?

$mg - F = ma$ enačba padanja uteži
$FR = J\alpha = MR^2\alpha/2$ enačba vrtenja valja

Ker je pospešek a padanja uteži enak tangentnemu pospešku na obodu valja, je $a = R\alpha$ in dobimo:

$a = g/(1 + M/2m) = 0{,}9$ m/s^2
$\alpha = a/R = 4{,}5/\mathrm{s}^2$
$F = mg/(1 + 2m/M) = 8{,}9$ N

9.7. Centrifugalni regulator kroženja je sestavljen iz štirih lahkih palic in dveh krogel. Razdalja od pritrdišča palice na os do središča krogle je $b = 30$ cm. Kolikšen kot (φ) oklepa palica z osjo, če se vrti s frekvenco $\nu = 120$/min? Kolikšna sila (F) tedaj nateza palico? Masa krogle je $m = 6$ kg.

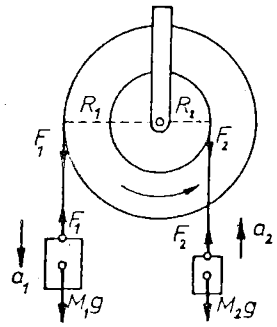


$F \sin\varphi = mr\omega^2 = mb \sin\varphi\ \omega^2$
$F \cos\varphi = mg$

Iz enačb izračunamo:

$F = mb(2\pi\nu)^2 = 284$ N
$\cos\varphi = (g/b)(2\pi\nu)^{-2}$
$\varphi = 78°$

9.8. Valjasti kolesi polmera R_1 in R_2 sta pritrjeni na skupno os. Po obodu koles sta naviti vrvici, na katerih visita uteži mase M_1 in M_2. Kolikšna sta pospeška obeh uteži (a_1 in a_2) in s kolikšnim kotnim pospeškom (α) se vrtita kolesi? Vztrajnostni moment koles in gredi je J.

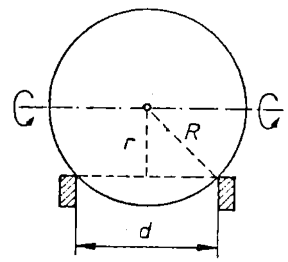


$M_1g - F_1 = M_1a_1$
$F_2 - M_2g = M_2a_2$
$F_1R_1 - F_2R_2 = J\alpha$
$\alpha = a_2/R_2 = a_1/R_1$

Eliminiramo F_1 in F_2 in dobimo:

$a_1 = (M_1R_1 - M_2R_2)R_1g/(J + M_1R_1^2 +$
$+ M_2R_2^2)$ R_1^2
$a_2 = a_1R_2/R_1$
$\alpha = a_1/R_1$

9.9. Ravni tirnici sta razmaknjeni za $d = 2$ cm in nagnjeni v klanec z naklonskim kotom $\varphi = 5°$. Po klancu se kotali krogla s polmerom $R = 1{,}5$ cm. Kolikšen je pospešek (a) njenega težišča?



$mg \sin\varphi - F' = ma$
$F'r = J\alpha = Ja/r$

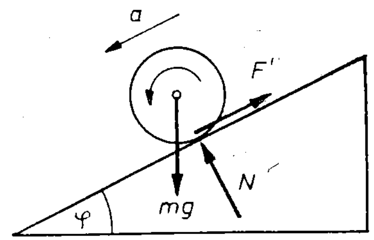
Iz druge enačbe izrazimo

$F' = Ja/r^2 = (2/5)mR^2a/r^2$

in vstavimo v prvo enačbo:

$a = 5g \sin\varphi(4R^2 - d^2)/(28R^2 - 5d^2)$
$a = 0{,}50$ m/s^2

9.10. Valj s polmerom $R = 10$ cm in maso $m = 5$ kg zakotalimo navzdol po klancu ($\varphi = 17{,}8°$) z začetno kotno hitrostjo $\omega_0 = 10/\mathrm{s}$. V kolikšnem času (t_1) napravi težišče valja pot $s = 2{,}0$ m?

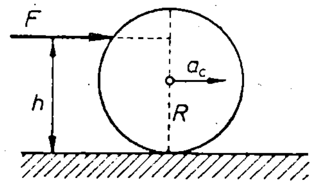


$mg \sin\varphi - F' = ma$
$RF' = J\alpha = Ja/R$
$a = g \sin\varphi/(1 + J/mR^2)$
$a = (2/3)g \sin\varphi = 2{,}0$ m/s^2

Začetni kotni hitrosti ω_0 kotalečega se valja ustreza začetna hitrost te-

žišča $v_0 = R\omega_0$ (za kotaljenje brez podrsavanja). Po poti s ima težišče valja hitrost $v_1 = v_0 + at_1$, ki jo izračunamo iz enačbe: $v_1^2 = v_0^2 + 2as$, $v_1 = 3{,}0$ m/s
$t_1 = (v_1 - R\omega_0)/a = 1{,}0$ s

9.11. Biljardna kroglica s polmerom R leži na gladkih vodoravnih tleh. Na kateri višini (h) od tal jo moramo suniti v vodoravni smeri, da se zakotali brez podrsavanja? Trenje zanemarimo.

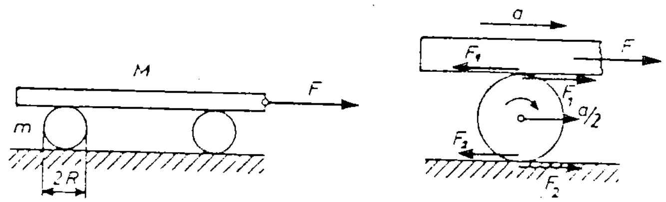


$F = ma_c$
$Fh = J\alpha = (7/5)mR^2\alpha$

Pogoj za kotaljenje: $a_c = R\alpha$.

$h = (7/5)R$

9.12. Ravna deska z maso $M = 60$ kg leži na dveh vzporednih valjih, ki se lahko kotalita po vodoravnih tleh. Konec deske vlečemo s stalno silo $F = 600$ N v vodoravni smeri. S kolikšnim pospeškom (a) se giblje deska, če ni podrsavanja? Polmer valja je $R = 10$ cm, njegova masa $m = 40$ kg.



Pospešek deske je enak tangentnemu pospešku zgornje točke kotalečega se valja, ki je dvakratni pospešek težišča valja.

$F - 2F_1 = Ma$, $F_1 - F_2 = ma/2$

Valj vrtita sili F_1 in F_2:

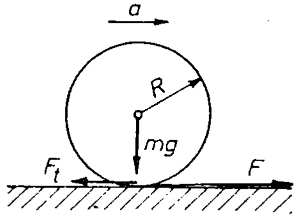
$(F_1 + F_2)R = J\alpha = mRa/4$ $\quad(\alpha = a/2R)$

Iz zgornjih enačb eliminiramo F_1 in F_2 ter izračunamo:

$a = F/(M + 3m/4) = 6{,}7$ m/s^2

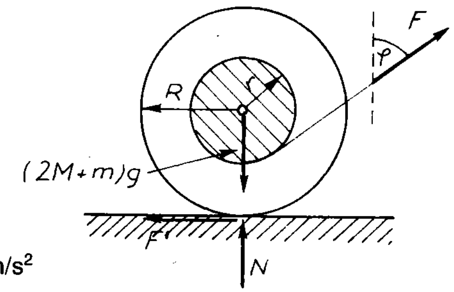
9.13. Na vodoravnih tleh leži bala tankega papirja z maso $m = 15$ kg in polmerom $R = 30$ cm. Prosti konec papirja vlečemo v vodoravni smeri s stalno silo $F = 45$ N. Kolikšna sta pospešek središča (a) in kotni pospešek (α) bale, če je drsni torni koeficient med podlago in balo $k_t = 0{,}2$?

$F - F_t = ma$, $F_t = k_t mg$
$a = F/m - k_t g = 1{,}0$ m/s^2
$(F - F_t)R = J\alpha$
$= mR^2\alpha/2 = maR$
$\alpha = 2a/R = 6{,}7$/s^2



9.14. Enaka valja (masa $M = 2$kg, polmer $R = 10$ cm) sta pritrjena na skupno os z maso $m = M/2$ in polmerom $r = R/2$ in ležita na vodoravni podlagi. Na osi je navita vrv, katere konec vlečemo s stalno silo $F = 5{,}0$ N pod kotom $\varphi = 60°$ glede na navpičnico. S kolikšnim pospeškom (a) se giblje os valja v vodoravni smeri? Kolikšen mora biti statični torni koeficient (k_s) med tlemi in valjema, da valja ne podrsujeta?

Predpostavimo, da se valj kotali v desno:



$F\cos\varphi + N = (2M + m)g$
$F\sin\varphi - F' = (2M + m)a$
$F'R - Fr = J\alpha = Ja/R$
$J = MR^2 + mr^2/2$

Iz zgornjih enačb izračunamo:

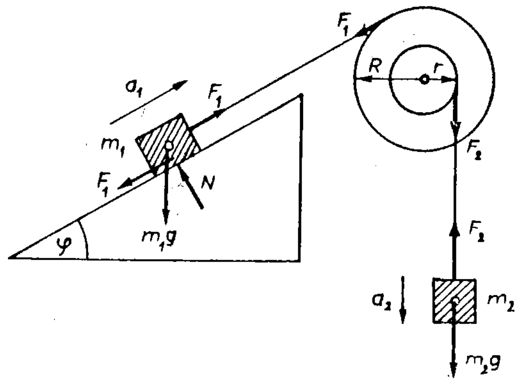
$N = (2M + m)g - F\cos\varphi = 47$ N
$a = F(\sin\varphi - r/R)/(2M + m + J/R^2) = 0{,}26$ m/s^2

Valj se kotali zares v desno ($a > 0$), če je $\sin\varphi > r/R$.

$F' = F[(2M + m)rR + J\sin\varphi]/[(2M + m)R^2 + J] = 3{,}0$ N

Valj ne podrsuje, če je $F' < F_s = k_s N$ ali če je $k_s > F'/N = 0{,}06$.

9.15. Telo z maso m_1 leži na klancu z naklonskim kotom $\varphi = 25°$. Privezano je na vrv, ki vodi prek oboda kolesa s polmerom $R = 20$ cm. Kolo je pritrjeno na gred



s polmerom r = 10 cm. Po obodu gredi je navita vrv, na kateri visi utež z maso m_2 = 7 kg. Kolikšna mora biti masa m_1, da viseča utež pada s stalno hitrostjo? In kolikšna, da se viseča utež dviga s stalno hitrostjo? S kolikšnima pospeškoma se gibljeta telesi (a_1 in a_2), če je m_1 = 3 kg? Vztrajnostni moment kolesa z gredjo je J = 0,12 kgm^2, drsni torni koeficient je k_t = 0,3.

Enakomerno padanje: $F_1 = m_1g(\sin\varphi + k_t\cos\varphi)$, $F_2 = m_2g$ in $F_1R = F_2r$. Sledi:
$m_1 = m_2(r/R)/(\sin\varphi + k_t\cos\varphi)$ = 5,0 kg

Enakomerno dviganje: utež m_1 drsi po klancu navzdol, predznak k_t se spremeni:
$m_1 = m_2(r/R)/(\sin\varphi - k_t\cos\varphi)$ = 23 kg

Pri m_1 = 3 kg utež m_2 pospešeno pada, telo m_1 pa pospešeno drsi navzgor po klancu:

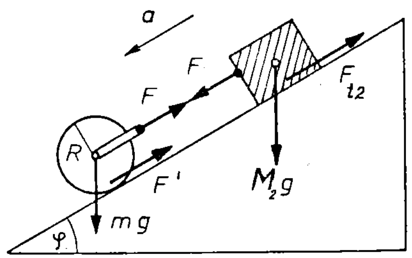
$F_1 - m_1g(\sin\varphi + k_t\cos\varphi) = m_1a_1$
$m_2g - F_2 = m_2a_2$
$F_2r - F_1R = J\alpha$, $\alpha = a_2/r = a_1/R$

Iz zgornjih enačb eliminiramo F_1, F_2 in α ter izračunamo:

$a_1 = g[m_2rR - m_1R^2(\sin\varphi + k_t\cos\varphi)]/(m_1R^2 + m_2r^2 + J)$
a_1 = 1,8 m/s^2
$a_2 = a_1(r/R)$ = 0,9 m/s^2

9.16. Valj z maso m = 8 kg in polmerom R = 10 cm položimo na klanec z naklonskim kotom φ = 30°. Os valja povežemo prek lahke palice s kvadrom (masa M = 4 kg), ki leži na klancu. S kolikšnim pospeškom začne drseti kvader navzdol, ko telesi spustimo? Drsni torni koeficient med kvadrom in klancem je k_t = 0,2.

Kvader drsi z enakim pospeškom, kot se kotali navzdol težišče valja:
$a = R\alpha$.



$F + Mg(\sin\varphi - k_t\cos\varphi) = Ma$
$mg\sin\varphi - F' - F = ma$
$F'R = Ja/R = mRa/2$ ($J = mR^2/2$)

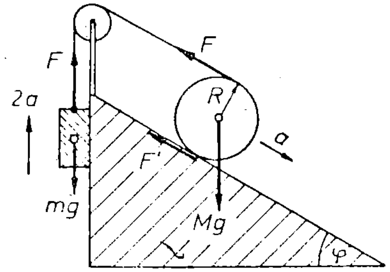
Eliminiramo F' in F. Dobimo:

$a = g[(m + M)\sin\varphi - Mk_t\cos\varphi]/(M + 1{,}5\,m)$ = 3,3 m/s^2

9.17. Valj z maso M = 3 kg in s polmerom R = 20 cm se kotali po klancu z naklonskim kotom φ = 45°. Okrog valja je navita vrv, ki je prek lahkega škripca na vrhu klanca zvezana z visečo utežjo (masa m = 0,5 kg). Kolikšen je pospešek (a) težišča valja? S kolikšno silo (F) je napeta vrv?

$Mg\sin\varphi - F - F' = Ma$
$F - mg = m \cdot 2a$
(pospešek uteži je enak pospešku zgornje točke kotalečega se valja)

$(F' - F)R = J\alpha = Ja/R$

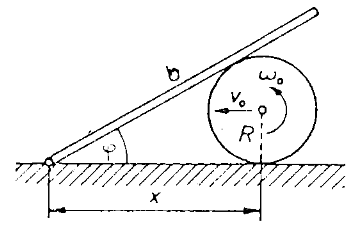


Iz zgornjih enačb izračunamo:

$a = (M\sin\varphi - 2m)g/(4m + 1{,}5M)$
a = 1,7 m/s^2
$F = m(g + 2a)$ = 6,6 N

9.18. Palica z dolžino b = 2 m je prislonjena ob obodu kolesa s polmerom R = 0,5 m. Spodnji konec palice je vrtljivo pritrjen na tla. Kolo se kotali s stalno kotno hitrostjo ω_0 = 1/s in pri tem dviguje palico. Kolikšna je hitrost (v) zgornjega konca palice v trenutku, ko je palica navpična?

x_0 = začetna oddaljenost dotikališča s tlemi od vrtišča palice.
Za poljuben trenutek t velja:

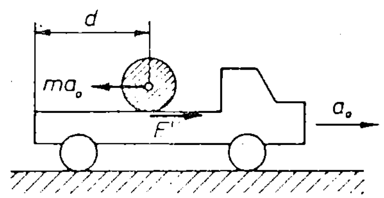


$R = x\,\mathrm{tg}(\varphi/2)$ =
$= (x_0 - v_0t)\mathrm{tg}(\varphi/2)$, ali
$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}[R/(x_0 - v_0t)]$
$\omega = d\varphi/dt = 2Rv_0[R^2 + (x_0 - v_0t)^2]^{-1}$
= kotna hitrost vrtenja palice
$v = b\omega$ (pri $\varphi = 90^0$) $= b\omega_0$ = 2 m/s

Palica doseže navpično lego po času t, za katerega velja $x_0 - v_0t = R$ ter zato ω = $= v_0/R = \omega_0$.

9.19. Valjasta bala papirja leži na avtomobilu, in sicer je za d oddaljena od njegovega zadnjega roba. Avtomobil se začne pospešeno premikati s stalnim pospeškom a_0, zaradi česar se bala pospešno kotali proti robu. Kolikšno pot (x) napravi avtomobil do trenutka, ko pade bala čez rob?

Nalogo najhitreje rešimo, če obravnavamo kotaljenje bale glede na avtomobil. Os bale se giblje v levo s pospeškom a (glede na avtomobil), ki ga določa rezultanta vztrajnostne sile ma_0 (ki deluje v levo) in vodoravne komponente sile podlage (F'), ki vleče balo v desno:



$ma_0 - F' = ma$
$F'R = J\alpha = (mR^2/2)(a/R) = amR/2$

Sledi: $a = 2a_0/3$.

$d = at^2/2$, $x = a_0t^2/2$
$x = a_0d/a = 3d/2$

9.20. Valj s polmerom $R = 10$ cm položimo na vodoravno ploščo. S kolikšnim kotnim pospeškom (α) se vrti valj, če vlečemo ploščo v vodoravni smeri s pospeškom $a_0 = 2g$ in če valj ne podrsava?

Težišče valja se glede na ploščo giblje nazaj s pospeškom $a = 2a_0/3$ (glej prejšnjo nalogo).

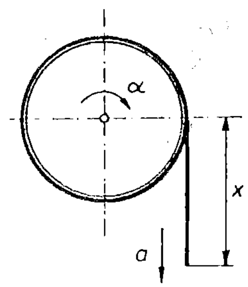
$\alpha = a/R = 2a_0/3R = 131/\mathrm{s}^2$

Kolik pa je kotni pospešek valja, če valj podrsuje? Drsni torni koeficient med valjem in ploščo je $k_t = 0{,}5$. Valj vrti drsna torna sila $F_t = k_t N = k_t mg$ z navorom $RF_t = J\alpha = (mR^2/2)\alpha$.

$\alpha = 2k_t g/R = 98/\mathrm{s}^2$

9.21. Težak kabel (dolžina b, masa na enoto dolžine u) je navit okrog lahkega bobna (masa m, polmer R). Ko boben spustimo, se začne pospešeno vrteti in kabel odvijati. Kolikšna je hitrost (v_1) kabla v trenutku, ko zapusti boben?

V trenutku, ko z bobna visi odsek kabla z dolžino x, ima vsak del kabla (viseči in še naviti del) pospešek $a(x)$ in hitrost $v(x)$, kar je enako pospešku in hitrosti bobna:

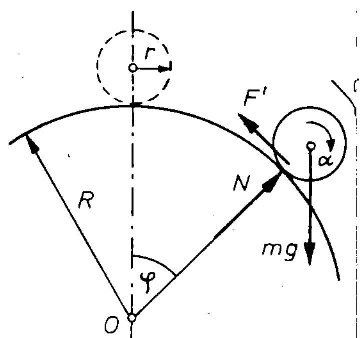


$uxg = (m + ub)a$
$a = ugx/(m + ub) = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t) = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$
$v\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\; ugx/(m + ub)$

Po integraciji, upoštevanje začetni pogoj $v = 0$ za $x = 0$, dobimo:

$v^2 = ugx^2/(m + ub) \qquad v = v_1$ za $x = b$
$v_1 = b[ug/(m + ub)]^{1/2}$

9.22. Kroglico s polmerom r spustimo z vrha velike krogle s polmerom R, da se po njej kotali. Pri katerem kotu (φ_1) se kroglica odlepi od krogle?



$mg \sin\varphi - F' = ma$
$mg \cos\varphi - N = ma_r$
$= mv^2/(R + r)$
$F'r = J\alpha = Ja/r$

Iz prve in tretje enačbe izračunamo pospešek težišča kroglice:

$a = mg \sin\varphi/(m + J/r^2) = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}\varphi)(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) =$
$= \omega(\mathrm{d}v/\mathrm{d}\varphi) = v(R + r)^{-1}(\mathrm{d}v/\mathrm{d}\varphi)$ ali

$v\mathrm{d}v = [mg(R + r)/(m + J/r^2)] \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \qquad v = 0$ za $\varphi = 0$
$v^2 = [2mg(R + r)/(m + J/r^2)](1 - \cos\varphi)$
$N = mg \cos\varphi - mv^2/(R + r) = mg \cos\varphi - [2m^2g/(m + J/r^2)](1 - \cos\varphi)$

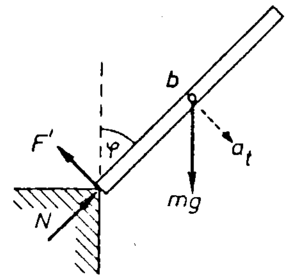
Kroglica se odlepi, ko je $N = 0$. To se zgodi pri kotu φ_1, ki zadošča enačbi:

$\cos\varphi_1(m + J/r^2) - 2m(1 - \cos\varphi_1) = 0 \quad , \quad J = (2/5)mr^2$
$\cos\varphi_1 = 10/17$
$\varphi_1 = 54°$

9.23. Palico (dolžina b, masa m) spustimo iz navpične lege, da začne padati, pri čemer se s spodnjim koncem dotika ogla mize in se okrog njega vrti. Kolik je statični torni koeficient (k_s) med palico in mizo, če palica zdrsne v trenutku, ko oklepa z navpičnico kot $\varphi_0 = 30°$? Pri katerem kotu (φ_1) se prekine stik med palico in mizo, če palica ne zdrsne?

Napišemo enačbe za vrtenje palice okrog ogla in za gibanje njenega težišča v tangentni in radialni smeri.

$mg(b/2)\sin\varphi = J\alpha = (mb^2/3)\alpha$
$\alpha = (3g/2b)\sin\varphi$
$mg \sin\varphi - F' = ma_t = m(b/2)\alpha$
$F' = (mg/4)\sin\varphi$



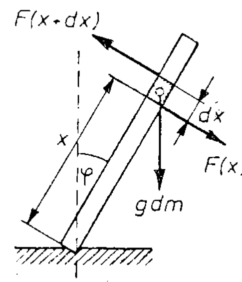
Pravokotno komponento sile podlage (N) izračunamo iz enačbe za pospešek težišča palice v radialni smeri:

$mg \cos\varphi - N = m(b/2)\omega^2$
$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi)(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) = \omega\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi$ ali
$\omega\mathrm{d}\omega = \alpha\mathrm{d}\varphi = (3g/2b) \sin\varphi\mathrm{d}\varphi \quad , \quad \omega = 0$ za $\varphi = 0$
$\omega^2 = (3g/b)(1 - \cos\varphi)$
$N = (5 \cos\varphi - 3)mg/2$

Palica se odlepi, ko je $N = 0$, to je pri kotu φ_1, za katerega velja: $5 \cos\varphi_1 = 3$ ali $\varphi_1 = 53°$.
Palica ne zdrsne ob oglu, če je $F' < F_s = k_s N$. Zdrsne torej pri kotu φ_0, za katerega velja:

$(1/4)\sin\varphi_0 = k_s(5 \cos\varphi_0 - 3)/2$
$k_s = \sin\varphi_0/(10 \cos\varphi_0 - 6) = 0{,}19$

9.24. Navpičen dimnik (dolžina h, masa m) se začne nagibati. Na kateri višini (h_0 od spodnjega dela) se prelomi, če predpostavljamo, da je grajen homogeno?



Kotni pospešek padajočega dimnika se spreminja s kotom φ glede na navpičnico po enačbi (glej prejšnjo nalogo):

$\alpha = (3g/2h)\sin\varphi$

Del dimnika z maso $dm = (m/h)dx$, ki je za x oddaljen od vrtišča, se potemtakem giblje s tangentnim pospeškom $a_t = x\alpha$, ki zadošča enačbi:

$$F(x) - F(x + dx) + g dm \sin\varphi = dm a_t = (m/h)(3g/2h)\sin\varphi dx,$$

kjer je $F(x)$ notranja strižna sila v dimniku na višini x.

$$dF = F(x + dx) - F(x) = (g \sin\varphi - x\alpha)dm$$
$$dF = (mg/h)(1 - 3x/2h)\sin\varphi dx$$

Pri danem kotu φ narašča strižna sila F, ko se x povečuje od nič navzgor ($dF > 0$) in doseže največjo vrednost pri $x = 2h/3$ (kjer je $dF = 0$), nakar se zmanjša do nič na koncu dimnika ($x = h$). Zgornjo enačbo zato integriramo od $x = h$, kjer je $F = 0$, do poljubnega x. Dobimo:

$$F = (mg/h)\sin\varphi \int_h^x (1 - 3x/2h)dx = (mg \sin\varphi/4h^2)(h - x)(3x - h)$$

Prelom dimnika povzroči navor notranjih strižnih sil M. Pozitiven M npr. pomeni, da vrti proti smeri vrtenja urnega kazalca, negativen pa obratno. Na vrhu dimnika ($x = h$) je M gotovo nič. Z manjšanjem $x - a$ (negativen dx) postaja bolj in bolj pozitiven, torej se pri spremembi dx spremeni za $dM = - Fdx$:

$$dM = (mg \sin\varphi/4h^2)(h - x)(h - 3x)dx$$

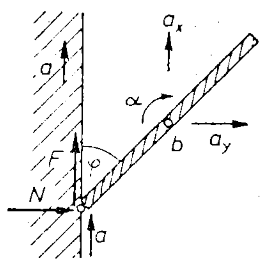
Največjo vrednost doseže M pri $x = h/3$, kjer je $F = 0$ (in zato $dM/dx = 0$). Tam se dimnik najprej prelomi: $h_0 = h/3$. Na poljubni višini x je navor notranjih sil enak:

$$M = -\int_h^x Fdx = (mg \sin\varphi/4h^2)\int_x^h (h - x)(3x - h)dx$$
$$M = (mg \sin\varphi/4h^2)\, x(h - x)^2$$

Vidimo, da je $M = 0$ tudi spodaj ($x = 0$), kjer je os vrtenja. Prepričaj se, da je $dM/dx = 0$ za $x = h_0 = h/3$.

9.25. Avtomobil z rahlo odprtimi vrati se začne pospešeno premikati in vrata se pospešeno odpirajo. S kolikšno kotno hitrostjo (ω_0) udarijo skozi smer, ki je pravokotna na smer gibanja avtomobila? Upor zraka zanemarimo. Širina vrat je b.

Na vrata delujeta komponenti N in F sile v ležajih, ki povzročata težišču vrat pospešek s komponentama a_x in a_y:



$$F = ma_x \quad , \quad m = \text{masa vrat}$$
$$N = ma_y$$

Enačbo vrtenja napišemo za navpično os skozi težišče vrat:

$$F(b/2)\sin\varphi - N(b/2)\cos\varphi = J\alpha = (mb^2/12)\alpha$$

Pospešek a ležajev je sestavljen iz pospeška težišča in iz tangentnega pospeška zaradi vrtenja vrat:

$$a = a_x + (b\alpha/2)\sin\varphi$$
$$a_y = (b\alpha/2)\cos\varphi$$

Iz zgornjih enačb eliminiramo N, F, a_x in a_y ter izračunamo kotni pospešek:

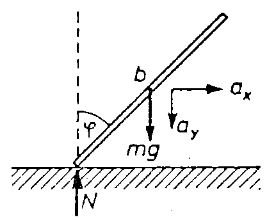
$$\alpha = (3a/2b)\sin\varphi = d\omega/dt = \omega d\omega/d\varphi$$
$$\omega d\omega = (3a/2b)\sin\varphi d\varphi \quad , \quad \omega = 0 \text{ pri } \varphi = 0$$
$$\omega^2 = (3a/b)(1 - \cos\varphi) \quad , \quad \omega = \omega_0 \text{ pri } \varphi = \pi/2$$
$$\omega_0 = (3a/b)^{1/2}$$

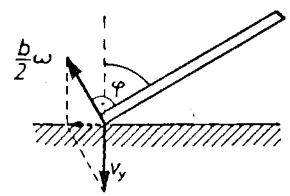
Rešitev problema s pomočjo vztrajnostne sile: težišče vrat se glede na avto giblje s pospeškom a nazaj in nanj deluje vztrajnostna sila ma, ki vrti vrata okrog ležajev:

$$ma(b/2)\sin\varphi = (mb^2/3)\alpha \quad \text{ali}$$
$$\alpha = (3a/2b)\sin\varphi$$

kar že poznamo. (Glej nalogo 9.23.)

9.26. Palico (masa m, dolžina b), ki stoji pokonci na gladki mizi, izmaknemo, da začne padati, pri čemer spodnji konec drsi po mizi. Kako se giblje težišče palice? Kolikšna je kotna hitrost (ω_1) v trenutku, ko palica udari ob mizo? Trenje zanemarimo.





Ker zanemarimo vodoravno komponento sile podlage, je pospešek težišča palice v vodoravni smeri nič in težišče pada s pospeškom a_y, ki zadošča enačbi:

$$mg - N = ma_y$$

Za vrtenje palice okrog težiščne osi velja enačba:

$$N(b/2)\sin\varphi = (mb^2/12)\alpha, \qquad \text{kjer je } \alpha = d\omega/dt = \omega d\omega/d\varphi$$
$$N = (mb/6 \sin\varphi)\,\omega d\omega/d\varphi \quad \text{ter}$$
$$a_y = g - (b/6 \sin\varphi)\,\omega d\omega/d\varphi$$

Velja še pogoj, da je hitrost spodnjega konca palice ves čas vodoravna, njena navpična komponenta je nič. Ta je sestavljena iz hitrosti v_y težišča in iz obodne hitrosti $(b/2)\alpha$ zaradi vrtenja palice okrog težiščne osi. Sledi:

$$v_y = (b/2)\omega \sin\varphi$$
$$a_y = dv_y/dt = (dv_y/d\varphi)(d\varphi/dt) = \omega\, dv_y/d\varphi \quad \text{ali}$$
$$(b/2)\sin\varphi\, \omega d\omega/d\varphi + (b/2)\omega^2 \cos\varphi = a_y = g - (b/6 \sin\varphi)\omega d\omega/d\varphi$$

Tako dobimo diferencialno enačbo za ω:

$$(1 + 3\sin^2\varphi)\omega d\omega/d\varphi + 3\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = (6g/b)\sin\varphi$$

Rešitev te enačbe za začetni pogoj $\omega = 0$ pri $\varphi = 0$ ima obliko:

$$\omega^2 = (12g/b)(1 - \cos\varphi)/(1 + 3\sin^2\varphi)$$
$$\omega_1 = \omega(90°) = (3g/b)^{1/2}$$

Težišče palice pada s pospeškom:

$$a_y = g - (b/12\sin\varphi)d\omega^2/d\varphi =$$
$$= 3g(3\cos^4\varphi - 9\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 4)/(1 + 3\sin^2\varphi)^2$$
$$= 3g/4 \text{ za } \varphi = 90°\text{, ko palica udari ob tla.}$$

10. VRTILNA KOLIČINA

10.1. Valj zakotalimo z začetno hitrostjo $v_0 = 1{,}5$ m/s navzgor po klancu z naklonskim kotom $\varphi = 5°$. Čez koliko časa se težišče valja giblje navzdol s hitrostjo $v_1 = 0{,}5$ m/s? Kolikšno pot (x) napravi težišče valja v tem času? Valj se kotali brez podrsavanja.

Sunek navora teže valja glede na vodoravno os skozi dotikališče valja s klancem v časovnem intervalu med 0 in t je enak spremembi vrtilne količine valja: $Mt = J_0\omega_1 - (-J_0\omega_0) = mgR\sin\varphi\, t$ (R je polmer valja, $J_0 = 3mR^2/2$ = vztrajnostni moment valja glede na os skozi dotikališče), $\omega_1 = v_1/R$, $\omega_0 = v_0/R$. Dobimo:

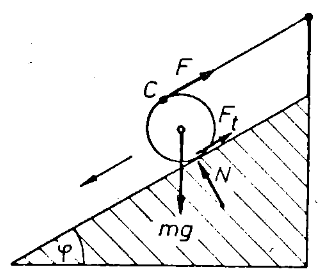
$$t = 3(v_0 + v_1)/(2g\sin\varphi) = 3{,}5 \text{ s}$$

Valj se giblje navzgor enakomerno pojemajoče s pojemkom težišča $(2/3)g\sin\varphi$ (glej nalogo 9.10.) in se ustavi po času $t_1 = 3v_0/(2g\sin\varphi)$ na poti $x_1 = at_1^2/2 = v_0^2/2a = 3v_0^2/(4g\sin\varphi)$.

Nazaj grede se valj kotali pospešeno s pospeškom $(2/3)\,g\sin\varphi$ in doseže hitrost v_1 po času $t_2 = v_1/a = 3v_1/(2g\sin\varphi)$, pri čemer prekotali pot $x_2 = v_1^2/2a = 3v_1^2/(4g\sin\varphi)$. Skupna pot je:

$$x = x_1 + x_2 = 3(v_1^2 + v_0^2)/(4g\sin\varphi) = 2{,}2 \text{ m}$$

10.2. Valj leži na klancu z naklonskim kotom φ. Po obodu valja je navita vrv, ki vodi do vrha klanca. Valj spustimo, da se začne drseče kotaliti navzdol, pri čemer se vrv odvija. Kolikšen je pospešek (a) težišča valja, če je drsni torni koeficient enak k_t?



Gibanje valja obravnavamo kot vrtenje okrog vodoravne osi skozi točko C, kjer se vrv odlepi od valja. Razlika navorov teže valja in torne sile povečuje vrtilno količino valja:

$$Mt = \Delta\Gamma = \Gamma - 0 = (mgR\sin\varphi - F_t 2R)t = J\omega$$

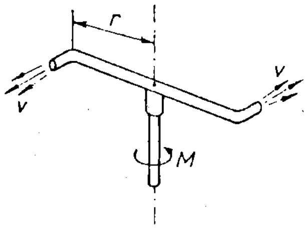
Tu je $J = 3mR^2/2$, $\omega = v/R$ in $F_t = k_t N = k_t mg\cos\varphi$. Sledi:

$v = (2g/3)(\sin\varphi - 2k_t\cos\varphi)t = at$

Ker se hitrost težišča linearno povečuje s časom, je pospešek konstanten:

$a = (2g/3)(\sin\varphi - 2k_t\cos\varphi)$

10.3. Iz šobe (presek S = 1 cm^2) reakcijskega vrtiljaka izteka voda s stalnim volumenskim tokom Φ_V = 10 litrov/s. S kolikšnim navorom (M) moramo zadrževati vrtiljak, da se ta zaradi iztekanja vode ne vrti, če je dolžina vsakega kraka r = 25 cm?



Voda izteka s hitrostjo $v = \Phi_V/S$.
Premagovati moramo navor reakcijske sile F iztekajočih dveh curkov:

$F = v\Phi_m = \varrho\Phi_V^2/S$.
$M = 2rF = 2r\varrho\Phi_V^2/S$
M = 500 Nm

Drugačna rešitev: $M = \mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(2rmv)/\mathrm{d}t = 2rv\,\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 2rv\Phi_m = 2rv\varrho\Phi_V = 2r\varrho\Phi_V^2/S$.

10.4. Kolo z vztrajnostnim momentom J_1 se vrti s kotno hitrostjo ω_1 okrog stalne navpične osi. Na isti osi je še drugo kolo z vztrajnostnim momentom J_2, ki se vrti s kotno hitrostjo ω_2 v nasprotni smeri kot prvo kolo. Prvo kolo spustimo, da zdrsne ob osi in pade na drugo kolo. Zaradi trenja med kolesoma se kotni hitrosti obeh koles izravnata. Kolikšna je njuna skupna kotna hitrost (ω)?

Trenje je notranja sila sistema obeh koles, zato se celotna vrtilna količina ohranja:
$J_1\omega_1 - J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$ ali
$\omega = (J_1\omega_1 - J_2\omega_2)/(J_1 + J_2)$

10.5. Velika krožna plošča (polmer R = 3 m in masa M = 200 kg) se lahko prosto vrti okrog navpične geometrijske osi. Po plošči se premika človek (masa m = 70 kg) s hitrostjo v_r = 4 m/s glede na ploščo, tako da dela krog s polmerom r = 2 m s središčem na osi plošče. S kolikšno kotno hitrostjo (ω) se zaradi človekovega gibanja vrti plošča?

S kakršno vrtilno količino se vrti človek v eni smeri (glede na okolico) s takšno se vrti plošča v nasprotni smeri:

$J\omega = r\,mv$

v je hitrost človeka glede na okolico = $v_r - r\omega$.

$\omega\,MR^2/2 = mr(v_r - r\omega)$ ali
$\omega = 2mrv_r/(MR^2 + 2mr^2)$ = 0,9/s

10.6. Naloga je podobna prejšnji, le da stoji človek (masa = m) na robu plošče (masa = M). V začetku (t = 0) človek in plošča mirujeta. Nato začne človek hoditi po obodu plošče in odriva ploščo v nasprotno smer. Za kolik kot (φ) se zasuče plošča v času, ko človek prispe do izhodiščnega mesta?

Človek se giblje s poljubno hitrostjo $v(t)$ glede na okolico, plošča pa se vrti s kotno hitrostjo $\omega(t)$ v nasprotni smeri. Velja: $J\omega(t) = Rmv(t)$ ali

$v(t) = (MR/2m)\omega(t)$

Človek hodi glede na ploščo z relativno hitrostjo $v_r(t) = v(t) + R\omega(t) = R(1 + M/2m)\omega(t)$ in obhodi obod plošče v času t_0, ki zadošča enačbi:

$2\pi R = \int_0^{t_0} v_r(t)\mathrm{d}t = R(1 + M/2m)\int_0^{t_0}\omega(t)\mathrm{d}t = R(1 + M/2m)\varphi$
$\varphi = 2\pi/(1 + M/2m)$

Za $M = m$ je $\varphi = 4\pi/3$ za $M \to \infty$ pa $\varphi = 0$ (plošča se ne premakne)

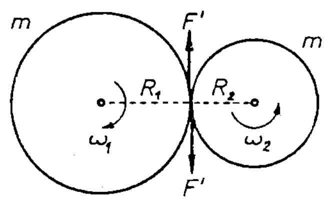
10.7. Z valjem, ki ima polmer R_1 = 40 cm in se vrti s kotno hitrostjo ω_0 = 100/s, se dotaknemo drugega (enako težkega) valja s polmerom R_2 = 20 cm, ki v začetku miruje. Osi obeh valjev sta vzporedni. Kolikšni sta kotni hitrosti valjev (ω_1 in ω_2) potem, ko valja drug ob drugem nič več ne podrsavata?

Ob dotiku deluje na prvi valj zaviralna sila F', katere navor R_1F' zmanjša vrtilno količino prvega valja od $J_1\omega_0$ na $J_1\omega_1$:

$R_1F'\Delta t = J_1\omega_0 - J_1\omega_1$

Enako velika sila pospešuje vrtenje drugega valja; njen navor R_2F' poveča vrtilno količino drugega valja od 0 na $J_2\omega_2$:

$R_2F'\,\Delta t = J_2\omega_2$



Prvo enačbo delimo z drugo:

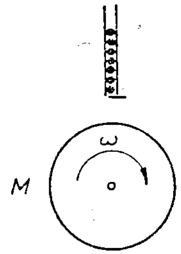
$R_1/R_2 = (J_1\omega_0 - J_1\omega_1)/J_2\omega_2 = (R_1/R_2)^2(\omega_0 - \omega_1)/\omega_2$
(ker je $J_1 = mR_1^2/2$ in $J_2 = mR_2^2/2$) ali
$\omega_0 = \omega_1 + (R_2/R_1)\omega_2$

Valja nič več ne podrsavata, ko se njuni obodni hitrosti izenačita ($R_1\omega_1 = R_2\omega_2$) in dobimo:

$\omega_1 = \omega_0/2$ = 50/s
$\omega_2 = R_1\omega_0/2R_2$ = 100/s

10.8. Valj z maso M = 5 kg in polmerom R = 10 cm se vrti s kotno hitrostjo ω_0 = 10/s okrog vodoravne geometrijske osi. Pravokotno na valj spuščamo (n = 5-krat v sekundi) ilovnate kroglice (z maso m = 3 g), ki se lepijo na njegov plašč. Kako se kotna hitrost valja (ω) spreminja s časom? Kolikšna je (ω_1) v trenutku, ko se na valj prilepi že N = 10 kroglic?

Ker kroglice vpadajo v smeri pravokotno na vrtilno os, se vrtilna količina valja zaradi kroglic ne spreminja: $J_0\omega_0 = J\omega = (J_0 + nmtR^2)\omega$, kjer je $J_0 = MR^2/2$



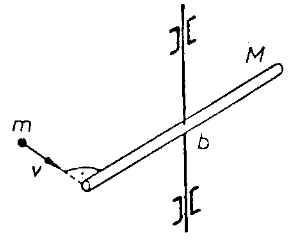
$\omega = M\omega_0/(M + 2nmt)$

N kroglic se prilepi ob valj po času $t_1 = N/n$; tedaj je kotna hitrost valja:

$\omega_1 = M\omega_0/(M + 2Nm) = 9{,}9/\mathrm{s}.$

10.9. Palica z maso M = 1 kg in dolžino b = 1 m je pritrjena na navpično os, ki je pravokotna na palico in gre skozi njeno središče. Kroglica z maso m = 20 g prileti s hitrostjo v = 100 m/s v smeri pravokotno na palico in se zarine v njen konec. S kolikšno začetno kotno hitrostjo (ω_0) se zavrti palica po udarcu, če je v začetku mirovala?

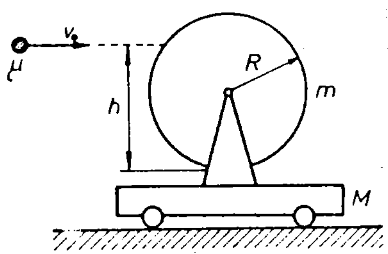
Kroglica prinese vrtilno količino $mvb/2$, ki jo nato prenese na palico:



$mvb/2 = J\omega_0 = (Mb^2/12 + mb^2/4)\omega_0$
$\omega_0 = (6v/b)m/(M + 3\,m)$
$\omega_0 = 11/\mathrm{s}$

10.10. Na mirujočem vozičku z maso M = 200 kg je pritrjen valj (polmer R = 25 cm in masa m = 10 kg), ki se lahko vrti okrog vodoravne osi. Na višini h = 40 cm nad spodnjim koncem valja ustrelimo vanj kroglico (masa u = 10 g) s hitrostjo v_0 = 100 m/s v vodoravni smeri. S kolikšno hitrostjo (v) se začne gibati voziček potem, ko se kroglica zarine v valj? S kolikšno kotno hitrostjo (ω) se zavrti valj?

Gibalna količina uv_0 kroglice se prenese na celoten sistem, katerega težišče se giblje s hitrostjo v:

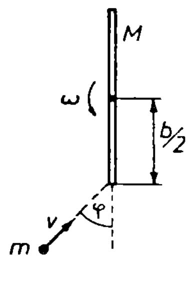


$uv_0 = (M + m + u)v$ ali
$v = v_0u/(M + m + u)$
$v = 5$ mm/s

Vrtilna količina kroglice glede na os valja je $uv_0(h - R)$. Po trku ima to vrtilno količino valj s kroglico:

$uv_0(h - R) = J\omega = (mR^2/2 + uR^2)\omega$
$\approx \omega mR^2/2$
$\omega \approx 2uv_0(h - R)/(mR^2) = 0{,}5/\mathrm{s}$

10.11. Palica z maso $M = 1$ kg in dolžino $b = 40$ cm se lahko vrti okrog vodoravne osi, ki je pravokotna nanjo in gre skozi njeno središče. V palico se pod kotom $\varphi = 30^0$ glede na njeno smer zapiči kroglica (masa m = 10 g) s hitrostjo v = 200 m/s. S kolikšno kotno hitrostjo (ω) se palica zavrti po zadetku, če je v začetku mirovala?



$mv(b/2)\sin\varphi = J\omega = (Mb^2/12 + mb^2/4)\omega$ ali
$\omega = 6(mv/b)\sin\varphi/(M + 3m) = 15/\mathrm{s}$

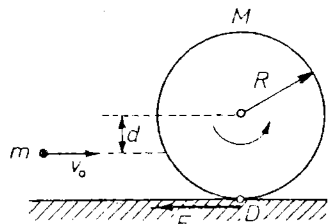
10.12. Okrogla plošča z maso m = 50 kg in polmerom R = 0,6 m leži na vodoravni ledeni ploskvi. Na robu plošče stoji človek z maso M = 80 kg in odskoči s plošče s hitrostjo v_0 = 2 m/s v tangentni smeri. Kako se plošča giblje po odrivu? Trenje med ploščo in ledeno ploskvijo zanemarimo.

Z odskokom prejme plošča gibalno količino Mv_0, zato se njeno težišče odrine v nasprotno smer s hitrostjo $v = Mv_0/m$ = 3 m/s. Obenem prejme plošča vrtilno količino RMv_0 (glede na navpično geometrijsko os) in se zato zavrti s kotno hitrostjo:

$\omega = RMv_0/J = 2Mv_0/mR = 2v/R = 11/\mathrm{s}$

10.13. Na ledeno ploskev položimo leseno kroglo z maso M = 1,8 kg in polmerom R = 8 cm. V kroglo ustrelimo v vodoravni smeri s hitrostjo v_0 = 500 m/s izstrelek z maso m = 5 g. Ta se zapiči v kroglo na globini d = 3 cm pod težiščem. Kako se krogla giblje po zadetku? Drsni torni koeficient med kroglo in ploskvijo je k_t = 0,08.

Takoj po zadetku dobi težišče krogle hitrost $v_1 =$ $= v_0m/M$ = 1,4 m/s (maso izstrelka zanemarimo v primerjavi z maso krogle) in krogla začne drseti enakomerno pojemajoče; težišče ima pojemek k_tg, ki ga povzroča drsna torna sila $F_t = k_tMg$. Obenem se krogla tudi vrti; začetna kotna hitrost je $\omega_1 = mv_0d/J = 5\,mv_0d/(2MR^2)$, kotni pojemek pa $\alpha = F_tR/J = 5\,k_tg/2R$.



Krogla se preneha vrteti po času $t_1 = \omega_1/\alpha =$ $= mv_0d/(MRk_tg)$. Tedaj se njeno težišče giblje s hitrostjo $v_2 = v_1 - k_tgt_1 = mv_0(R - d)/MR$ = 0,87 m/s. Odtlej se krogla vrti enakomerno pospešeno v nasprotni smeri, dokler se ne začne kotaliti brez podrsavanja.

10.14. Naloga je podobna prejšnji, le da se izstrelek zapiči v kroglo na razdalji d nad njenim težiščem. Kako se krogla giblje po zadetku?

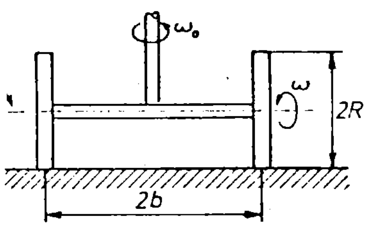
Težišče krogle se začne gibati z enako hitrostjo $v_1 = v_0m/M$ v smeri naprej kot zgoraj in tudi vrteti se začne z enako kotno hitrostjo $\omega_1 = 5\,mv_0d/(2MR^2)$, le da v nasprotni smeri. Spodnja točka krogle (dotikališče s tlemi) drsi s hitrostjo $v_d = v_1 - R\omega_1 = mv_0(2R - 5d)/(2MR)$ v smeri naprej. Pri $v_d = 0$, to je za $d = 2R/5$, se začne krogla kotaliti brez podrsavanja; hitrost težišča je stalna (glej nalogo 9.11.). Za $d < 2R/5$ je $v_d > 0$, torna sila F_t je usmerjena nazaj in pospešuje vrtenje ter obenem zavira gibanje težišča. Pri $d > 2R/5$ je obratno: spodnja točka drsi nazaj, torna sila F_t ima smer naprej in pospešuje gibanje težišča ter zavira vrtenje, dokler ne nastanejo pogoji za čisto kotaljenje brez podrsavanja.

10.15. Vesoljska postaja (masa m = 20 t) ima obliko tankega toroida s polmerom R = 20 m. V postaji želijo ustvariti umetno težnost, enako močno kot na Zemlji. V ta namen vključijo štiri raketne motorje, simetrično razvrščene na obodu toroida. Vsak motor izmetuje masni tok Φ_m = 2 kg/s plinov s hitrostjo u = 200 m/s v tangentni smeri. Koliko časa morajo motorji delovati, da postane radialni pospešek enak težnemu?

Postaja se mora vrteti s kotno hitrostjo $\omega = (g/R)^{1/2}$ = 0,7/s, oziroma z vrtilno količino $J\omega = mR^2\omega$. Ta je enaka sunku navorov reakcijske sile $\Phi_m u$ štirih motorjev: $Mt = 4\Phi_m utR$.

$4\Phi_m utR = mR^2(g/R)^{1/2}$
$t = (mR/4u\Phi_m)(g/R)^{1/2} = 175$ s

10.16. Valjčni mlin je sestavljen iz dveh težkih koles (polmer R in masa m), ki sta na skupni vodoravni osi in se kotalita po tleh. Vodoravna os (dolžina $2b$) je na sredini pritrjena na navpično os, ki se vrti s stalno kotno hitrostjo ω_0. S kolikšno kotno hitrostjo (ω) se vrtita kolesi okrog lastne geometrijske osi? Kolikšna je celotna vrtilna količina (Γ)? Maso obeh osi zanemarimo v primerjavi z maso koles.



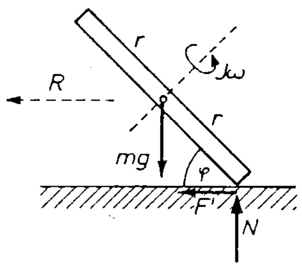
V času $t_0 = 2\pi/\omega_0$, ko se navpična os zavrti za en obrat, napravi težišče vsakega kolesa krog s polmerom b, po katerem potuje s hitrostjo $v = R\omega$. Sledi:

$2\pi b = vt_0 = R\omega 2\pi/\omega_0$ ali
$\omega = \omega_0 b/R$

Vsako kolo ima zaradi vrtenja s kotno hitrostjo ω okrog lastne geometrijske osi enako veliko vrtilno količino $mR^2\omega/2$, vendar sta ti nasprotno usmerjeni in se zato izničita. Ostane vrtilna količina koles zaradi vrtenja s kotno hitrostjo ω_0 okrog skupne navpične osi:

$\Gamma = J\omega_0 = 2m(b^2 + R^2/4)\omega_0$

10.17. Tanko krožno ploščico (polmer r = 20 cm, masa m) zavrtimo okrog njene geometrijske osi s kotno hitrostjo ω. Vrtečo se ploščico postavimo na vodoravna tla, tako da je njena vrtilna os nagnjena za kot $\varphi = 60^0$ glede na navpičnico. Ploščica se kotali po tleh brez podrsavanja, težišče ploščice opisuje krog s polmerom R. Poišči zvezo med polmerom R in kotno hitrostjo ω. S kolikšno kotno hitrostjo (ω_0) moramo zavrteti ploščico, da njeno težišče miruje?



Težišče ploščice se giblje z radialnim pospeškom $R\Omega^2$, ki ga povzroča vodoravna komponenta sile podlage $F' = mR\Omega^2$. V času $t_0 = 2\pi/\Omega$, ko težišče ploščice popiše en krog s polmerom R, se ploščica zavrti okrog lastne osi ω/Ω krat, zato velja: $2\pi(R + r\cos\varphi) = 2\pi r\,\omega/\Omega$ ali

$\Omega = \omega r/(R + r\cos\varphi)$

Pri $\varphi = 90^0$ (pokončna ploščica) je $\Omega = \omega r/R$ (glej prejšnjo nalogo).

Vrtilna količina ploščice je sestavljena iz vrtilne količine $J\omega = mr^2\omega/2$ zaradi vrtenja okrog lastne osi in iz vrtilne količine zaradi gibanja težišča po krogu s polmerom R. Zadnja je navpična in se med gibanjem ne spreminja. Vodoravna komponenta celotne vrtilne količine je zato enaka $J\omega\sin\varphi$ in se vrti v vodoravni ravnini s kotno hitrostjo Ω. Njeno spremembo v času dt, ki znaša $d\Gamma = J\omega\sin\varphi\,\Omega dt$, povzroča navor M sile podlage:

$M = Nr\cos\varphi - F'r\sin\varphi = mgr\cos\varphi - mR\Omega^2 r\sin\varphi = d\Gamma/dt = (mr^2/2)\omega\Omega\sin\varphi$

Vstavimo izraz za Ω in dobimo:

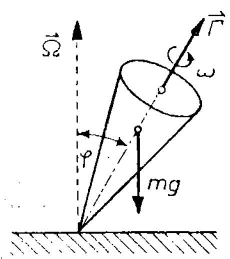
$2g\cos\varphi = r^2\omega^2\sin\varphi/(R + r\cos\varphi) + 2r^2\omega^2R\sin\varphi/(R + r\cos\varphi)^2$

ali

$\omega^2 = (2g/r^2)\mathrm{ctg}\varphi(R + r\cos\varphi)^2/(3R + r\cos\varphi)$

Težišče ploščice miruje, če je $R = 0$. To se zgodi pri kotni hitrosti: $\omega_0^2 = 2g\cos^2\varphi/(r\sin\varphi) = 28/s^2$. Pokonci položena ploščica ($\varphi = 90^0$) se ne glede na kotno hitrost giblje premočrtno ($R = \infty$).

10.18. Pokončen stožec (masa m, višina h, polmer R) zavrtimo okrog njegove geometrijske osi z veliko kotno hitrostjo ω in ga nato postavimo s konico na vodoravna tla. Ko ga spustimo, začne precesirati. Kolik je obhodni čas t_0 precesije?



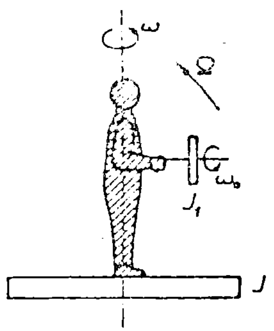
M = navor teže glede na vodoravno os skozi dotikališče $= mg(3h/4)\sin\varphi$
$Mdt = d\Gamma = J\omega\sin\varphi\,\Omega dt$ ali
$\Omega = 3mgh/(4J\omega)$, $J = 3mR^2/10$
$\Omega = 5gh/(2R^2\omega) = 2\pi/t_0$
$t_0 = 4\pi\omega R^2/(5gh)$

10.19. Prednje kolo bicikla ima povprečen polmer R = 32 cm, okvir kolesa z gumo vred ima maso m = 2,5 kg. Kolo se giblje s hitrostjo v = 20 km/h (težišče). Poišči izraz za navor M, s katerim vrteče se kolo deluje na volan, če se bicikel začne nagibati s kotno hitrostjo Ω = 0,3/s na stran.

Vrtilna količina kolesa $\Gamma = J\omega$, ki je v začetku vodoravna in usmerjena v levo (gledano v smeri vožnje), se zaradi nagibanja kolesa vrti navzdol s kotno hitrostjo Ω. Njeno spremembo $d\Gamma = \Gamma\Omega dt = J\omega\Omega dt$ v času dt povzroči navor M, ki deluje na kolo. Obenem deluje vrteče se kolo z enako velikim navorom M na volan, ki zavrti volan v levo.

$M = d\Gamma/dt = J\omega\Omega = mR^2\omega\Omega = mRv\Omega = 1{,}3$ Nm

10.20. Človek miruje na sredini vodoravne plošče, ki se lahko prosto vrti okrog navpične geometrijske osi; vztrajnostni moment obeh je J. Človek drži v rokah kolo z vztrajnostnim momentom J_1, ki je majhen v primerjavi z J. Kolo se vrti s kotno hitrostjo ω_0 okrog vodoravne osi. V trenutku $t = 0$ začne človek vrteti os kolesa v navpični ravnini s stalno kotno hitrostjo Ω, zaradi česar se tudi sam s ploščo vred začne vrteti okrog navpične osi. Kako se kotna hitrost plošče (ω) spreminja s časom do trenutka, ko je os kolesa navpična? S kolikšnim navorom (M) mora človek delovati na os kolesa, da se ta suka s stalno kotno hitrostjo Ω?



V začetku $t = 0$ je vrtilna količina celotneg sistema glede na navpično os nič (vrtilna količina kolesa je pravokotna na to os). Ker ni zunanjih navorov glede na to os, je celotna vrtilna količina ves čas nič. Človek in plošča se zato vrtita z vrtilno količino $J\omega$, ki je nasprotno enaka navpični komponenti vrtilne količine kolesa:

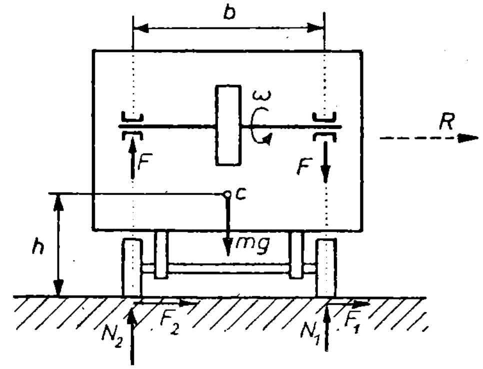
$J\omega = J_1\omega_0\sin(\Omega t)$
$\omega = \omega_0(J_1/J)\sin(\Omega t)$
Kotna hitrost ω je največja v trenutku, ko je os kolesa navpična: $\omega_0 J_1/J$.

Človek mora delovati na kolo z navorom M, ki premaguje navor teže kolesa ($= mgd\cos\Omega t$, m = masa kolesa, d = oddaljenost težišča kolesa od osi) in obenem spreminja smer vrtilne količine $J_1\omega_0$ s kotno hitrostjo Ω:

$M = mgd\cos(\Omega t) + J_1\omega_0\Omega$

10.21. Avtomobil je opremljen z giro-stabilizatorjem, ki preprečuje prevrnitev na ovinku. Avtomobil z vso opremo vred ima maso m, njegovo težišče je na višini h nad tlemi. Rotor ima vztrajnostni moment J, njegova os je vzporedna zadnji osi avtomobila. S kolikšno kotno hitrostjo (ω) in v kateri smeri moramo zavrteti rotor, da se avtomobil pri vožnji s hitrostjo v skozi ovinek s polmerom R ne prevrne?

Vrtilna količina rotorja se zaradi vožnje avtomobila skozi ovinek suka s kotno hitrostjo v/R. To spreminjanje povzroča navor M, s katerim avtomobil prek ležajev vpliva na os rotorja. Z enako velikim navorom M deluje rotor na avtomobil v nasprotni smeri. Zaradi tega navora se pojavlja dvojica nasprotno enakih sil F, ki delujeta na kolesi avtomobila in ovirata njegovo prevrnitev. Rotor se mora zato vrteti tako, da sila F na notranjem kolesu pritiska navzdol, na zunanjem pa navzgor.



V času dt se vrtilna količina rotorja spremeni za $d\Gamma = \Gamma d\varphi = J\omega(v/R)dt$. Sledi:

$M = d\Gamma/dt = J\omega(v/R) = Fb$ (b = razdalja med kolesoma)
$F = J\omega v/Rb$

Nadaljujemo podobno kot pri nalogi 6.17.:

$N_1 + N_2 = mg \quad , \quad F_1 + F_2 = mv^2/R$
$Fb + N_2b/2 - (F_1 + F_2)h - N_1b/2 = 0$

Iz enačb izračunamo pravokotno silo tal na notranje kolo:

$N_1 = mg/2 + F - mv^2h/bR$

Avtomobil se začne prevračati, ko je $N_1 = 0$, oziroma ko je:

$F = mv^2h/bR - mg/2 = J\omega v/Rb$ ali
$\omega = (m/J)(vh - Rgb/2v)$

Vidimo, da giro-stabilizator ni potreben ($\omega = 0$), če je $vh = Rgb/2v$ ali $v^2 = Rgb/2h$.

11. DELO IN MOČ

11.1. S kolikšno stalno silo (F) mora konj vleči sani z maso $m = 500$ kg, da drsijo po vodoravni cesti enakomerno s hitrostjo $v = 2$ m/s? Drsni torni koeficient je $k_t = 0{,}04$. Kolikšna je moč (P) konja? Koliko dela (A) opravi na poti $x = 2$ km?

$F = F_t = k_t mg = 196$ N
$P = Fv = 390$ W
$A = Fx = 390$ kJ

11.2. Para v parnem stroju pritiska na bat s tlakom $p = 5$ bar. S kolikšno močjo (P) odriva bat, če se ta premika s hitrostjo $v = 1{,}5$ m/s? Polmer bata je $r = 16$ cm.

$P = Fv = pSv = p\pi r^2 v = 60$ kW

11.3. Traktor vleče hlod s hitrostjo $v_1 = 50$ km/h po vodoravni cesti; drsni torni koeficient je $k_1 = 0{,}1$. Nato zapelje na slabšo cesto s tornim koeficientom $k_2 = 0{,}2$. S kolikšno hitrostjo vozi po slabši cesti, če se moč ne spremeni?

$P = F_1 v_1 = F_2 v_2$
$k_1 mgv_1 = k_2 mgv_2$
$v_2 = v_1(k_1/k_2) = 25$ km/h

11.4. Lokomotiva vleče po vodoravnem tiru s stalno silo $F = 60$ kN tovorni vlak, tako da se ta giblje s stalno hitrostjo $v = 72$ km/h. S kolikšno močjo (P) mora vleči? Koliko dela (A) opravi v času $t = 10$ min?

$P = Fv = 1{,}2$ MW
$A = Pt = 200$ kWh

11.5. S kolikšno močjo (P) mora vleči letalski motor, da v času $t = 1$ min dvigne letalo (masa $m = 4$ t) na višino $h = 1200$ m? Upor zraka zanemarimo.

$P = mgh/t = 785$ kW

11.6. Najmanj kolikšno moč mora imeti motor, ki poganja premične stopnice, da se v času $t = 1$ h prepelje $n = 2000$ oseb v nadstropje, ki je za $h = 6$ m višje? Povprečna masa človeka je $m = 70$ kg, za premikanje praznih stopnic je potrebna moč $P_0 = 2$ kW.

$P = P_0 + nmgh/t = 4$ kW

11.7. Motor z močjo $P_0 = 5$ kW poganja črpalko, ki dviguje vodo v $h = 10$ m više ležeči rezervoar. Kolikšen je energijski izkoristek (η), če črpalka dvigne $V = 2{,}4$ m^3 vode v času $t = 1$ min?

$P = A/t = mgh/t = V\varrho gh/t = 3{,}9$ kW
$\eta = P/P_0 = 0{,}78 = 78\%$

11.8. Motor z močjo $P_0 = 10$ kW poganja vitel, ki dviguje breme z maso $m = 200$ kg $h = 20$ m visoko. V kolikšnem času (t) se dvigne breme na to višino, če motor dela z izkoristkom $\eta = 80\%$?

$P = \eta P_0 = mgh/t$
$t = mgh/(\eta P_0) = 4{,}9$ s

11.9. Motor z močjo $P_0 = 3$ kW poganja dvigalo z maso $m = 1{,}5$ t. Z največ kolikšno stalno hitrostjo (v) se lahko dvigalo dviguje, če motor dela z izkoristkom $\eta = 90\%$?

$P = \eta P_0 = Fv = mgv$
$v = \eta P_0/mg = 0{,}18$ m/s

11.10. Sila potiska telo po vodoravni podlagi tako, da telo drsi enakomerno pospešeno s pospeškom $a = 0{,}5$ m/s^2. Kolik je drsni torni koeficient (k_t), če se polovica moči troši za premagovanje trenja in polovica za pospeševanje?

$F = ma + k_t mg$
$P = Fv = mav + k_t mgv$
$mav = k_t mgv$
$k_t = a/g = 0{,}05$

11.11. Telo z maso $m = 1{,}5$ kg drsi navzdol po klancu z naklonskim kotom $\varphi = 10°$ s stalno hitrostjo $v = 60$ km/h. S kolikšno močjo moramo to telo potiskati, da drsi enako hitro navzgor po klancu?

Enakomerno drsenje navzdol: $mg \sin\varphi - k_t mg \cos\varphi = 0$
Enakomerno drsenje navzgor: $F - mg \sin\varphi - k_t mg \cos\varphi = 0$ ali
$F = mg \sin\varphi + k_t mg \cos\varphi = 2mg \sin\varphi$
$P = Fv = 2mgv \sin\varphi = 85$ W

11.12. Vlak z maso $m = 400\ t$ se giblje po vodoravnem tiru s stalno hitrostjo $v_1 = 40$ km/h. Za najmanj koliko (ΔP) mora lokomotiva povečati moč, da se na poti $x = 1$ km poveča hitrost vlaka enakomerno od v_1 na $v_2 = 60$ km/h?

Dodatna moč (ΔP) mora povečati kinetično energijo vlaka od $mv_1^2/2$ na $mv_2^2/2$ v času t:

$$\Delta P = m(v_2^2 - v_1^2)/2t$$

Čas t izračunamo iz enačb za enakomerno pospešeno gibanje: $t = 2x/(v_1 + v_2)$.

$$P = (m/4x)(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)^2 = 430 \text{ kW}$$

11.13. Drsalec z maso $m = 70$ kg se poganja po ledeni ploskvi tako, da drsi s stalno hitrostjo. Ko se neha poganjati, drsi naprej enakomerno pojemajoče in se ustavi po času $t = 25$ s na razdalji $x = 60$ m. Izračunaj moč drsalca med poganjanjem.

$$P = F_t v_0 = k_t m g v_0 \text{ (med poganjanjem)}$$

Drsalec drsi enakomerno pojemajoče s pojemkom $k_t g$. Velja: $v_0 = k_t g t$ in $x = k_t g t^2/2$ oziroma $k_t v_0 = 4x^2/gt^3$.

$$P = 4mx^2/t^3 = 65 \text{ W}$$

11.14. Elektromotor poganja tramvaj s stalno močjo $P = 60$ kW. Po kolikšnem času (t) od začetka gibanja doseže tramvaj hitrost $v = 54$ km/h? Kolikšno pot (x) doseže v tem času? Masa tramvaja je $m = 3$ t.

$$A = Pt = mv^2/2$$
$$t = mv^2/2P = 5{,}6 \text{ s}$$
$$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \quad , \quad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = (2Pt/m)^{1/2}\mathrm{d}t$$

Integriramo z začetnim pogojem $v = 0$ za $t = 0$ in dobimo:

$$x = (2P/m)^{1/2}(2/3)t^{3/2} = mv^3/3P = 56\ m$$

11.15. Kako se s časom spreminja hitrost telesa, če se moč vlečne sile povečuje linearno s časom: $P = P_0 + P_1 t$. Telo v začetku miruje.

$$W_k = A = \int_0^t P\mathrm{d}t = \int_0^t (P_0 + P_1 t)\mathrm{d}t = P_0 t + P_1 t^2/2 = mv^2/2$$
$$v^2 = (2P_0/m)t + (P_1/m)t^2 \qquad m = \text{masa telesa}$$

11.16. Voda teče s hitrostjo $v = 3$ m/s po strugi s prečnim presekom $S = 2$ m^2. Največ kolikšno moč lahko ta vodni tok daje?

$$P = A/t = W_k/t = mv^2/2t \qquad m = \varrho S v t$$
$$P = \varrho S v^3/2 = 27 \text{ kW}$$

11.17. Voda iz jezera pada s prostorninskim tokom $\Phi_V = 50$ litrov/s na $h = 200$ m niže ležeče lopatice turbine; z lopatic odteka s hitrostjo $v_1 = 15$ m/s. Koliko odstotkov (p) kinetične energije vpadne vode izkoristi turbina? Največ kolikšno moč (P_m) lahko turbina daje?

Voda pada na lopatice s hitrostjo $v_0 = (2gh)^{1/2} = 63$ m/s
$p = (W_0 - W_1)/W_0 = 1 - W_1/W_0 = 1 - v_1^2/v_0^2 = 0{,}94 = 94\%$
$P_m = (mv_0^2 - mv_1^2)/2t = \varrho \Phi_V (v_0^2 - v_1^2)/2 = 92$ kW

11.18. Lopatica turbine spremeni smer vodnega curka za kot α. Vodni curek s prečnim prerezom S doteka v vodoravni smeri s hitrostjo v. S kolikšno hitrostjo (u) se mora gibati lopatica, da jo curek odriva z največjo možno močjo?

Voda vstopa na lopatico z relativno hitrostjo $v - u$; v času $\mathrm{d}t$ priteče $\mathrm{d}m = S\varrho(v-u)\mathrm{d}t$ vode. Sila vodnega curka je:

$F = S\varrho(v-u)^2(1 - \cos\alpha)$ (gl. nalogo 7.26.)
$P = Fu = S\varrho(1 - \cos\alpha)u(v-u)^2$

Ekstremno moč dobimo pri u, za katerega velja: $\mathrm{d}P/\mathrm{d}u = 0$ ali

$$(v-u)^2 - u2(v-u) = 0$$
$$(v-u)(v-3u) = 0$$

Rešitev $u = v$ ustreza minimumu moči ($P = 0$). Največjo moč dobimo pri $u = v/3$; enaka je $P_m = (4/27)S\varrho v^3(1 - \cos\alpha)$.

11.19. Naloga je podobna prejšnji, le da curek pada na turbino z gosto razporejenimi lopaticami.

Brž ko se ena lopatica odmakne, pride v curek sosednja, zato je masni dotok takle: $\mathrm{d}m = S\varrho v\mathrm{d}t$ ali $\Phi_m = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t = S\varrho v$.

$$F = (v-u)(1 - \cos\alpha)\Phi_m = S\varrho v(1 - \cos\alpha)(v-u)$$
$$P = Fu = S\varrho v(1 - \cos\alpha)(v-u)u$$
$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}u = 0 \text{ ali } v - u - u = 0 \text{ ali } u = v/2$$
$$P_m = (1/4)S\varrho v^3(1 - \cos\alpha)$$

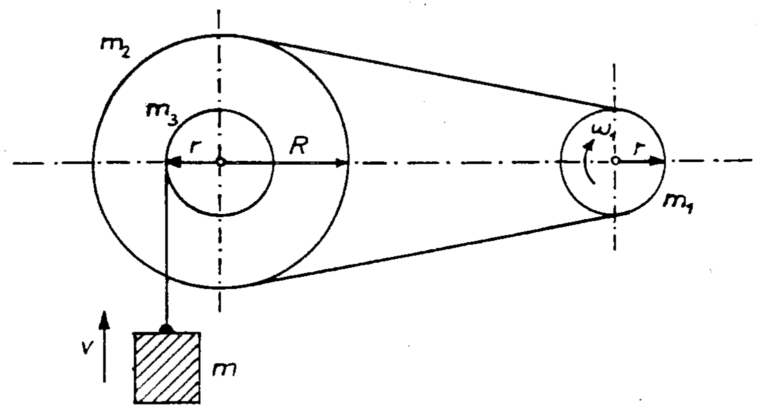
11.20. Najmanj kolikšno povprečno moč (P) mora imeti avtomobilski motor, da se hitrost avtomobila poveča v času $t = 5$ s od nič na $v = 72$ km/h. Masa avtomobila je $m = 1$ t. Kolik je navor (M) gredi motorja pri tej moči, če se gred vrti s frekvenco $\nu = 4200$/min? Trenje in upor zraka zanemarimo.

$$P = A/t = mv^2/2t = 40 \text{ kW}$$
$$P = M\omega \text{ ali } M = P/(2\pi\nu) = 91 \text{ Nm}$$

11.21. S kolikšno povprečno močjo vozi kolesar, če pritiska na pedala s povprečno silo $F = 200$ N? Dolžina ročice pedala je $r = 20$ cm, pedalo opiše polni kot v času $t_0 = 1$ s.

$P = M\omega = Fr \,.\, 2\pi/t_0 = 250$ W

11.22. Elektromotor poganja s stalno kotno hitrostjo $\omega_1 = 100$/s gred s polmerom $r = 5$ cm. Ta je prek jermena zvezana s kolesom (polmer $R = 15$ cm), ki je pritrjeno na vzporedno gred z enakim polmerom r. Okrog te gredi je navita vrv, na kateri visi tovor z maso $m = 1$ t. S kolikšno hitrostjo (v) se dviguje tovor? Kolikšna mora biti moč (P) motorja?



Druga gred s kolesom se vrti s kotno hitrostjo $\omega_2 = \omega_1 r/R$, zato se tovor dviguje s hitrostjo $v = r\omega_2 = \omega_1 r^2/R = 1{,}7$ m/s. Če zanemarimo energijske izgube, je moč motorja enaka moči sile mg v vrvi, ki dviguje tovor:

$P = mgv = mg\omega_1 r^2/R = 16$ kW

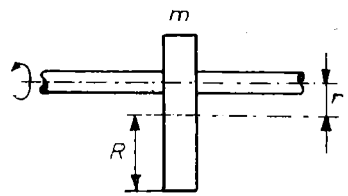
11.23. Elektromotor poganja vitel z vztrajnostnim momentom $J = 4$ kgm^2. Kako se kotna hitrost vitla (ω) spreminja s časom, če je moč P motorja stalna? Kako se mora s časom spreminjati moč motorja (P_1), da se vitel vrti enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom $\alpha = 1/\mathrm{s}^2$?

$P = M\omega = J\alpha\omega = J\omega \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = (J/2)\mathrm{d}\omega^2/\mathrm{d}t$ ali
$\mathrm{d}\omega^2 = (2P/J)\mathrm{d}t$, začetni pogoj: $\omega = 0$ za $t = 0$
$\omega^2 = 2Pt/J$ ali $\omega = (2Pt/J)^{1/2}$
$P_1 = M\omega = J\alpha\omega = J\alpha^2 t$

Moč mora naraščati premo sorazmerno s časom.

11.24. Valjast ekscenter z maso $m = 1$ kg in polmerom $R = 4$ cm se vrti s frekvenco $\nu_0 = 10$/s in se nato zaradi trenja v ležajih ustavi po času $t = 4$ s. Kolikšno moč (P) mora imeti elektromotor, ki poganja os ekscentra, da se ta vrti s stalno kotno hitrostjo $\omega = 80$/s? Os ekscentra je za $r = 2$ cm oddaljena od osi elektromotorja.

$M = J\alpha = J\omega_0/t$
$P = M\omega = J\omega_0\omega/t$
$P = (mR^2/2 + mr^2)\omega_0\omega/t$
$P = 1{,}5$ W



11.25. Z močjo P, ki narašča s časom po enačbi: $P = at^2$ ($a = 100$ kW/s^2), začnemo poganjati vztrajnik, ki ima vztrajnostni moment $J = 25$ kgm^2. Koliko časa (t_1) moramo poganjati, da se kotna hitrost vztrajnika poveča na $\omega_1 = 100$/s? Koliko vrtljajev (n) napravi vztrajnik v tem času?

$W_k = A = \int_0^t P\mathrm{d}t$
$J\omega^2/2 = at^3/3$ ali
$t_1 = (3J\omega_1^2/2a)^{1/3} = 1{,}6$ s
$\varphi = \int_0^{t_1} \omega \mathrm{d}t = (2a/3J)^{1/2} \int_0^{t_1} t^{3/2}\mathrm{d}t = (2a/3J)^{1/2}(2/5)t_1^{5/2} = 62$
$n = \varphi/2\pi = 9{,}8$

12. KINETIČNA ENERGIJA

12.1. Avtomobil (masa m = 800 kg) se giblje pospešeno po vodoravni poti; njegova hitrost naraste na poti x = 50 m od v_1 = 36 km/h na v_2 = 72 km/h. Koliko dela je treba za to, če gibanju nasprotuje povprečna sila F = 390 N?

Delo A mora povečati kinetično energijo avtomobila in obenem premagovati zaviralno silo F:

$A = (mv_2^2/2 - mv_1^2/2) + Fx$ = 120 kJ + 20 kJ = 140 kJ

12.2. S kolikšno začetno hitrostjo (v_0) moramo potisniti sani po vodoravni podlagi, da se ustavijo na poti x = 48 m? Drsenje zavira drsna torna sila, ki znaša p = 6 odstotkov teže sani. Upor zraka zanemarimo.

$mv_0^2/2 = F_t x = pmgx$ ali
$v_0 = (2pgx)^{1/2}$ = 7,5 m/s

12.3. S hitrostjo v_0 = 10 m/s zadrsamo telo navzgor po klancu z naklonskim kotom $\varphi = 10^0$; ustavi se po poti x = 10 m. Kolik je drsni torni koeficient k_t med telesom in klancem?

$mv_0^2/2 = (mg \sin\varphi + k_t mg \cos\varphi)x$ ali
$k_t = (v_0^2/2 - gx \sin\varphi)/(gx \cos\varphi)$ = 0,34

12.4. Kroglica z maso m = 8 g in hitrostjo v_0 = 250 m/s se v vodoravni smeri zarine v debelo desko; ustavi se na globini d = 4 cm. Kolik je povprečen upor (F) deske? Kaj se zgodi, če je deska debela le d_1 = 1 cm?

$mv_0^2/2 = Fd$ ali $F = mv_0^2/2d$ = 6250 N

Tanjšo desko kroglica prebije in izstopi iz nje s hitrostjo v_1:

$mv_0^2/2 = Fd_1 + mv_1^2/2$
$v_1^2 = v_0^2 - 2Fd_1/m = v_0^2(1 - d_1/d)$, v_1 = 220 m/s

12.5. Iz topa (masa M = 750 kg) izstrelimo granato z maso m = 4 kg in kinetično energijo W_1 = 0,72 MJ. S kolikšno kinetično energijo (W_2) udari top nazaj?

$Mv_2 = mv_1$ $\quad v_1$ = hitrost granate
$\quad v_2$ = hitrost topa
$W_2 = Mv_2^2/2 = m^2v_1^2/2M = (m/M)W_1$ = 3,8 kJ

12.6. Lokomotiva začne vleči vlak; skupna masa je m = 2000 t. S kolikšno stalno silo (F) mora vleči, da se hitrost vlaka v času t = 2 min poveča od nič do v = 36 km/h, če gibanju vlaka nasprotuje sila F_1, ki je p = 5% teže vlaka?

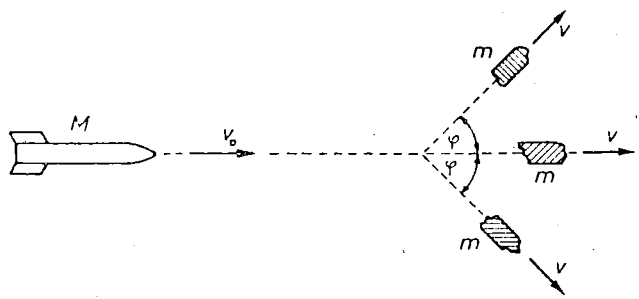
a) Rešitev s pomočjo gibalne količine:
Sunek sile je enak spremembi gibalne količine: $(F - F_1)t = mv$ ali

$F = mv/t + F_1 = mv/t + pmg$

b) Rešitev s pomočjo energije:
Delo vlečne sile F na poti $x = at^2/2 = vt/2$ se porabi za premagovanje zavorne sile F_1 in za povečanje kinetične energije vlaka od nič do $mv^2/2$:

$Fx = mv^2/2 + F_1x$ ali
$F = pmg + mv^2/2x = pmg + mv/t$ = 1,2 MN

12.7. Projektil z maso M = 100 kg se pri hitorsti v_0 = 500 m/s razleti v tri enake dele. Vsak del odleti z enako veliko hitrostjo; eden v prvotni smeri, druga dva pa simetrično pod kotom φ = 45° glede na prvotno smer. Kolikšna je kinetična energija (W_1) vsakega dela? Za koliko odstotkov je celotna kineregija po razstrelitvi večja od začetne kinetične energije projektila?



$m = M/3$ = masa vsakega dela
$Mv_0 = mv + 2mv \cos\varphi$ ali
$v = Mv_0/m(1 + 2 \cos\varphi) = 3v_0/(1 + 2 \cos\varphi)$
$W_1 = mv^2/2 = 1{,}5\, Mv_0^2(1 + 2 \cos\varphi)^{-2}$ = 6,4 MJ
$p = (3W_1 - W_0)/W_0 = 3W_1/W_0 - 1 = 9(1 + 2 \cos\varphi)^{-2} - 1$
p = 0,54 = 54 %

12.8. Kolikšna je rotacijska energija Zemlje zaradi dnevnega vrtenja (W_d) in kolikšna zaradi letnega kroženja (W_l)? Polmer Zemlje je R = 6400 km, povprečna gostota je ϱ = 5,6 g/cm³, povprečna oddaljenost od Sonca je r = 150 milijonov km.

$W_d = J_z\omega_d^2/2 = mR^2\omega_d^2/5 = 4\pi\varrho R^5\omega_d^2/15 = 2{,}7 \cdot 10^{29}$ J
$W_l = J\omega_l^2/2 = mr^2\omega_l^2/2 = 2{,}8 \cdot 10^{33}$ J

12.9. Kroglica z maso $m = 0{,}5$ kg je pritrjena na koncu lahke palice z dolžino $b = 1$ m. Palica se vrti v navpični ravnini s stalno frekvenco $\nu = 300$/min okrog vodoravne osi, ki gre skozi drugi konec palice. Kolikšna je kinetična energija kroglice?

$W_k = mv^2/2 = m(b\omega)^2/2 = 2\pi^2 mb^2\nu^2 = 247$ J

12.10. Krogla ima polmer $R = 10$ cm in maso $m = 2$ kg. Kolikšna je njena rotacijska energija (W_1), če se vrti s kotno hitrostjo $\omega = 2$/s okrog geometrijske osi, in kolikšna (W_2), če se vrti okrog osi, ki se tangentno dotika krogle?

$W_1 = J_1\omega^2/2 = mR^2\omega^2/5 = 0{,}016$ J
$W_2 = J_2\omega^2/2 = (J_1 + mR^2)\omega^2/2 = W_1 + mR^2\omega^2/2 = 0{,}056$ J

12.11. Valj z maso $m = 8$ kg, dolžino $h = 30$ cm in polmerom $R = 10$ cm se vrti okrog geometrijske osi s kotno hitrostjo $\omega = 10$/s. Kolikšna je rotacijska energija valja (W_1)? S kako debelo oblogo svinca (d) moramo obdati plašč valja, da se njegova kinetična energija pri enaki kotni hitorsti poveča $n = 3$ krat? Gostota svinca je $\varrho = 11{,}3$ g/cm^3.

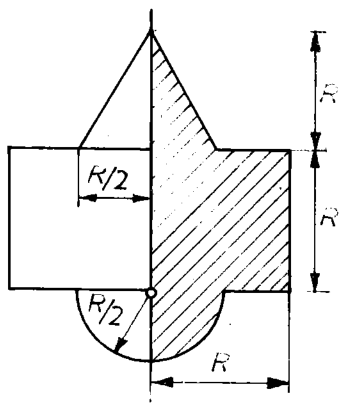
$W_1 = J_1\omega^2/2 = mR^2\omega^2/4 = 2{,}0$ J

Predpostavimo, da je debelina svinčene obloge majhna v primerjavi s polmerom valja. Z oblogo se mora vztrajnostni moment povečati za enak faktor n, kot se poveča rotacijska energija:

$J_1 + 2\pi Rh\varrho d\, R^2 = nJ_1$ ali
$d = (n-1)J_1/(2\pi h\varrho R^3) = (n-1)m/(4\pi h\varrho R) = 3{,}8$ mm

Če d ne bi bil majhen v primerjavi z R, bi morali računati vztrajnostni moment svinčene obloge kot za votel valj.

12.12. Izračunaj rotacijsko energijo rotacijsko simetričnega telesa, katerega prerez je na sliki.

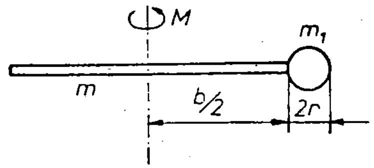


Polmer je $R = 10$ cm, telo se vrti okrog geometrijske osi s frekvenco $\nu = 120$/min, gostota snovi je $\varrho = 8{,}9$ g/cm^3.

$W_r = J\omega^2/2 = 2\pi^2\nu^2 J$
$J = J_s + J_v + J_k$
$J_s = 3m_s(R/2)^2/10 = \pi\varrho R^5/160$
$J_v = m_v R^2/2 = \pi\varrho R^2 RR^2/2 = \pi\varrho R^5/2$
$J_k = 2m_k(R/2)^2/5 = 4\pi\varrho(R/2)^5/15 = \pi\varrho R^5/120$
$J = 247\pi\varrho R^5/480$
$W_r = 247\varrho\pi^3 R^5\nu^2/240 = 11$ J

12.13. Palica z dolžino $b = 60$ cm in maso $m = 4$ kg je v sredi pritrjena na os, ki je pravokotna nanjo. Na enem koncu palice je pritrjena kroglica s polmerom $r = 5$ cm in maso $m_1 = 1$ kg. Palico vrtimo okrog osi s stalnim navorom $M = 150$ Nm. Kolikšna je rotacijska energija palice (W_r) po času $t = 5$ s, če je palica v začetku mirovala?

$W_r = J\omega^2/2$
$\omega = \alpha t = (M/J)t$
$J = mb^2/12 + m_1(b/2 + r)^2 + 2m_1 r^2/5$
$W_r = M^2t^2/2J = 1{,}2$ MJ



Drugačna rešitev:
Delo navora $A = M\varphi$ se spremeni v rotacijsko energijo: $W_r = M\varphi$, kjer je $\varphi = \alpha t^2/2 = Mt^2/2J$.

12.14. Otroški avtomobilček z maso $m = 300$ g ima vgrajen vztrajnik z vztrajnostnim momentom $J = 0{,}001$ kgm^2. Avtomobilček porinemo, da se vztrajnik zavrti s frekvenco $\nu = 15$/s. Koliko dela je treba za to? Kolikšno pot (x) napravi avtomobilček na vodoravnih tleh, če je zavorna sila $p = 10\%$ njegove teže?

$A = J\omega^2/2 = 2\pi^2\nu^2 J = 4{,}4$ J
$J\omega^2/2 = pmgx, \qquad x = A/(pmg) = 15$ m

12.15. Človek miruje na stolu, ki se lahko vrti okrog navpične osi, in drži v rokah vrtavko. Vztrajnostni moment stola in človeka je $J_0 = 5$ kgm^2. Vrtavka ima vztrajnostni moment $J_1 = 0{,}1$ kgm^2 in se vrti okrog navpične osi s kotno hitrostjo $\omega_1 = 10$/s. Najmanj koliko dela mora opraviti človek, da zasuče vrtavkino os za 180°?

Ko zasuče vrtavkino os, se sam s stolom vred začne vrteti, da se celotna vrtilna količina ohranja (gl. nalogo 10.20.):

$J_1\omega_1 = J_0\omega - J_1\omega_1$, $\quad 2J_1\omega_1 = J_0 \cdot \omega$
$\omega = 2J_1\omega_1/J_0$

Človek mora opraviti najmanj toliko dela A, kolikor znaša rotacijska energija:

$A = J_0\omega^2/2 = 2J_1^2\omega_1^2/J_0 = 0{,}4$ J

12.16. Krogla z maso $m_1 = 1$ kg in polmerom $R_1 = 5$ cm se vrti okrog geometrijske osi s kotno hitrostjo $\omega_0 = 10$/s. Na vrtilno os nataknemo drugo kroglo s polmerom $R_2 = 2$ cm in maso $m_2 = 0{,}5$ kg, ki lahko prosto drsi vzdolž osi. Druga krogla v začetku miruje, nato jo spustimo, da se dotakne prve. S kolikšno kotno hitrostjo (ω) se na koncu vrtita obe krogli skupaj? Kolikšna je sprememba rotacijske energije?

Vrtilna količina se ohranja:

$J_1\omega_0 = (J_1 + J_2)\omega$
$\omega \;= \omega_0 m_1 R_1^2/(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) = 9{,}3$/s
$W_{r_1} = J_1\omega_0^2/2$
$W_{r_2} = (J_1 + J_2)\omega^2/2 = J_1^2\omega_0^2/2(J_1 + J_2) = W_{r_1}J_1/(J_1 + J_2)$

Končna rotacijska energija je manjša od začetne, ker se nekaj energije potroši zaradi trenja med podrsavanjem krogel.

$\Delta W_r = W_{r_1} - W_{r_2} = J_2 W_{r1}/(J_1 + J_2) = 3{,}7 \cdot 10^{-3} J$

12.17. Krogla z maso m in polmerom R se vrti okrog lastne geometrijske osi s kotno hitrostjo ω. Obenem težišče krogle potuje s stalno hitrostjo v po krogu s polmerom r (primer: dnevno vrtenje Zemlje in njeno letno kroženje). Kolikšna je celotna kinetična energija krogle?

$W_k = mv^2/2 + J\omega^2/2 = mv^2/2 + mR^2\omega^2/5$

12.18. Kolikšna je kinetična energija krogle, ki se kotali po vodoravni podlagi tako, da se njeno težišče giblje s hitrostjo v?

Kotaljenje je sestavljeno iz translatornega gibanja s hitrostjo v težišča in iz vrtenja s kotno hitrostjo $\omega = v/R$ okrog osi skozi težišče:

$W_k = mv^2/2 + J_0\omega^2/2 = mv^2/2 + mv^2/5 = 7mv^2/10$

Kotaljenje lahko obravnavamo tudi kot čisto kroženje okrog osi skozi dotikališče krogle s tlemi:

$W_k = J\omega^2/2 = (mR^2 + 2mR^2/5)(v/R)^2/2 = 7\ mv^2/10$

12.19. Biljardno kroglico (polmer R) postavimo na vodoravna tla in jo sunemo v vodoravni smeri, tako da se začne gibati translatorno s hitrostjo v_0. Kroglica najprej drsi po tleh, nato se začne kotaliti. Koliki del (p) začetne kinetične energije izgubi med drsenjem na račun trenja?

$W_0 = mv_0^2/2 =$ začetna kinetična energija kroglice.
Med kotaljenjem se kroglica vrti s kotno hitrostjo v/R, pri čemer je v hitrost težišča $=$ $= 5v_0/7$, torej ima kroglica kinetično energijo:

$W_1 = mv^2/2 + (2mR^2/5)(v/R)^2/2 = 7mv^2/10 = 5mv_0^2/14$
$p = (W_0 - W_1)/W_0 = 1 - W_1/W_0 = 1 - 5/7 \doteq 2/7$

12.20. Gladka plošča s polmerom R se vrti okrog navpične geometrijske osi s stalno kotno hitrostjo ω. Na ploščo položimo na oddaljenosti r_0 od osi telo, ki se lahko giblje po plošči le v radialni smeri. Ko telo spustimo, začne drseti proti robu plošče. V kolikšnem času (t_1) ga doseže? S kolikšno kinetično energijo (W) zapusti ploščo? Masa telesa je m.

Opazovalec na plošči pravi, da se telo giblje v radialni smeri s hitrostjo $v_r = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, ki jo povečuje vztrajnostna (centrifugalna) sila:

$F = mr\omega^2 = m\,\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}t = mv_r\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}r$ ali
$v_r\mathrm{d}v_r = \omega^2 r\mathrm{d}r$, $v_r = 0$ pri $r = r_0$

Po integraciji dobimo:

$v_r = \omega(r^2 - r_0^2)^{1/2} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ ali
$\omega\mathrm{d}t = (r^2 - r_0^2)^{-1/2}\mathrm{d}r$, $r = r_0$ za $t = 0$
$t = (1/\omega)\ln[r/r_0 + (r^2/r_0^2 - 1)^{1/2}]$
$t = t_1$ za $r = R$
$t_1 = (1/\omega)\ln[R/r_0 + (R^2/r_0^2 - 1)^{1/2}]$

Opazovalec na plošči misli, da kroglica zapusti ploščo v radialni smeri s kinetično energijo $W' = mv_r^2/2 = m\omega^2(R^2 - r_0^2)/2$.
Zunanji opazovalec pa ve, da mora k relativni hitrosti v_r prišteti tangentno hitrost $R\omega$ zaradi vrtenja plošče, zato je prava kinetična energija telesa enaka:

$W = W' + m(R\omega)^2/2 = m\omega^2(R^2 - r_0^2/2)$

Povečanje kinetične energije telesa od W_0 na W krije zunanji navor M, ki vrti ploščo in opravlja delo, da se plošča kljub povečevanju vztrajnostnega momenta (ker se telo odmika od osi) vrti s stalno kotno hitrostjo ω.

$M\mathrm{d}t = \mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}(J\omega) = \mathrm{d}(mr^2\omega) = 2m\omega r\mathrm{d}r$

V časovnem intervalu $\mathrm{d}t$, ko se plošča zasuče za kot $\mathrm{d}\varphi = \omega\mathrm{d}t$, opravi navor M delo $\mathrm{d}A$ $= M\mathrm{d}\varphi = 2m\omega^2 r\mathrm{d}r$. Celotno delo je:

$A = 2m\omega^2\int_{r_0}^{R} r\mathrm{d}r = m\omega^2(R^2 - r_0^2)$
$W = W_0 + A = m(r_0\omega)^2/2 + m\omega^2(R^2 - r_0^2) = m\omega^2(R^2 - r_0^2/2)$

12.21. Naloga je podobna prejšnji, le da se plošča vrti prosto, brez pomoči zunanjega navora. Ko telo spustimo, se plošča vrti z začetno kotno hitrostjo ω_0. Kolikšna je njena kotna hitrost (ω_1) v trenutku, ko jo telo zapusti? Kolikšna je kinetična energija (W_1) telesa na robu plošče? Vztrajnostni moment plošče zanemarimo v primerjavi z vztrajnostnim momementom telesa.

Ker ni zunanjih navorov in ker vztrajnostni moment plošče zanemarimo, se vrtilna količina telesa ohranja: $mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega$ ali $\omega = \omega_0 r_0^2/r^2$:

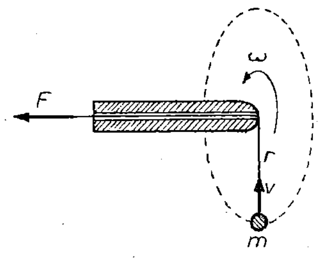
$\omega_1 = \omega_0 r_1^2/R^2$

Tudi kinetična energija telesa se ohranja (le prvotna rotacijska energija se deloma spremeni v translacijsko zaradi gibanja v radialni smeri):

$W_1 = mr_0^2\omega_0^2/2$

12.22. Kroglico z maso m pritrdimo na konec vrvi. Drugi konec vrvi potegnemo skozi vodoravno cevko. Kroglico poženemo, da kroži v navpični ravnini s kotno hitrostjo ω_0 po krogu s polmerom r_0. S kolikšno radialno hitrostjo v se kroglica približuje ustju cevke, če vlečemo vrvico na drugi strani cevke s stalno silo F? Na največ kolikšno razdaljo (r_1) se kroglica lahko približa cevki?

Ker sta navora vlečne sile F in teže kroglice glede na vrtilno os nič, je vrtilna količina kroglice stalna: $mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega$ ali $\omega = \omega_0(r_0/r)^2$.
Kroglica kroži in se obenem giblje tudi v radialni smeri s hitrostjo $v = -dr/dt$. Njena kinetična energija je zato sestavljena iz dveh členov:



$$W_k = mv^2/2 + J\omega^2/2 = mv^2/2 + mr^2\omega_0^2(r_0/r)^4/2$$
$$W_k = mv^2/2 + m\omega_0^2 r_0^4/2r^2$$

Povečanje kinetične energije kroglice je enako delu vlečne sile F:

$$W_k(r) - W_k(r_0) = A = F(r_0 - r) \text{ ali}$$
$$mv^2/2 + m\omega_0^2 r_0^4/2r^2 - m\omega_0^2 r_0^2/2 = F(r_0 - r)$$
$$v^2 = r_0^2\omega_0^2 + (2F/m)(r_0 - r) - \omega_0^2 r_0^4/r^2$$

Radialna hitrost v se najprej povečuje (ko se r zmanjšuje), doseže največjo vrednost in se nato zmanjšuje do nič pri $r = r_1$:

$$(r_0 - r_1)[(2F/m)r_1^2 - \omega_0^2 r_0^2(r_0 + r_1)] = 0$$

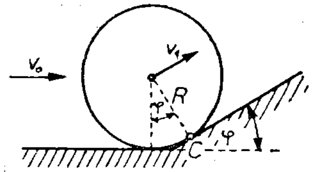
Rešitev $r_1 = r_0$ ustreza začetnemu stanju. Za nas je pomembna druga rešitev:

$$r_1^2 - (m\omega_0^2 r_0^2/2F)r_1 - m\omega_0^2 r_0^3/2F = 0$$

$$r_1 = (m\omega_0^2 r_0^2/4F)[1 + \sqrt{1 + 8F/(m\omega_0^2 r_0)}]$$

12.23. Valj s polmerom R se kotali po vodoravni podlagi; hitrost težišča je v_0. Ko zadene ob klanec z naklonskim kotom φ, se zakotali navzgor, ne da bi se odbil od njega. Kolikšno hitrost (v_1) ima težišče na začetku klanca? Kolik del (p) začetne kinetične energije izgubi valj zaradi neprožnega trka s klancem?

Trk valja s klancem traja tako kratek čas, da lahko sunek navora teže zanemarimo in predpostavimo, da se vrtilna količina valja med trkom ne spremeni.
Vrtilna količina valja glede na vodoravno os skozi dotikališče C tik pred trkom je bila $mv_0R\cos\varphi + mR^2\omega_0/2$, pri čemer je $\omega_0 = v_0/R$; tik po trku pa $(3mR^2/2)(v_1/R) = 3mv_1R/2$. Vrtilni količini izenačimo in dobimo:



$$v_1 = v_0(1 + 2\cos\varphi)/3$$
$$p = (W_0 - W_1)/W_0 = 1 - W_1/W_0 = 1 - (v_1/v_0)^2$$
$$p = 1 - (1 + 2\cos\varphi)^2/9$$

13. POTENCIALNA IN PROŽNOSTNA ENERGIJA

13.1. Navpična valjasta posoda (višina $h = 20$ cm, presek $S = 10$ cm^2) je do polovice napolnjena z vodo. Najmanj koliko dela (A_1) je treba, da izčrpamo vodo iz posode? Koliko dela (A_2) pa je treba, da izčrpamo le polovico vode?

Težišče vode v posodi je na višini $h/4$ nad dnom. Če želimo posodo izprazniti, moramo težišče vode dvigniti vsaj do roba, to je za višinsko razliko $3h/4$:

$$A_1 = mg3h/4 = S\varrho(h/2)g3h/4 = 3\varrho gh^2S/8 = 0{,}15 \text{ J}$$

Zgornja polovica vode v posodi (ki jo izčrpamo) ima težišče na višini $3h/8$ nad dnom, zato je:

$$A_2 = (m/2)g5h/8 = 5\varrho gh^2S/32 = 0{,}06 \text{ J}$$

13.2. Koliko dela opravi motor, ki poganja premične stopnice, da prepelje $n = 5$ ljudi (vsak ima maso $m = 75$ kg) eno nadstropnje višje (za višinsko razliko $h = 5$ m)?

$$A = n\,mgh = 18 \text{ kJ}$$

13.3. Na težkem kablu z dolžino $b = 30$ m in maso $m = 60$ kg visi breme z maso $M = 250$ kg. Zgornji konec kabla je navit na vitel, ki ga začnemo vrteti. Najmanj koliko dela moramo opraviti, da dvignemo breme do višine vitla, to je za višinsko razliko b?

Premagujemo težo bremena (Mg) in visečega dela kabla. Ko se breme dvigne za x, je sila enaka:

$$F = Mg + (b - x)(m/b)g$$
$$dA = Fdx$$
$$A = \int dA = g\int_0^b (M + m - mx/b)dx$$
$$A = Mgb + mgb/2 = gb(M + m/2) = 82 \text{ kJ}$$

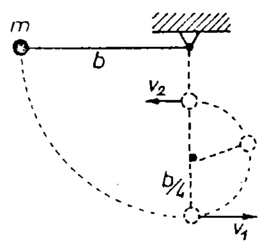
13.4. Kamen z maso $m = 2$ kg spustimo z višine h; na tla pade po času $t = 2$ s. Kolikšni sta kinetična in potencialna energija kamna na polovici višine?

$h = gt^2/2$
$W_p = mgh/2 = 193$ J
$W_k = mgh - mgh/2 = mgh/2 = W_p = 193$ J

13.5. Z vrha klanca z dolžino $x = 30$ m in nagibom $\varphi = 5°$ porinemo telo z začetno hitrostjo $v_0 = 3$ m/s. Kolikšna je hitrost telesa (v) na dnu klanca? Trenje in upor zraka zanemarimo.

$mv^2/2 = mv_0^2/2 + mgh$, $h = x \sin\varphi$
$v^2 = v_0^2 + 2gx \sin\varphi$, $v = 7{,}8$ m/s

13.6. Kroglica z maso m je privezana na vrvico z dolžino b, ki je pritrjena na strop. Kroglico z nategnjeno vrvico spustimo z višine stropa. Ko vrvica doseže navpično smer, zadene ob čep, ki je $3b/4$ pod pritrdiščem vrvice, in se zavrti okrog njega. Kolikšna je hitrost (v_2) kroglice v najvišji točki novega loka in kolikšna je (v_1) v najnižji?

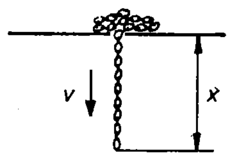


$v_1^2 = 2gb$, $v_2^2 = 2g(b - b/2) = gb$

13.7. Smučar se spusti po ravni strmini. Ko presmuča pot $x = 100$ m z višinsko razliko $h = 40$ m, doseže hitrost $v = 72$ km/h. Kolikšen je povprečni drsni torni koeficient k_t? Upor zraka zanemarimo.

$mgh = mv^2/2 + F_t x = mv^2/2 + k_t mg \cos\varphi\, x$
$k_t = (gh - v^2/2)/(xg \cos\varphi)$, $\sin\varphi = h/x$, $\varphi = 24°$
$k_t = 0{,}2$

13.8. Veriga (dolžina b, masa na enoto dolžine u) leži na gladki mizi z luknjico, skozi katero prične v trenutku $t = 0$ drseti konec verige. Kako se hitrost (v) padajočega dela verige spreminja z globino? Kolikšna je v trenutku, ko zadnji čle-nek verige zdrkne skozi luknjico (v_0)? Predpostavljamo, da se hitrost členka verige, ko ta zdrsne v luknjico, skoraj v trenutku poveča od nič do v. Koliko časa (t_0) je treba, da cela veriga zapusti mizo?



V poljubnem trenutku t je dolžina visečega dela verige x in hitrost v. Težišče tega dela verige se je spustilo za $x/2$. Zmanjšanje potencialne energije je enako povečanju kinetične:

$\cancel{m}g\, x/2 = \cancel{m}v^2/2$, $m = xu$
$v = (gx)^{1/2}$ ter
$v_0 = (gb)^{1/2}$

Ta problem razrešimo še s pomočjo sile in gibalne količine. Na viseči konec verige deluje teža uxg, ki povečuje gibalno količino:

$ugx = dG/dt = d(uxv)/dt = uv^2 + ux\, dv/dt = uv^2 + (ux/2)dv^2/dx$ ali
$x\, dv^2/dx + 2v^2 = 2gx$,

kar je diferencialna enačba za funkcijo v^2; začetni pogoj je $v = 0$ za $x = 0$. Rešitev ima obliko:

$v^2 = 2gx/3$ ali $v = (2gx/3)^{1/2}$ in $v_0 = (2gb/3)^{1/2}$

Vidimo, da smo dobili drugačen rezultat kot zgoraj s pomočjo energije. Kaj je narobe? Napačno smo izrazili kinetično energijo padajočega dela verige. Izraz $mv^2/2$ namreč velja le, če je m konstanten, v našem primeru pa se spreminja. Pravilno izrazimo takole:

$dW_k = Fdx = (dG/dt)dx = vdG = vd(mv) = v^2dm + mv\, dv = v^2dm + (m/2)d(v^2)$,
$dm = udx$
$dW_k = uv^2dx + (ux/2)dv^2$
$dW_k = dW_p = d(uxg\, x/2) = ugx\, dx$

Dobimo enako diferencialno enačbo za v^2 kot zgoraj. Če pa se masa spreminja, energijski izrek ni primeren, bolje je računati s silo in gibalno količino.

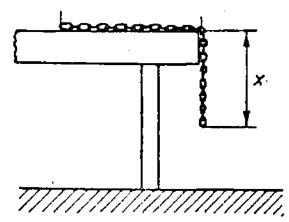
$a = dv/dt = (dv/dx)(dx/dt) = v\, dv/dx = (1/2)dv^2/dx$
$a = g/3$

Veriga torej pada enakomerno pospešeno s pospeškom g/3, zato velja:

$b = at_0^2/2$ ali
$t_0 = (Gb/g)^{1/2}$

13.9. Veriga z dolžino b in maso m drsi prek roba gladke mize. Spustimo jo v trenutku, ko prek roba visi odsek z dolžino h. V kolikšnem času (t_0) doseže zadnji členek verige rob mize? Kolikšna je tedaj hitrost (v_0) verige? Trenje zanemarimo.

Ko prek roba visi odsek z dolžino x, je težišče celotne verige na globini $x_c = x^2/2b$ pod mizo, zato velja:



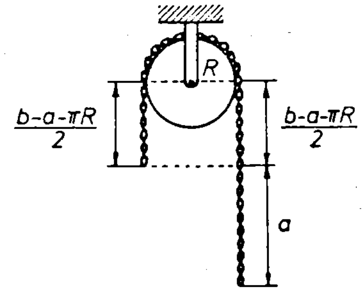
$mv^2/2 = mg(x^2 - h^2)/2b$ ali
$v^2 = (g/b)(x^2 - h^2)$ oziroma
$v_0^2 = (g/b)(b^2 - h^2)$
$v = dx/dt$ ali $dt = dx/v$
$(b/g)^{1/2}dt = (x^2 - h^2)^{-1/2}dx$, $x = h$ za $t = 0$

Po integraciji dobimo:

$t = (b/g)^{1/2}\ln[x/h + (x^2/h^2 - 1)^{1/2}]$
$t_0 = (b/g)^{1/2}\ln[b/h + (b^2/h^2 - 1)^{1/2}]$

13.10. Veriga (dolžina *b*, masa na enoto dolžine *u*) je napeljana prek valjastega škripca, ki ima maso *m* in polmer *R*. Spustimo jo v trenutku, ko je en konec za *a* niže od drugega konca. Kolikšna je hitrost (*v*) verige v trenutku, ko se zadnji členek verige odloči od škripca?

Težišče verige je v začetku na globini x_1 pod vrtiščem škripca:



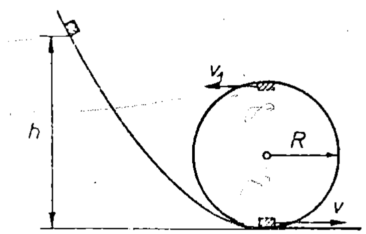
$x_1 b = (b - a - \mathrm{pR})(b - a - \mathrm{pR})/4 + a(b - \mathrm{pR})/2 - \mathrm{pR}.2R/\mathrm{p}$

Na koncu je težišče na globini $x_2 = b/2$ pod vrtiščem. Energijski stavek da enačbo:

$\mathrm{ubg}(x_2 - x_1) = \mathrm{ubv}^2/2 + J\omega^2/2 =$
$= (ub + m/2)v^2/2$
$v^2 = 2\mathrm{ubg}(x_2 - x_1)/(\mathrm{ub} + m/2)$

13.11. Poševen žleb zavije v navpičen krog s polmerom $R = 30$ cm. Po žlebu spustimo košček ledu. Z najmanj kolikšne višine (h) ga moramo spustiti, da v zgornji točki kroga ne pade iz žleba?

Košček ledu se na dnu žleba s hitrostjo $v = (2\mathrm{gh})^{1/2}$ zaleti v krog. Da ostane v žlebu, mora imeti v zgornji točki kroga najmanj hitrost v_1, za katero velja: $mv_1{}^2/R = mg$ (glej nalogo 6.12.) ali $v_1{}^2 = \mathrm{Rg}$. Velja še:



$mv^2/2 = mg2\mathrm{R} + mv_1^2/2 = 2\mathrm{mgR}$
$+ \mathrm{mgR}/2 = 5\mathrm{mgR}/2$ ali
$v^2 = 5\mathrm{gR} = 2\mathrm{gh}$
$\mathrm{h} = 5\mathrm{R}/2 = 2\mathrm{R} + R/2 = 75$ cm

Zgornji rezultat dobimo tudi neposredno iz enačbe:
$mg(\mathrm{h} - 2\mathrm{R}) = mv_1^2/2 = \mathrm{mgR}/2$

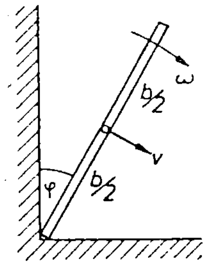
13.12. Naloga je podobna prejšnji, le da se po žlebu kotali kroglica s polmerom r.

Ko se težišče kroglice giblje s hitrostjo v_1, se kroglica vrti s kotno hitrostjo $\omega_1 = v_1/R$ in ima zato celotno kinetično energijo $mv_1{}^2/2 + J\omega_1{}^2/2 = mv_1{}^2/2 + mv_1{}^2/5 = 7\ mv_1{}^2/10$, ki je enaka zmanjšani težnostni energiji težišča kroglice $mg(\mathrm{h} - 2\mathrm{R})$:

$mg(\mathrm{h} - 2\mathrm{R}) = 7\mathrm{mv}_1{}^2/10 = 7mgR/10$ ali
$\mathrm{h} = 27\mathrm{R}/10$

13.13. Palica z dolžino $b = 4\ m$ stoji na vodoravnih tleh, prislonjena ob navpičen zid. Vrh palice odmaknemo od zidu, da začne palica padati, pri čemer se vrti okrog spodnjega konca. S kolikšno hitrostjo (v_1) udari težišče palice ob tla?

Ko se palica zasuka za kot φ, se vrti okrog vodoravne osi skozi spodnji konec s kotno hitrostjo $\omega = 2v/b$, pri čemer je *v* hitrost težišča. To se je spustilo za $b(1 - \cos\varphi)/2$, zato velja:



$mgb(1 - \cos\varphi)/2 = J\omega^2/2$
Ker je $J = \mathrm{mb}^2/3$, dobimo:

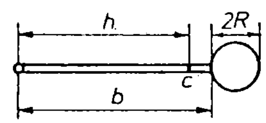
$\omega^2 = (3g/b)(1 - \cos\varphi)$ ter
$v^2 = (b\omega/2)^2 = 3gb(1 - \cos\varphi)/4$, $v = v_1$ za $\varphi = 90°$
$v_1^2 = 3gb/4$, $v_1 = 5{,}4$ m/s.

13.14. Tanek obroč s polmerom $R = 10$ cm stoji pokonci na mizi. S kolikšno hitrostjo (v_1) udari težišče obroča ob mizo, če se obroč prevrne tako, da njegov spodnji konec ne zdrsne?

Računamo enako kot pri prejšnji nalogi:

$mgR = J\omega_1^2/2$, $J = mR^2/2 + mR^2 = 3mR^2/2$
$\omega_1^2 = 4g/3R = v_1^2/R^2$
$v_1 = (4gR/3)^{1/2} = 1{,}1$ m/s

13.15. Nihalo je sestavljeno iz krogle s polmerom $R = 5$ cm in maso $m_k = 1$ kg, ki je pritrjena na palico z dolžino $b = 20$ cm in maso $m_p = 500\,g$. Vrti se lahko okrog vodoravne osi skozi prost konec palice. S kolikšno kotno hitrostjo (ω_1) zaniha skozi ravnovesno lego, če ga spustimo z vodoravne lege?



$J\omega_1^2/2 = mgh$, m = masa nihala $= m_k + m_p$
h = oddaljenost težišča nihala od vrtišča:
$mh = m_p b/2 + m_k(b + R)$
$J = m_p b^2/3 + m_k(b + R)^2 + 2\ m_k R^2/5$
$\omega_1^2 = 2(m_p + m_k)gh/J =$
$= g[m_p b + 2m_k(b + R)]/[m_p b^2/3 + m_k(b + R)^2 + 2m_k R^2/5]$
$\omega_1 = 9{,}2/\mathrm{s}$

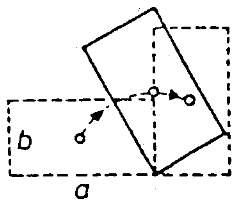
13.16. Nitno nihalo z dolžino $b = 1$ m je postavljeno na vozičku, ki se giblje enakomerno po vodoravnem tiru. Voziček se zaleti v zid in se ob njem ustavi, zaradi česar se nihalo odkloni. Kolikšna je bila hitrost (*v*) vozička, če se nihalo po udarcu odkloni za kot $\varphi = 30°$?

Kroglica nihala se v začetku giblje s hitrostjo *v*, to je s kinetično energijo $mv^2/2$ (*m* = masa kroglice). Ko se voziček ustavi, se kroglica dvigne za višino $h = b(1 - \cos\varphi)$, tako da je povečanje potencialne energije enako začetni kinetični energiji:

$mgh = mv^2/2$ ali
$v^2 = 2gh = 2gb(1 - \cos\varphi)$
$v = 1{,}6$ m/s

13.17. Najmanj koliko dela je treba, da se kvader s stranicami $a = 5$ cm, $b = 4$ cm in $c = 15$ cm, ki leži na vodoravnih tleh, prekucne okrog stranice c? Gostota kvadra je $\varrho = 0{,}9$ g/cm^3.

Težišče kvadra se dvigne z višine $b/2$ čez višino $h = 0{,}5(a^2 + b^2)^{1/2}$ in nato pade na višino $a/2$. Z delom A moramo kriti največje povečanje potencialne energije:



$$A = mg(h - b/2) = (abc\varrho g/2)[(a^2 + b^2)^{1/2} - b] = 0{,}032 \text{ J}$$

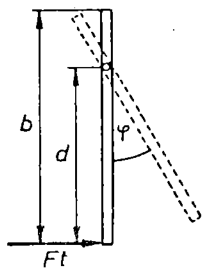
13.18. Tovornjak z maso $m = 10$ t začne voziti enakomerno pospešeno s pospeškom $a = 0{,}5$ m/s^2 navzgor po klancu z naklonskim kotom $\varphi = 5°$. Koliko dela (A) mora opraviti motor v času $t = 1$ min od začetka gibanja?

$A = mv^2/2 + mgh \quad , \quad h = x \sin\varphi \,, \ v = at \,, \ x = at^2/2$
$A = ma^2t^2/2 + mg(at^2/2) \sin\varphi$
$A = (mat^2/2)(a + g \sin\varphi) = 12$ MJ

Drugačen postopek:
Ker se tovornajak giblje enakomerno pospešeno, mora motor vleči s stalno silo $F = ma + mg \sin\varphi$, ki na poti $x = at^2/2$ opravi delo $A = Fx = (mat^2/2)(a + g \sin\varphi)$.

13.19. Palico (dolžina $b = 1$ m, masa $m = 1$ kg) pritrdimo na vodoravno os, in sicer na razdalji $d = 80$ cm od njenega konca. Spodnji (viseči) konec palice udarimo s kladivom v smeri pravokotno na palico in na os, tako da palica prejme sunek sile $Ft = 1$ Ns. Za kolik kot (φ) se palica po udarcu odkloni od navpičnice? Predpostavljamo tako kratek čas udarca, da se palica med udarcem praktično ne premakne iz ravnovesne lege.

Prejeti sunek navora $Mt = dFt$ se pretopi v začetno vrtilno količino $\Gamma_0 = J\omega_0$, ($J = mb^2/12 + m(d - b/2)^2 = 0{,}17$ kgm^2). Palica se torej odkloni z začetno kinetično energijo $J\omega_0^2/2 = \Gamma_0^2/2J = (dFt)^2/2J$, ki se nato spremeni v potencialno energijo odklonjene palice: $mgh = mg(d - b/2)(1 - \cos\varphi)$. Sledi:



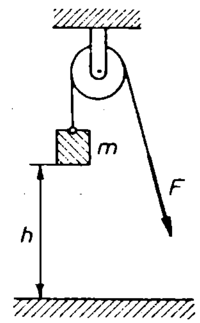
$\cos\varphi = 1 - (dFt)^2/[Jmg(2d - b)]$
$\varphi = 69°$

20 kg

13.20. Breme z maso $m = 200$ kg visi na višini $h = 20$ m nad tlemi. Njegovo padanje zaviramo s stalno silo F, npr. z vrvjo prek škripca. Kolikšna mora biti ta sila, da breme udari ob tla s hitrostjo $v = 10$ m/s?

Če bi breme prosto padalo, bi udarilo ob tla s kinetično energijo mgh, ki je večja od $mv^2/2$.

Višek energije mora odvzeti sila F, ki med padanjem opravlja negativno delo:



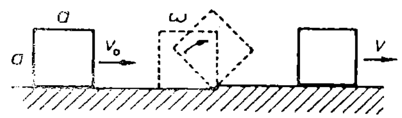
$mgh = mv^2/2 + Fh$
$F = mg - mv^2/2h = 150$ N

13.21. Palica z dolžino $b = 50$ cm in maso $m = 1$ kg je vrtljivo pritrjena na vodoravno os, ki gre skozi njen konec. V prosti konec palice se zaleti kroglica (masa u) s hitrostjo v v vodoravni smeri in se prilepi nanj. Z najmanj kolikšno hitrostjo mora udariti kroglica ob palico, da ta začne krožiti v navpični ravnini? Masa kroglice je majhna v primerjavi z maso palice.

Takoj po trku kroglice se palica odkloni s kotno hitrostjo ω_0, ki zadošča enačbi: $uvb = J\omega_0 = (mb^2/3)\omega_0$ ali $\omega_0 = 3uv/mb$. Začetna kinetična energija palice je torej $J\omega_0^2/2 = 3u^2v^2/2m$. Palica začne krožiti, če se njeno težišče dvigne za b, to je če se njena potencialna energija poveča za mgb. Sledi:

$3u^2v^2/2m = mgb$ ali
$v^2 = 2m^2gb/3u^2$, $v = 180$ m/s

13.22. Z najmanj kolikšno hitrostjo (v_0) mora drseti kocka po vodoravni podlagi, da se pri udarcu ob nizek prag zavrti okrog njega? Kolikšen del začetne kinetične energije (p) se ob udarcu (kot neprožen trk) izgubi? Višina pragu je zanemarliivo majhna v primerjavi s stranico kocke.



Trk kocke ob prag je tako kratkotrajen, da se vrtilna količina kocke med trkom praktično ne spremeni (sunek navora je zanemarljiv). Pred trkom ima kocka vrtilno količino $mv_0a/2$, po trku pa $J\omega$, kjer je $J = m(2a^2)/12 + m(a/\sqrt{2})^2 = 2ma^2/3$, ω pa kotna hitrost, s katero se kocka začne prevračati okrog pragu.

$\omega = mv_0a/2J = 3v_0/4a$

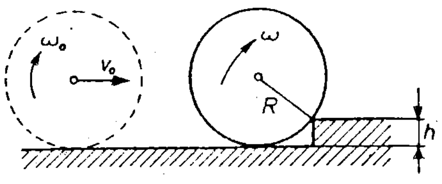
Začetna rotacijska energija kocke $J\omega^2/2$ mora biti dovolj velika, da se težišče kocke dvigne od $a/2$ na $a/\sqrt{2}$:

$J\omega^2/2 = mg(a/\sqrt{2} - a/2)$ ali
$v_0^2 = (8ga/3)(\sqrt{2} - 1)$
$p = \Delta W/W = 1 - J\omega^2/mv_0^2 = 1 - 3/8 = 5/8$

13.23. Naloga je podobna prejšnji. Krogla s polmerom R se kotali po vodoravnih tleh in zadene ob prag z višino h. Z najmanj kolikšno hitrostjo (v_0) se mora gibati težišče krogle pred trkom, da se krogla po udarcu ob prag prekotali čezenj? (Glej nalogo 12.23.)

Najprej predpostavimo, da je $h < R$. Vrtilna količina krogle glede na vodoravno os skozi dotikališče krogle s pragom je tik pred trkom enaka $J_0\omega_0 + mv_0(R - h)$, takoj po trku pa $J\omega$, kjer je $\omega_0 = v_0/R$, $\omega = v/R$, $J_0 = 2mR^2/5$ in $J = 7mR^2/5$. Obe vrtilni količini sta praktično enaki. Dobimo:

$\omega = (v_0/R)(1 - 5h/7R)$ ali $v = v_0(1 - 5h/7R)$



Kinetična energija krogle takoj po trku mora biti dovolj velika, da se težišče krogle dvigne za h: $J\omega^2/2 = mhg$ ali

$v_0 = (10gh/7)^{1/2}/(1 - 5h/7R)$

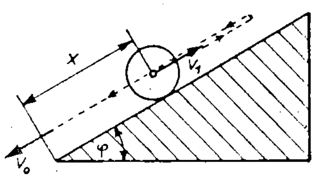
Če je prag višji od težišča krogle ($h > R$), je začetna vrtilna količina krogle zaradi gibanja težišča nič in ostane le $J_0\omega_0 = 2mRv_0/5$. Najprej računamo enako kot zgoraj in dobimo:

$v_0^2 = 35gh/2$

13.24. Na klanec z naklonskim kotom φ postavimo valj s polmerom R ter ga spustimo, da se začne kotaliti navzdol. Kolikšna je hitrost težišča valja (v) po poti x?

$mgh = mgx \sin\varphi = mv^2/2 + J\omega^2/2 = 3mv^2/4$
$v^2 = (4gx/3) \sin\varphi$

13.25. Obroč s polmerom R se kotali navzgor po klancu z naklonskim kotom φ. V trenutku, ko težišče obroča napravi pot x od vznožja klanca navzgor, se giblje s hitrostjo v_1. S kolikšno hitrostjo (v_0) prispe težišče obroča nazaj do vznožja?



$mv_1^2/2 + J\omega_1^2/2 + mgx \sin\varphi = mv_0^2/2 + J\omega_0^2/2$
$v_1 = R\omega_1$, $v_0 = R\omega_0$, $J = mR^2$
$v_0^2 = v_1^2 + gx \sin\varphi$

13.26. S kolikšno začetno hitrostjo (v_0) mora odleteti projektil navpično navzgor, da se dvigne na višino $h = 4R$ (R = polmer Zemlje = 6370 km) nad površje Zemlje? Zračni upor zanemarimo.

Na višini z nad zemeljskim površjem ima telo za $mgRz/(R + z)$ večjo potencialno energijo kot na samem površju, zato je:

$mv_0^2/2 = mgRh/(R + h) = 4mgR/5$ ali
$v_0^2 = 8gR/5$, $v_0 = 10$ km/s

13.27. Telo spustimo z višine $h = R$ (= polmer Zemlje). S kolikšno hitrostjo (v_0) in po kolikšnem času (t_0) pade na tla? Upor zraka in vrtenje Zemlje zanemarimo.

$mgRh/(R + h) = mv_0^2/2$ (glej prejšnjo nalogo)
$v_0^2 = 2gRh/(R + h) = gR$, $v_0 = 7{,}9$ km/s

Na višini z ima hitrost v, ki zadošča enačbi:

$mgRz/(R + z) + mv^2/2 = mgR/2$ (začetna potencialna energija)
$v^2 = gR - 2gRz/(R + z) = gR[1 - 2z/(R + z)]$
$dz = -v dt$ ali $dt = -dz/v$
$t_0 = (gR)^{-1/2}\int_0^h [1 - 2z/(R + z)]^{-1/2} dz = (1 + \pi/2)(R/g)^{1/2}$

13.28. Vesoljska postaja kroži na višini $h = 500$ km nad površjem Zemlje. Koliko dela morajo raketni motorji opraviti za povečanje potencialne energije, če se postaja dvigne še za $d = 200$ km? Masa postaje je $m = 20$t.

$A = W_p(h + d) - W_p(h) = mgR(h + d)/(R + h + d) - mgRh/(R + h)$
$A = mgR^2d/[(R + h)(R + h + d)] = 3{,}3 \cdot 10^{10}$ J

13.29. Najmanj koliko energije potrebujemo, da spravimo satelit z maso $m = 2$ t v krožni tir na višini $h = 1000$ km nad Zemljo?

Satelitu povečamo potencialno energijo za $W_p(h) = mgRh/(R + h)$ in kinetično od nič na $mv^2/2$, pri čemer je v hitrost satelita, ki kroži na višini h: $v^2 = gR^2/(R + h)$ (glej nalogo 4.2.).

$W = W_p + W_k = mgRh/(R + h) + mgR^2/2(R + h)$
$W = mgR(h + R/2)/(R + h) = 7{,}1 \cdot 10^{10}$ J

13.30. V zračni puški je prožna vzmet, ki jo stisnemo za $x = 5$ cm; konstanta prožnosti vzmeti je $k = 10$ N/cm. Iz puške izstrelimo navpično navzgor kroglico z maso $m = 5$ g. Kako visoko (h) se kroglica dvigne, če zanemarimo upor zraka? Predpostavljamo, da kroglica odnese vso sproščeno energijo.

$A = kx^2/2 = mv_0^2/2 = mgh$
$h = kx^2/(2mg) = 25$ m

13.31. Nosilni kabel žičnice se na spodnji postaji končuje s prožno vzmetjo. Kako močna mora biti vzmet (kolik njen k), če se lahko skrči kvečjemu za $d = 1$ m? Vzmet naj zaustavi kabino z maso $m = 500$ kg, če bi se ta odpela s kabla kjerkoli do zgornje postaje, ki je za $h = 160$ m višje od spodnje postaje.

$mgh = mv^2/2 = kd^2/2$ ali $k = 2mgh/d^2 = 1{,}6 \cdot 10^6$ N/m

13.32. Tovorni vagon z maso $m = 20$ t se giblje s hitrostjo $v = 4$ km/h, ko zadene ob togo prepreko. Za koliko (x) se stisneta vzmeti obeh odbijačev vagona, če je znano, da se vzmet pri sili $F = 10$ kN stisne za $x_1 = 5$ mm?

$mv^2/2 = 2\ kx^2/2 = kx^2 = (F/x_1)x^2$
$x = v(mx_1/2F)^{1/2} = 7{,}9$ cm

13.33. Jekleno palico (dolžina $b = 2$ m, presek $S = 1$ cm^2) na enem koncu trdno vpnemo, njen drugi konec pa potegnemo, tako da se palica podaljša za $x = 2$ cm. Koliko dela (A) je treba za to, če velja Hookov zakon? Prožnostni modul jekla je $E = 2{,}2 \cdot 10^{11}$ N/m^2.

$A = (ES/b)x^2/2 = 2{,}2$ kJ

13.34. Vagončka (masi $m_1 = 1$ kg in $m_2 = 2$ kg) sta speta s prožno vzmetjo, ki je stisnjena za $x = 1$ cm; konstanta prožnosti vzmeti je $k = 10$ kN/m. S kolikšnima hitrostma (v_1 in v_2) odskočita vsak sebi vagončka potem, ko vzmet sprostimo?

Vagončka si razdelita sproščeno prožnostno energijo tako, da sta njuni gibalni količini enako veliki:

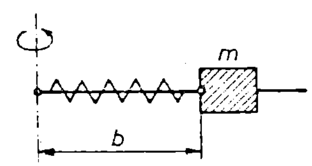
$m_1v_1 = m_2v_2$
$kx^2/2 = m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2$

Iz enačb izračunamo v_1 in v_2:

$v_1^2 = kx^2m_2/[m_1(m_1 + m_2)]$, $v_1 = 8$ m/s
$v_2^2 = kx^2m_1/[m_2(m_1 + m_2)]$, $v_2 = 4$ m/s

13.35. Tanka palica je položena vodoravno in se lahko vrti okrog navpične osi, ki gre skozi njen konec. Na palici je utež z maso $m = 0{,}1$ kg, ki je z vzmetjo pripeta na os; konstanta prožnosti vzmeti je $k = 100$ N/m. Razdalja uteži do osi (pri neobremenjeni vzmeti) je $b = 20$ cm. Koliko dela (A) je treba, da zavrtimo palico s kotno hitrostjo $\omega = 25$/s? Maso vzmeti in palice zanemarimo v primerjavi z maso uteži.

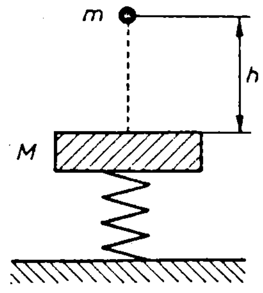
Ko zavrtimo palico s kotno hitrostjo ω, se vzmet raztegne za x, tako da je $kx = m(b + x)\omega^2$, to je za $x = mb\omega^2/(k - m\omega^2) = 33$ cm. Za to potrebno delo se naloži v obliki kinetične energije vrteče se uteži in prožnostne energije raztegnjene vzmeti:



$A = J\omega^2/2 + kx^2/2 = m(b + x)^2\omega^2/2 + kx^2/2$
$A = (m\omega^2b^2k/2)(k + m\omega^2)/(k - m\omega^2)^2 = 14$ J

13.36. Kroglico z maso $m = 300$ g spustimo z višine $h = 20$ m na bat z maso $M = 5$ kg, ki je pritrjen na vzmeti. Za koliko (x) se vzmet stisne, ko se kroglica zapiči v bat? Konstanta prožnosti vzmeti je $k = 20$ kN/m.

Kroglica udari ob bat s hitrostjo $v_0 = (2gh)^{1/2} = 20$ m/s. Po trku se bat in kroglica gibljeta s skupno hitrostjo $v = mv_0/(m + M)$ ali s kinetično energijo $(M + m)v^2/2 = m^2v_0^2/2(M + m)$. Ta se skupaj z zmanjšano težnostno energijo $(M + m)gx$ naloži v prožnostno energijo $kx^2/2$ stisnjene vzmeti:



$kx^2/2 = m^2v_0^2/2(M + m) + (M + m)\ gx$

Koren te kvadratne enačbe je:

$x = (M + m)g/k + [(M + m)^2g^2/k^2 + m^2v_0^2/k(M + m)]^{1/2} = 2{,}1$ cm

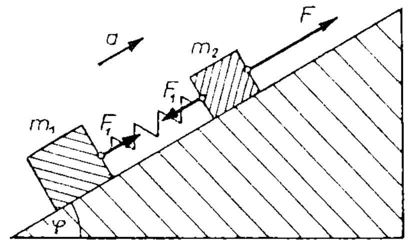
13.37. Na gladkem klancu z naklonskim kotom $\varphi = 30^0$ ležita telesi z masama $m_1 = 20$ kg in $m_2 = 10$ kg, ki sta speti s prožno vzmetjo ($k = 1$ kN/m). Zgornje telo m_2 vlečemo s stalno silo $F = 300$ N navzgor po klancu. S kolikšnim pospeškom (a) se gibljeta telesi in kolikšna je prožnostna energija (W_{pr}) raztegnjene vzmeti?

Ko se telesi gibljeta z enakim pospeškom a, je vzmet raztegnjena za x. Sila F_1 raztegnjene vzmeti zadržuje zgornje telo in obenem vleče spodnje telo navzgor.

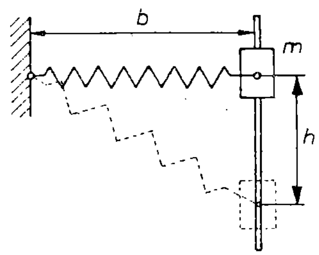
$F - F_1 - m_2g\ \sin\varphi = m_2a$
$F_1 - m_1g\ \sin\varphi = m_1a$
(Trenje zanemarimo)

Iz zgornjih enačb izračunamo:

$a = F/(m_1 + m_2) - g\ \sin\varphi = 5$ m/s^2
$F_1 = m_1F/(m_1 + m_2) = kx, \quad x = 0{,}2$ m
$W_{pr} = kx^2/2 = 20$ J



13.38. Utež z maso $m = 5$ kg lahko brez trenja drsi po navpični palici. Na utež pripnemo prožno vzmet ($k = 1$ kN/m), katere drugi konec je pritrjen na navpičen zid, ki je za $b = 8$ cm oddaljen od palice. Ko utež spustimo, je vzmet vodoravna. Kolikšna je hitrost uteži v trenutku, ko utež pade za višino $h = 10$ cm? Dolžina neobremenjene vzmeti je $b_0 = 4$ cm. Maso vzmeti zanemarimo.



Po padcu uteži se sprosti potencialna energija mgh, prožnostna energija vzmeti pa se poveča od $(k/2)(b - b_0)^2$ na $(k/2)[(b^2 + h^2)^{1/2} - b_0]^2$. Razlika med obema spremembama se naloži kot kinetična energija uteži:

$mv^2/2 = mgh - (k/2)[b^2 + h^2 + b_0^2 - 2b_0(b^2 + h^2)^{1/2} - (b - b_0)^2]$
$v^2 = 2gh - (k/m)[2b_0b + h^2 - 2b_0(b^2 + h^2)^{1/2}]$
$v = 0{,}9$ m/s

13.39. Raztezek vzmeti je odvisen od natezne sile F po enačbi: $F = kx + cx^2$. Parametra k in c določimo tako, da izmerimo silo $F_1 = 50$ N, ki je potrebna za raztezek $x_1 = 4$ cm, in silo $F_2 = 140$ N za raztezek $x_2 = 8$ cm. Koliko dela (A) je treba, da to vzmet raztegnemo za s = 5 cm?

$F_1 = kx_1 + cx_1^2$, $F_2 = kx_2 + cx_2^2$

Iz obeh enačb izračunamo: $k = 0{,}75$ kN/m in c = 12,5 kN/m^2

$$A = \int_0^s F dx = \int_0^s (kx + cx^2)dx = ks^2/2 + cs^3/3 = 1{,}5 \text{ J}$$

13.40. Utež z maso m pritrdimo na elastiko z dolžino b, katere drugi konec je pritrjen na strop. Utež spustimo z višine stropa. Kako se hitrost uteži (v) spreminja z globino z? Na kateri globini (h) pod stropom se utež ustavi? Upor zraka zanemarimo.

Do globine $z = b$ utež prosto pada, zato doseže globino $z = b$ s hitrostjo $v_0 = (2gb)^{1/2}$ oziroma s kinetično energijo $mv_0^2/2 = mgb$. Za $z > b$ se začenja elastika napenjati. Sproščena potencialna energija mgz se deloma naloži v kinetično energijo uteži in deloma v prožnostno energijo raztegnjene elastike:

$mgz = mv^2/2 + (k/2)(z - b)^2$ ali
$v^2 = 2gz - (k/m)(z - b)^2$

Hitrost uteži je največja na globini $z = z_0$, kjer je $dv^2/dz = 0$
$2g - 2(k/m)(z_0 - b) = 0$ ali $z_0 = b + mg/k$

Utež se ustavi v globini $z = h$, za katero je $v = 0$;

$2gh - (k/m)(h - b)^2 = 0$ ali
$h^2 - 2z_0h + b^2 = 0$

Upoštevamo rešitev s pozitivnim korenom:

$$h = z_0 + (z_0^2 - b^2)^{1/2}$$

14. TRKI

14.1. Vagon z maso $m_1 = 10\ t$ se giblje v desno s hitrostjo $v_1 = 2$ m/s in se približuje drugemu vagonu z maso $m_2 = 15\ t$, ki vozi v levo s hitrostjo $v_2 = 3$ m/s. Vagona trčita in se prožno odbijeta. Kolikšni sta njuni hitrosti (u_1 in u_2) po trku?

$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$
$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2$

Vstavimo $A = m_2/m_1 = 1{,}5$ in dobimo sistem dveh enačb za neznanki u_1 in u_2:

$u_1 + Au_2 = v_1 - Av_2$

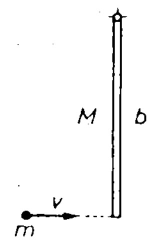
$u_1^2 + Au_2^2 = v_1^2 + Av_2^2$

Dobljeni sistem ima dve rešitvi. Prva rešitev: $u_1 = v_1$ in $u_2 = -v_2$ je trivialna, saj se vagona po trku gibljeta enako kot pred njim. Fizikalno pomembna je druga rešitev: $u_1 = -4$ m/s in $u_2 = 1$ m/s. Prvi vagon se torej odbije nazaj (v levo) s hitrostjo 4 m/s, drugi pa ravno tako nazaj (v desno) s hitrostjo 1 m/s.

14.2. Palica z dolžino $b = 1\ m$ in maso $M = 1{,}5$ kg visi in je z zgornjim koncem pritrjena na vodoravno os. Pravokotno v spodnji konec palice se s hitrostjo $v = 5$ m/s zaleti kroglica z maso $m = 200\ g$ in se od nje prožno odbije. Kako se gibljeta palica in kroglica po trku?

Palica se zavrti s kotno hitrostjo ω, kroglica se odbije nazaj s hitrostjo v_1. Ohranjata se vrtilna količina in kinetična energija:

$mbv = -mv_1b + J\omega = -mv_1b + Mb^2\omega/3$
$mv^2/2 = mv_1^2/2 + J\omega^2/2$



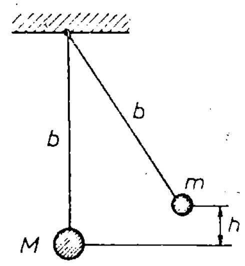
Zopet vstavimo $A = M/m = 7{,}5$ in dobimo sistem dveh enačb za neznani količini ω in v_1:

$v = -v_1 + Ab\omega/3$
$v^2 = v_1^2 + Ab^2\omega^2/3$

Netrivialna rešitev je:

$\omega = 6v/b(A + 3) = 2{,}9$ /s
$v_1 = v(A - 3)/(A + 3) = 2{,}1$ m/s

14.3. Kovinski kroglici (masa m = 5 g in M = 10 g) sta obešeni na enako dolgih vrvicah (dolžina b = 1 m), ki sta pritrjeni v skupni točki na strop. Lažjo kroglico m izmaknemo, da se dvigne za h = 10 cm, in jo nato spustimo. Kroglici trčita in se prožno odbijeta. Kako visoko (h_1 in h_2) se dvigneta?



Lažja kroglica udari ob težjo s hitrostjo v_0 = = $(2gh)^{1/2}$ = 1,4 m/s. Po prožnem trku se odbije s hitrostjo $v_1 = v_0(M - m)/(M + m)$ = 0,47 m/s in se dvigne za višino $h_1 = v_1^2/2g$ = 1,1 cm. Težja kroglica se odbije v nasprotno smer s hitrostjo v_2 $= 2v_0m/(M + m)$ = 0,93 m/s in se dvigne do višine $h_2 = v_2^2/2g$ = 4,4 cm.

14.4. Tri žoge (m_1, m_2 in m_3) postavimo v ravno vrsto na vodoravni podlagi. Prvo žogo porinemo s hitrostjo v_1 v drugo, ki se nato zaleti v tretjo. Trka sta prema in prožna. Kolikšna mora biti masa m_2 druge žoge, da odleti tretja z največjo možno hitrostjo?

Druga žoga se po trku s prvo odbije v tretjo s hitrostjo $v_2 = 2m_1v_1/(m_1 + m_2)$, ki nato odleti s hitrostjo $v_3 = 2m_2v_2/(m_2 + m_3) = 4m_1m_2v_1/[(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)]$.
Največjo hitrost v_3 dobimo pri m_2, za katero velja: $dv_3/dm_2 = 0$ ali: $(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)$ $- m_2(m_2 + m_3 + m_2 + m_1) = 0$ ali
$m_2 = (m_1m_3)^{1/2}$

14.5. Telo izstrelimo z začetno hitrostjo v_0 = 80 m/s navpično navzgor. Na višini h = 275 m se zaleti v pritrjeno telo in se od njega prožno odbije. Po kolikšnem času (t) in s kolikšno hitrostjo prileti nazaj?

Prvo telo se zaleti v drugega s hitrostjo $v_1 = (v_0^2 - 2gh)^{1/2}$ = 32 m/s po času $t_1 = (v_0 - v_1)/g$ = 4,9 s. Od pritrjenega telesa se odbije z enako hitrostjo v_1 navzdol in pade na tla z začetno hitrostjo v_0 po skupnem času $t = 2t_1$ = 9,8 s.

14.6. Naloga je podobna prejšnji, le da se prvo telo prožno odbije od enako težkega drugega telesa, ki prosto lebdi v zraku. Kako se telesi gibljeta po trku?

Prvotno mirujoče drugo telo se po trku začne dvigati s hitrostjo v_1 = 32 m/s. Prvo telo pa po trku obmiruje, nakar začne padati. Na tla pade s hitrostjo $v_2 = (2gh)^{1/2}$ = 73 m/s po času $t_2 = v_2/g$ = 7,5 s od trka oziroma po skupnem času $t = t_1 + t_2$ = 12,4 s.

14.7. Izstrelek z maso m = 3 g izstrelimo s hitrostjo v_0 = 200 m/s v leseno klado (masa M = 2 kg), ki visi na nitkah z dolžino b = 5 m. Izstrelek obmiruje v kladi. Koliko odstotkov (p) začetne kinetične energije se pri trku izgubi?

Po trku se izstrelek in klada premakneta s skupno hitrostjo $v_1 = mv_0/(M + m)$ oziroma s kinetično energijo $W_1 = (M + m)v_1^2/2 = m^2v_0^2/2(M + m)$ = 0,09 J. Začetna kinetična energija kroglice je $W_0 = mv_0^2/2$.
$p = (W_0 - W_1)/W_0 = 1 - W_1/W_0 = 1 - m/(M + m) = M/(M + m)$
p = 0,9985 = 99,85 %

Za kolik kot (φ) se odklonijo nitke, na katerih visi klada?
Klada z izstrelkom se dvigne za višino $h = W_1/(M + m)g$ = 4,6 mm = $b(1 - \cos\varphi)$ ali $\cos\varphi = 1 - h/b \approx 1 - \varphi^2/2$ (ker je $h \ll b$ in φ majhen)
φ = 2,5°

14.8. Kroglico z maso m = 5 g izstrelimo v vodoravni smeri v lesen blok z maso M = 2 kg, ki leži na vodoravni podlagi. Ko se kroglica zarine v blok, se ta premakne in se nato ustavi na oddaljenosti x = 30 cm. Kolikšna je začetna hitrost (v_0) kroglice, če je drsni torni koeficient med blokom in tlemi k_t = 0,2?

Po zadetku se blok s kroglico premakne s hitrostjo $v_1 = mv_0/(M + m)$. Njuna kinetična energija $(M + m)v_1^2/2$ se porabi za premagovanje drsne torne sile $F_t = k_t(M + m)g$:

$m^2v_0^2/2(M + m) = k_t(M + m)gx$ ali
$v_0 = (1 + M/m)(2gxk_t)^{1/2}$ = 435 m/s

14.9. Z vrha klanca z dolžino s = 2 m spustimo klin z maso m = 5 kg, ki drsi po klancu navzdol; drsni torni koeficient je k_t = 0,2, naklonski kot klanca je φ = 30°. Na dnu klanca se klin zarine v leseno steno. Kako globoko (x) se zarine vanjo, če temu nasprotuje povprečna sila F = 1 kN?

Klin prispe do dna klanca s hitrostjo $v^2 = 2as = 2gs(\sin\varphi - k_t\cos\varphi)$ oziroma s kinetično energijo $mv^2/2$, ki se nato porabi v leseni steni:

$mv^2/2 = Fx$ ali $x = mgs(\sin\varphi - k_t\cos\varphi)/F$ = 3,2 cm

14.10. Mizica vzmetne tehtnice ima maso M = 0,5 kg, konstanta prožnosti vzmeti je k = 20 N/cm. S kolikšne višine (h) moramo spustiti na mizico ilovnato kepo z maso m = 2 kg, da se vzmet skrči za x = 5 cm? Trk kepe ob mizico je neprožen.

Kepa pade na mizico s hitrostjo $v_0 = (2gh)^{1/2}$. Po trku se skupaj z mizico premakneta s hitrostjo $v = mv_0/(M + m)$ oziroma s kinetično energijo $(M + m)v^2/2$. Ta se skupaj s sproščeno težnostno energijo naloži v prožnostno energijo stisnjene vzmeti:

$(M + m)v^2/2 + (M + m)gx = kx^2/2$
$v^2 = kx^2/(M + m) - 2gx = 2ghm^2/(M + m)^2$
$h = (M + m)x[kx - 2g(M + m)]/(2gm^2)$ = 8,1 cm

14.11. Lesen kol z maso M = 50 kg zabijamo v zemljo tako, da spuščamo nanj z višine h = 2 m utež z maso m = 100 kg. Trk je neprožen. Kolikokrat (n) moramo spustiti utež, da zabijemo kol do globine s = 66 cm, če se zemljina upira s povprečno silo F = 20 kN? (Glej zgornjo nalogo)

Utež pade na kol s hitrostjo $v_0 = (2gh)^{1/2}$. Po trku se kol in utež premakneta s kinetično energijo $W_1 = (M + m)v^2/2 = m^2gh/(M + m)$ (zmanjšanje težnostne energije med zabijanjem zanemarimo). V celoti moramo s kolom opraviti delo Fs, v n obrokih po W_1:

$Fs = nW_1$
$n = Fs/W_1 = (M + m)Fs/m^2gh$ = 10

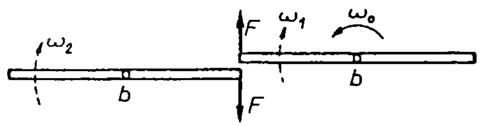
14.12. Palica z dolžino b, ki se lahko vrti okrog vodoravne osi skozi središče, miruje v vodoravni legi. Enako palico postavimo poleg tako, da sta osi vzporedni in oddaljeni druga od druge nekaj manj kot je dolžina palice. Drugo palico zavrtimo s kotno hitrostjo ω_0. Njen konec zadene ob konec mirujoče prve palice in se od njega prožno odbije. Kolikšni sta kotni hitrosti (ω_1 in ω_2) palic po trku?

Med trkom učinkuje druga palica na prvo s sunkom navora $M\Delta t = (b/2)F\Delta t$, ki da prvi palici vrtilno količino $J\omega_2$:

$M\Delta t = J\omega_2$, $J = mb^2/12$

Obenem prva palica z enako velikim sunkom $M\Delta t$ zmanjša vrtilno količino druge palice od $J\omega_0$ na $J\omega_1$:

$M\Delta t = J\omega_0 - J\omega_1$ ali
$J\omega_2 = J\omega_0 - J\omega_1$
$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$



Ker je trk prožen, velja izrek o ohranitvi kinetične energije:

$J\omega_0^2/2 = J\omega_1^2/2 + J\omega_2^2/2$ ali
$\omega_0^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$

Prvo enačbo za ω_0 kvadriramo in odštejemo od zadnje enačbe. Dobimo:

$\omega_1\omega_2 = 0$

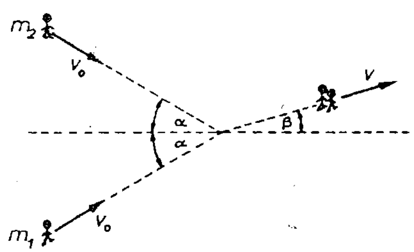
Rešitev $\omega_2 = 0$ je trivialna, saj se v tem primeru nič ne zgodi (prva palica še naprej miruje, ni trka). Pomembna je rešitev $\omega_1 = 0$ in $\omega_2 = \omega_0$. Druga palica po trku obmiruje, prva pa se zavrti s kotno hitrostjo ω_0. S prožnim trkom je torej druga palica predala kinetično energijo prvi palici.

14.13. Drsalca z masama $m_1 = 60$ kg in $m_2 = 50$ kg drsita enako hitro (z $v_0 = 1{,}5$ m/s), a poševno, pod kotom $2\alpha = 60^0$ drug proti drugemu. Ko se srečata, se primeta. Kolikšna je njuna skupna hitrost (v) in v kateri smeri (pod kotom β glede na njuno simetralo pred trkom) se gibljeta po sprijetju?

Vektorsko enačbo za ohranitev gibalne količine napišemo za komponente v smeri simetrale in pravokotno nanjo:

$m_1v_0\sin\alpha - m_2v_0\sin\alpha =$
$= (m_1 + m_2)v \sin\beta$

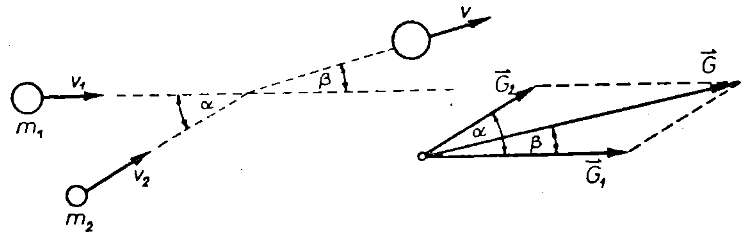
$m_1v_0\cos\alpha + m_2v_0\cos\alpha =$
$= (m_1 + m_2)v \cos\beta$



Iz enačb izračunamo v in β:

$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$, $\beta = 3^0$
$v = v_0(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos 2\alpha)^{1/2}/(m_1 + m_2) = 1{,}3$ m/s

14.14. Kepa ilovice z maso $m_1 = 5$ kg se giblje s hitrostjo $v_1 = 7$ m/s, ko se vanjo zaleti druga kepa z maso $m_2 = 3$ kg, ki se giblje s hitrostjo $v_2 = 8$ m/s pod kotom $\alpha = 30^0$ glede na smer gibanja prve. Pod kolikšnim kotom (β) glede na smer gibanja prve kepe odleti sprijeta kepa in kolikšna je njena hitrost (v)?



$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$, $G^2 = G_1^2 + G_2^2 + 2G_1G_2\cos\alpha$
$G_1 = m_1v_1$, $G_2 = m_2v_2$
$G = 75$ kgm/s $= (m_1 + m_2)v$
$v = G/(m_1 + m_2) = 7{,}1$ m/s

S sinusnim izrekom za trikotnik dobimo: $G_2/\sin\beta = G/\sin\alpha$ ter $\beta = 12°$

14.15. Z višine $h = 2$ m spustimo pilot z maso $m = 20$ kg, da pade na mirujoč kol z maso $M = 10$ kg. Trk pilota ob kol je delno prožen, koeficient prožnosti trka je $e = 0{,}75$. Za koliko (x) se kol zarine v tla, če se ta upirajo s povprečno silo $F = 1$ kN?

Pilot trči ob kol s hitrostjo $v_0 = (2gh)^{1/2} = 6$ m/s. Po trku se pilot spušča s hitrostjo v_1 in kol s hitrostjo v_2, pri čemer velja: $v_2 - v_1 = ev_0$. Velja še izrek o ohranitvi gibalne količine:

$mv_0 = mv_1 + Mv_2$
$v_2 = m(1 + e)v_0/(M + m) = 7$ m/s

Začetna kinetična energija kola ($Mv_2^2/2$) se skupaj s sproščeno težnostno energijo (Mgx) porabi za zabijanje v tla:

$Mv_2^2/2 + Mgx = Fx$ ali
$x = Mv_2^2/2(F - Mg) = 30$ cm

14.16. Jeklena plošča z maso $m = 2$ kg drsi po ledu s hitrostjo $v_1 = 5$ m/s in se približuje enaki plošči, ki se giblje v isti smeri s hitrostjo $v_2 = 1$ m/s. Plošči trčita delno prožno, koeficient prožnosti trka je $e = 0{,}7$. Kolikšni sta njuni hitrosti (u_1 in u_2) po trku?

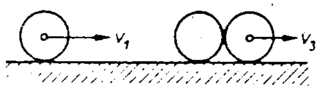
$e = (u_2 - u_1)/(v_1 - v_2)$
$mv_1 + mv_2 = mu_1 + mu_2$ ali $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$

Iz enačb izračunamo u_1 in u_2:

$u_1 = (1 - e)v_1/2 + (1 + e)v_2/2 = 1{,}6$ m/s
$u_2 = (1 + e)v_1/2 + (1 - e)v_2/2 = 4{,}4$ m/s

14.17. Kroglica zadene s hitrostjo $v_1 = 4$ m/s ob enaki kroglici, ki mirujeta na isti črti. S kolikšno hitrostjo (v_3) odleti zadnja kroglica, če so trki kroglic delno prožni? Koeficient prožnosti trkov je $e = 0{,}5$.

Srednja kroglica se po trku s prvo premakne in zadene v zadnjo s hitrostjo v_2, prva pa se odbije s hitrostjo v_1'. Velja:

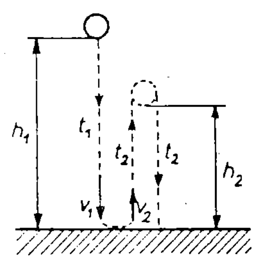


$mv_1 = mv_2 - mv_1'$
$v_2 + v_1' = ev_1$

Enačbi seštejemo, da izpade v_1', in dobimo: $v_2 = (1 + e)v_1/2$.
Za trk druge kroglice s tretjo velja:

$v_3 = (1 + e)v_2/2 = (1 + e)^2 v_1/4 = 2{,}2$ m/s

14.18. Z višine $h_1 = 1$ *m* spustimo žogo na betonska tla. Žoga se od tal odbije navzgor in ponovno pade na tla po času $t = 1$ s od trenutka, ko jo spustimo. Kolikšen je koeficient prožnosti trka (e)?

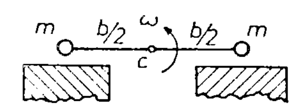


Žoga prvič udari ob tla s hitrostjo $v_1 = (2gh_1)^{1/2}$ po času $t_1 = v_1/g$. Od tal se odbije s hitrostjo $v_2 = ev_1$ in doseže višino $h_2 = v_2^2/2g$ po času t_2 od odboja: $t_2 = v_2/g$. Od drugega vrha do tal porabi čas t_2, tako da je skupen čas enak:

$t = t_1 + 2t_2 = (1 + 2e)(2h_1/g)^{1/2}$ ali
$e = (t/2)(g/2h_1)^{1/2} - 0{,}5 = 0{,}6$

14.19. Enaki jekleni kroglici sta povezani z lahko palico (dolžina $b = 40$ cm). Spustimo ju z vodoravne lege z višine $h = 20$ cm nad tlemi. Ena kroglica zadene ob medeninasto podlago in se od nje delno prožno odbije; koeficient prožnosti trka je $e_1 = 0{,}4$. Druga se istočasno odbije od jeklene podlage s koeficientom prožnosti trka $e_2 = 0{,}6$. Kolikšna je hitrost težišča (v_c) in s kolikšno kotno hitrostjo (ω) se zavrti vezna palica po trku?

Kroglici padeta na tla s hitrostjo $v_0 = (2gh)^{1/2}$. Leva kroglica se od medeninaste podlage odbije s hitrostjo $v_1 = e_1v_0$, desna pa od jeklene s hitrostjo $v_2 = e_2v_0$. Hitrost vsake kroglice po odboju je sestavljena iz hitrosti težišča (v_c) in iz obodne hitrosti $b\omega/2$ zaradi vrtenja palice okrog težišča. Torej velja:

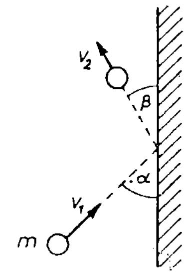


$v_1 = v_c - b\omega/2$ in $v_2 = v_c + b\omega/2$ ali
$v_c = (v_1 + v_2)/2 = (e_1 + e_2)v_0/2 = 1$ m/s
$\omega = (v_2 - v_1)/b = (e_2 - e_1)v_0/b = 1$ /s

14.20. Hokejska ploščica z maso $m = 0{,}1$ kg zadene v ograd{o} s hitrostjo $v_1 = 30$ m/s pod kotom $\alpha = 45°$ glede nanjo. S kolikšno hitrostjo (v_2) in pod kakšnim kotom (β) se odbije od nje, če je koeficient prožnosti trka $e = 0{,}6$? Koliko kinetične energije se pri trku izgubi? Predpostavljamo, da so sile trka pravokotne na ograd{o} (zanemarimo trenje).

Ker ni sil vzdolž ograde, se tangentna komponenta hitrosti ohranja:

$v_1\cos\alpha = v_2\cos\beta$



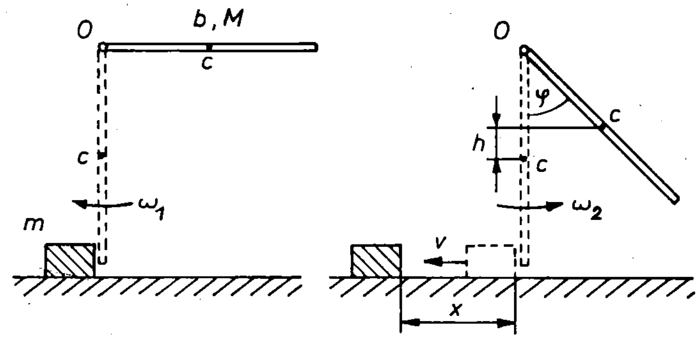
Koeficient prožnosti trka je tu razmerje med pravokotnima komponentama hitrosti ploščice po trku in pred njim:

$e = (v_2\sin\beta)/(v_1\sin\alpha)$

Iz obeh enačb izračunamo: $\mathrm{tg}\beta = e\,\mathrm{tg}\alpha = 0{,}6$ ter $\beta = 31°$

$v_2 = v_1\cos\alpha/\cos\beta = 25$ m/s
$\Delta W_k = mv_1^2/2 - mv_2^2/2 = 14$ *J*

14.21. Konec palice (masa $M = 4$ kg, dolžina $b = 2$ *m*) je vrtljivo pritrjen na vodoravno os, ki je na višini b nad vodoravnimi tlemi. Palico spustimo z vodoravne lege. Ko je najniže, zadene ob telo z maso $m = 2$ kg, ki miruje na tleh. Za kolik kot (φ) se palica odbije nazaj, če je trk prožen? Za koliko (x) se premakne telo, če je drsni torni koeficient $k_t = 0{,}4$? Kolikšna mora biti masa palice, da palica po trku obmiruje?



$Mgb/2 = J\omega_1^2/2$, $J = Mb^2/3$, $\omega_1 = \sqrt{3g/b} = 3{,}8$ /s

Palica se odbije s kotno hitrostjo ω_2, telo pa s hitrostjo v, tako da se vrtilna količina in kinetična energija ohranjata:

$J\omega_1 = mvb - J\omega_2$
$J\omega_1^2/2 = mv^2/2 + J\omega_2^2/2$

Odtod izračunamo:

$v = \omega_1 2bM/(M + 3m) = 6{,}1$ m/s
$\omega_2 = \omega_1(3m - M)/(3m + M) = 0{,}8$ /s

Palica torej po trku obmiruje, če je $M = 3m = 6$ kg.

$mv^2/2 = F_t x = k_t mgx$
$x = v^2/(2k_t g) = 4{,}8\ m$
$J\omega_2^2/2 = Mgh = Mg(b/2)(1 - \cos\varphi)$
$\cos\varphi = 1 - b\omega_2^2/3g = 0{,}96 \quad , \quad \varphi = 16°$

15. NIHANJE IN NIHALA

15.1. Harmonično nihanje točkastega telesa popišemo z enačbo $x = x_0\sin(3\omega t)$, kjer je $x_0 = 2$ cm in $\omega = 5$ /s. Kolikšna sta največja hitrost (v_0) in največji pospešek (a_0) za to gibanje?

$v_0 = x_0 \cdot 3\omega = 30$ cm/s $= 0{,}3$ m/s
$a_0 = x_0(3\omega)^2 = v_0 \cdot 3\omega = 4{,}5$ m/s^2

15.2. S kolikšno amplitudo (x_0) in s kolikšnim nihajnim časom (t_0) niha (harmonično) telo, če je pri odmiku $x_1 = 2$ cm hitrost enaka $v_1 = 4$ cm/s, pri odmiku $x_2 = 3$ cm pa $v_2 = 3$ cm/s?

$x = x_0\sin(\omega t)$
$v = dx/dt = x_0\omega\cos(\omega t)$ ali
$v^2 = (x_0\omega)^2(1 - \sin^2\omega t) = \omega^2(x_0^2 - x^2)$ ali
$v = \omega(x_0^2 - x^2)^{1/2}$
$v_1 = \omega(x_0^2 - x_1^2)^{1/2}$ ter $v_2 = \omega(x_0^2 - x_2^2)^{1/2}$

Iz zadnjih dveh enačb izračunamo:

$x_0 = [(x_2^2v_1^2 - x_1^2v_2^2)/(v_1^2 - v_2^2)]^{1/2} = 3{,}9$ cm ter
$\omega = [(v_1^2 - v_2^2)/(x_2^2 - x_1^2)]^{1/2} = 2\pi/t_0$
$t_0 = 2\pi[(x_2^2 - x_1^2)/(v_1^2 - v_2^2)]^{1/2} = 5{,}3$ s

15.3. Točkasto telo niha pod vplivom dveh pravokotnih nihanj: $x = 2x_0\sin(\omega t)$ in $y = x_0\sin(3\omega t)$, kjer je $x_0 = 10$ cm in $\omega = 2$ /s. Kolikšna sta hitrost (v) in pospešek (a) v trenutku $t_1 = 0{,}5$ s? Kolikšen kot oklepata vektorja $\vec{v}$ in $\vec{a}$ z osjo x (φ_v in φ_a)?

$v_x = dx/dt = 2x_0\omega\cos(\omega t_1) = 22$ cm/s
$v_y = dy/dt = 3x_0\omega\cos(3\omega t_1) = -59$ cm/s
$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = 63$ cm/s
$\mathrm{tg}\varphi_v = v_y/v_x = -2{,}75 \quad , \quad \varphi_v = -70°$
$a_x = dv_x/dt = -2x_0\omega^2\sin(\omega t_1) = -67$ cm/s^2
$a_y = dv_y/dt = -9x_0\omega^2\sin(3\omega t_1) = -51$ cm/s^2
$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \quad , \quad a = 84$ cm/s^2
$\mathrm{tg}\varphi_a = a_y/a_x = 0{,}76 \quad , \quad \varphi_a = 37°$

15.4. Telo z vijačno vzmetjo niha harmonično z amplitudo x_0. Ko gre skozi ravnovesno lego, ima hitrost $v_0 = 30$ cm/s, največji pospešek pa je $a_0 = 5$ m/s^2. Kolikšna sta hitrost (v) in pospešek (a) v trenutku, ko je telo odmaknjeno od ravnovesne lege za $x_0/2$?

$x = x_0\sin(\omega t)$, $x = x_0/2$
$v = v_0\cos(\omega t) = v_0[1 - \sin^2(\omega t)]^{1/2} = v_0(1 - x^2/x_0^2)^{1/2}$
$= v_0\sqrt{3}/2 = 26$ cm/s
$a = - x_0\omega^2\sin(\omega t) = -a_0\sin(\omega t) = -a_0x/x_0 = -a_0/2$
$a = - 2{,}5$ m/s^2

15.5. Nihalo niha harmonično z amplitudo $x_0 = 5$ cm. Čas začnemo šteti ($t = 0$) v trenutku, ko je nihalo v ravnovesni legi. Kolik je pospešek (a_1) v trenutku $t_1 = 3t_0/8$ (t_0 je nihajni čas nihala)? Kolik je ta (t_0), če ima nihalo v trenutku $t_2 = t_0/8$ hitrost $v_2 = 20\sqrt{2}$ cm/s?

$v = x_0\omega\cos(\omega t)$, $\omega = 2\pi/t_0$
$v_2 = x_0\omega\cos(\omega t_2) = x_0\omega\cos(\pi/4) = x_0\omega/\sqrt{2}$ ali
$t_0 = 2\pi x_0/(\sqrt{2}\, v_2) = \pi/4$ s
$a_1 = - x_0\omega^2\sin(\omega t_1) = - 5\text{ cm}(64/\text{s}^2)\sin(3\pi/4) = - 2{,}3$ m/s^2

15.6. Nitno nihalo z utežjo $m = 10$ dag niha z nihajnim časom $t_0 = 2{,}5$ s, amplituda je $x_0 = 5$ cm. Ali lahko predpostavimo, da je nihanje harmonično? Kolikšna je največja sila v nitki (F)?

$t_0 = 2\pi(b/g)^{1/2}$ ali
b = dolžina nitke $= g(t_0/2\pi)^2 = 155$ cm
$\varphi_0 = x_0/b = 1{,}8°$

Amplituda kota je dovolj majhna, da lahko sinus zamenjamo s kotom, torej je nihanje harmonično.
Sila v nitki je največja, ko gre nihalo skozi ravnovesno lego:

$F - mg = ma_r = mv_0^2/b$ ali
$F = m(g + x_0^2\omega^2/b) = 1{,}0$ N

15.7. Nihalo iz prejšnje naloge odklonimo v desno za $x_0 = 5$ cm in nato spustimo. Kolikšno hitrost (v_1) ima utež $t_1 = 3$ s kasneje?

Čas t začnemo šteti ($t = 0$) v trenutku, ko je nihalo odklonjeno za $x = x_0$, torej velja:

$x = x_0\cos(\omega t)$ ter
$v = dx/dt = - x_0\omega\sin(\omega t)$, $\omega = 2\pi/t_0$
$v_1 = - x_0(2\pi/t_0)\sin(2\pi t_1/t_0) = - 12$ cm/s
Negativna hitrost pomeni, da se utež giblje v levo.

15.8. Pospešek točkastega telesa se s časom spreminja po enačbi: $a = - 25p^2x_0\cos(5pt)$, kjer je $p = 4\pi$/s in $x_0 = 10$ cm. Kako se odmik x spreminja s časom? V trenutku $t = 0$ je $v = 0$ in $x = x_0$. Kolik je nihajni čas (t_0)?

$dv = adt = - 25p^2x_0\cos(5pt)dt$

Po integraciji, upoštevaje začetni pogoj $v = 0$ za $t = 0$, dobimo:

$v = -5px_0\sin(5pt)$
$dx = vdt = -5px_0\sin(5pt)dt$, $x = x_0$ za $t = 0$
$x = x_0\cos(5pt)$

Telo niha harmonično z amplitudo $x_0 = 10$ cm in nihajnim časom $t_0 = 2\pi/5p = 0{,}1$ s.

15.9. Telo z maso $m = 2$ kg niha pod vplivom sile F tako, da se odmik x iz ravnovesne lege spreminja s časom po enačbi: $x = A\sin(at + b)$, kjer je $A = 1$ m, $a = \pi/4$s in $b = \pi/2$. Kako se sila F spreminja s časom? Kolikšna je njena največja vrednost (F_0)?

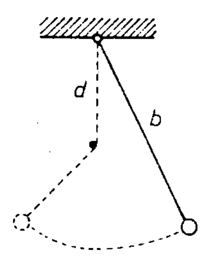
$F = ma = md^2x/dt^2 = - mAa^2\sin(at + b) = - F_0\sin(at + b)$
$F_0 = mAa^2 = 1{,}2$ N

15.10. Telo je privezano na prožno vzmet, tako da se giblje s pospeškom $a = - Ky$, kjer je y odmik iz ravnovesne lege, K pa znana konstanta. Telo v začetku izmaknemo iz njegove ravnovesne lege za y_0 in ga nato sunemo z začetno hitrostjo v_0 proti ravnovesni legi. Kako je hitrost (v) odvisna od odmika y?

$a = dv/dt = (dv/dy)(dy/dt) = v\,dv/dy$ ali
$v\,dv = ady = - Kydy$, $v = v_0$ za $y = y_0$
$v^2 = \text{konst.} - Ky^2$, $\text{konst.} = v_0^2 + Ky_0^2$ ter
$v^2 = v_0^2 + K(y_0^2 - y^2)$

Največja hitrost v ravnovesni legi ($y = 0$) je $(v_0^2 + Ky_0^2)^{1/2}$. Amplituda je največji odmik, pri katerem je $v = 0$. V našem primeru znaša $(y_0^2 + v_0^2/K)^{1/2}$. Nihajni čas je $t_0 = 2\pi/\sqrt{K}$.

15.11. Nitno nihalo z dolžino $b = 1$ m niha tako, da nitka zadeva ob klin, ki je na razdalji $d = b/2$ pod pritrdiščem. Kolikšen je nihajni čas t_0?



Ena polovica nihaja je tolikšna kot pri nihalu z dolžino b, druga polovica pa kot pri nihalu z dolžino $b/2$:

$t_0 = \pi(b/g)^{1/2} + \pi[(b-d)/g]^{1/2} = 1{,}7$ s

15.12. Nitno nihalo odnesemo z Zemlje na drug planet, kjer je težni pospešek $n = 4$ krat manjši. Poišči razmerje nihajnih časov tega nihala (predpostavimo harmonično nihanje) na Zemlji in na drugem planetu (t_p/t_z).

$t_z = 2\pi(b/g)^{1/2}$
$t_p = 2\pi(bn/g)^{1/2} = \sqrt{n}\, t_z$
$t_p/t_z = \sqrt{n} = 2$

15.13. S sekundnim nihalom se dvignemo visoko nad zemeljsko površje, tako da se zaradi manjšega težnega pospeška poveča nihajni čas. Kolikšna je višina (h), če nihalo zaostja v enem dnevu za $n = 3$ nihajne čase? Polmer Zemlje $R = 6370$ km.

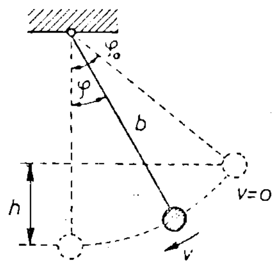
$t_0 = 2\pi(b/g_0)^{1/2} = 1$ s (na zemeljskem površju)
$t = 2\pi(b/g)^{1/2}$ (na višini h)
$g = g_0R^2/(R + h)^2 = g_0/(1 + h/R)^2$
$t = t_0(1 + h/R)$

Zaradi daljšega nihajnega časa na višini h se sekunde »podaljšajo« in jih je v enem dnevu manj:

$(86400 - n)t = 86400\ t_0$ ali
$t = t_0 86400/(86400 - n) = t_0/(1 - n/86400) =$
$= t_0(1 + n/86400)$, ker je $n \ll 86400$
Sledi: $h/R = n/86400$ ali
$h = nR/86400 = 221$ m

15.14. Kolikšni sta kinetična energija (W_k) in potencialna energija (W_p) nitnega nihala z dolžino $b = 2{,}5$ m v trenutku, ko nit oklepa kot $\varphi = 20^0$ z navpičnico? Masa obešene kroglice $m = 1$ kg, največji odklon nitke je $\varphi_0 = 30^0$.

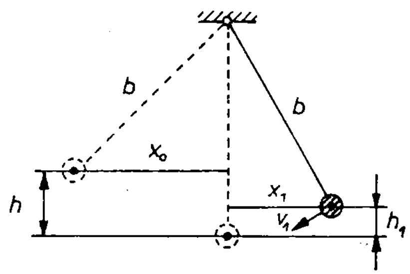
Nihalo v tem primeru ne niha harmonično. Pri največjem odklonu φ_0 obmiruje, zato ima le potencialno energijo $mgh = mgb(1 - \cos\varphi_0)$. Ta celotna energija nihala se pri manjšem odklonu deloma prelije v kinetično energijo W_k:



$mgb(1 - \cos\varphi_0) = mgb(1 - \cos\varphi) + W_k$
$W_p = mgb(1 - \cos\varphi) = 1{,}5$ J
$W_k = mgb(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = 1{,}8$ J

15.15. Utež nitnega nihala, ki visi na nitki z dolžino $b = 1$ m, odklonimo iz ravnovesne lege za $x_1 = 20$ cm in jo nato sunemo proti njej z začetno hitrostjo $v_1 = 2$ m/s. Kolik je največji odmik (x_0) uteži iz ravnovesne lege?

Odmiki so veliki, zato nihalo ne niha harmonično. Uporabimo izrek o ohranitvi vsote kinetične in potencialne energije:



$mv_1^2/2 + mgh_1 = mgh$ ali
$h = h_1 + v_1^2/2g$

Velja: $(b - h_1)^2 = b^2 - x_1^2$ ali

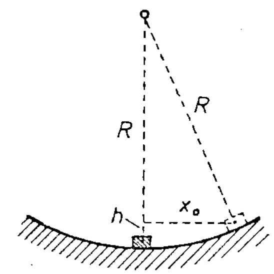
$h_1 = b - (b^2 - x_1^2)^{1/2}$
$h_1 = 2{,}0$ cm
$h = 22{,}4$ cm
$(b - h)^2 = b^2 - x_0^2$, $x_0 = [h(2b - h)]^{1/2} = 63$ cm

15.16. Košček ledu položimo v valjast žleb s polmerom $R = 30$ cm. Nekoliko ga izmaknemo iz ravnovesne lege in nato spustimo, da začne drseti. S kolikšnim nihajnim časom niha, če je nihanje harmonično?

Razmere so podobne, kot če bi bil košček ledu privezan na nitko z dolžino R:

$t_0 = 2\pi(R/g)^{1/2} = 1{,}1$ s

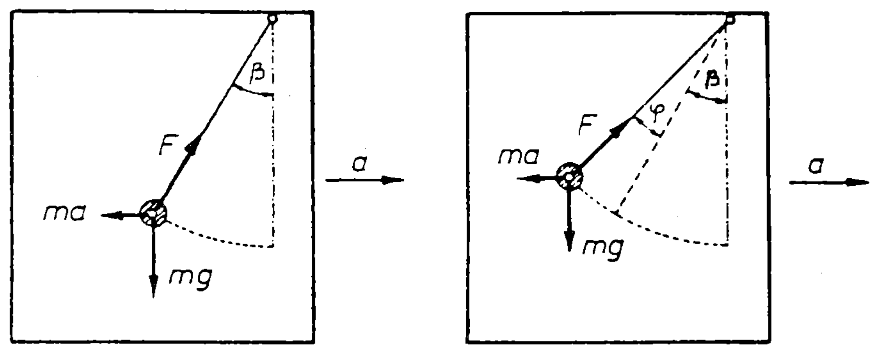
Nalogo rešimo tudi drugače. Na dnu jame ima košček hitrost $v_0 = x_0\omega = x_0 \cdot 2\pi/t_0$, ki zadošča enačbi: $mv_0^2/2 = mgh$, kjer je:



$x_0^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2 \approx 2Rh$ (ker so odmiki majhni)
$v_0^2 = 2gh = x_0^2(2\pi/t_0)^2 = 2Rh(2\pi/t_0)^2$ ali
$t_0 = 2\pi(R/g)^{1/2}$

15.17. Železniški vagon vozi enakomerno pospešeno po vodoravnem tiru. S stropa vagona visi nitno nihalo, nihajoče harmonično okrog ravnovesne lege in odklonjeno za kot $\beta = 6^0$ od navpičnice (nasprotno smeri pospeška). Kolik je pospešek (a) vagona? Kolik je nihajni čas (t_0) nihala? Za koliko je ta drugačen glede na mirujoči vagon?

V ravnovesni legi, pri kotu β glede na navpičnico, je vsota sil mg, vztrajnostne sile ma in sile v nitki F enaka nič, zato velja: $a = g\ \mathrm{tg}\beta = 1{,}0$ m/s^2.
Ko se nihalo odkloni še za kot φ, deluje nanj navor (glede na vodoravno os skozi pritrdišče nitke) $M = mgb \sin(\beta + \varphi) - mab \cos(\beta + \varphi) = mgb \sin\varphi/\cos\beta$, ki vsiljuje uteži kotni pospešek $\alpha = M/J = M/mb^2$:

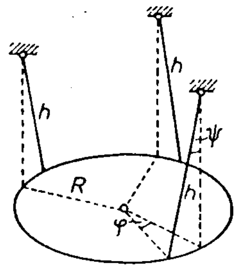


$\alpha = (g/b \cos\beta) \sin\varphi = (g/b \cos\beta)\varphi = \omega^2\varphi = (2\pi/t_0)^2\varphi$ ali
$t_0 = 2\pi(b \cos\beta/g)^{1/2}$

Pospešek vagona torej zmanjša nihajni čas nihala:

$\Delta t_0/t_0 = 1 - (\cos\beta)^{1/2} = 0{,}003 = 0{,}3$ %

15.18. Krožna plošča z maso m in polmerom R visi v vodoravni legi, pritrjena na tri enako razmaknjene navpične nitke (dolžina h), ki visijo s stropa. S kolikšnim nihajnim časom (t_0) se plošča vrti okrog geometrijske osi?



Če ploščo zasučemo okrog geometrijske osi za majhen kot φ, se navpične niti odklonijo za majhen kot ψ, tako da je $h\psi = R\varphi$. Sila v niti (F) dobi tangentno komponento $F \sin\psi \approx F\psi = FR\varphi/h$. Navpične komponente teh sil v vseh treh nitkah vzdržujejo ravnovesje s težo mg plošče: $3F \cos\psi \approx 3F = mg$ ali $F = mg/3$.
Na zasukano ploščo deluje navor M sil v vseh treh nitkah ($M = 3FR^2\varphi/h = mgR^2\varphi/h$), ki vsiljuje plošči kotni pospešek $\alpha = M/J = M/(mR^2/2) = (2g/h)\varphi$. Sledi:

$\omega^2 = 2g/h = (2\pi/t_0)^2$ ali
$t_0 = \pi(2h/g)^{1/2}$

15.19. Tanka palica z dolžino b je na koncih pritrjena na dveh vzporednih nitkah (dolžina h = 120 cm), ki visita s stropa. Palico zasučemo okrog navpične osi skozi njeno središče tako, da zaniha z majhnimi amplitudami. Kolik je nihajni čas (t_0)?

Naloga je podobna zgornji, razlika je le v vztrajnostnem momentu, ki zdaj znaša $mb^2/12$. Na zasukano palico učinkuje navor M sil v vrvicah: $M = mg(b/2)^2\varphi/h$.

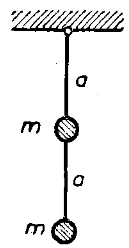
$\alpha = M/J = (3g/h)\varphi = \omega^2\varphi$ ter
$t_0 = 2\pi(h/3g)^{1/2} = 1{,}3$ s

Podobno niha plošča iz prejšnje naloge, če jo zagugamo translatorno, njen nihajni čas je $t_0 = 2\pi(h/g)^{1/2}$.

15.20. Palico na enem koncu pritrdimo na vodoravno os, da lahko niha v navpični ravnini. Kolikšna mora biti njena dolžina (b), da niha z nihajnim časom t_0 = 1 s?

$t_0 = 2\pi(J/mgd)^{1/2}$
$J = mb^2/3$, $d = b/2$
$t_0 = 2\pi(2b/3g)^{1/2}$ ali
$b = 3gt_0^2/8\pi^2 = 37$ cm

15.21. Lahka palica z dolžino 2a = 40 cm visi s stropa kot nihalo. Na njenem prostem koncu in v sredini sta pritrjeni enaki kroglici z maso m = 200 g. Kolik je nihajni čas (t_0) tega nihala? Kolikšna je reducirana dolžina (b_r)?



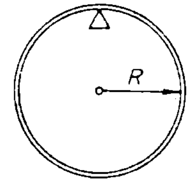
$t_0 = 2\pi(J/2mgd)^{1/2}$
$J = ma^2 + m(2a)^2 = 5ma^2$, $d = 3a/2$
$t_0 = 2\pi(5a/3g)^{1/2} = 1{,}2$ s

$t_0 = 2\pi(b_r/g)^{1/2}$
$b_r = 5a/3 = 33$ cm

15.22. Kroglo s polmerom R obesimo na žico z dolžino $b = 2R$. Koliko odstotkov (p) napake napravimo, če to nihalo obravnavamo kot nitno z dolžino $b + R = 3R$?

$t_0 = 2\pi(J/mgd)^{1/2}$
$J = m(R + b)^2 + 2mR^2/5 = 47\ mR^2/5$
$d = b + R = 3R$
$t_0 = 2\pi(47R/15g)^{1/2}$
t_n = nihajni čas nitnega nihala z dolžino $3R = 2\pi(3R/g)^{1/2}$
$p = (t_0 - t_n)/t_0 = 1 - t_n/t_0 = 1 - (45/47)^{1/2} = 0{,}\ 022$
$p = 2{,}2\%$

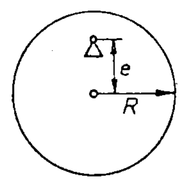
15.23. Tanek obroč s polmerom R = 30 cm in maso m = 2 kg je v eni točki oprt na vodoravno os, okrog katere lahko niha. Kolik je nihajni čas pri majhnih amplitudah? Poišči reducirano dolžino (b_r) tega nihala.



$t_0 = 2\pi(J/mgd)^{1/2}$
$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$
$d = R$
$t_0 = 2\pi(2R/g)^{1/2} = 1{,}6$ s
$t_0 = 2\pi(b_r/g)^{1/2}$
$b_r = 2R = 60$ cm

15.24. Navpično krožno ploščo s polmerom R = 20 cm ekscentrično pritrdimo na vodoravno os, da niha kot nihalo. Kolikšna mora biti razdalja (e) med težiščem plošče in vrtiščem, da je nihajni čas najmanjši?

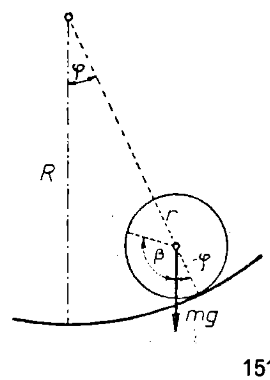
$t_0 = 2\pi(J/mgd)^{1/2} = 2\pi(e/g + R^2/2eg)^{1/2}$



Najmanjši nihajni čas dobimo pri e, za katerega velja $dt_0/de = 0$. Dovolj je, če odvajamo kar izraz pod korenom. Dobimo:

$1/g - R^2/2e^2g = 0$ ali
$e = R/\sqrt{2} = 14$ cm

15.25. Valj s polmerom r se kotali sem ter tja po dnu valjaste kotanje s polmerom R. Poišči izraz za nihajni čas valja (t_0), če je amplituda nihanja majhna.



Ko se veznica os kotanje – os valja zasuka iz ravnovesne navpične smeri za kot φ, se valj zavrti okrog svoje geometrijske osi za kot β, pri čemer velja: $R\varphi = r(\beta + \varphi)$ ali $\varphi = r\beta/(R - r)$.

Navor teže valja glede na vodoravno os skozi dotikališče je
$M = mgr\sin\varphi \approx mgr\varphi = mgr^2\beta/(R-r) = J\alpha = (3mr^2/2)\alpha$
$\alpha = 2g\beta/3(R-r) = \omega^2\beta = (2\pi/t_0)^2\beta$ ali
$t_0 = 2\pi[3(R-r)/2g]^{1/2}$

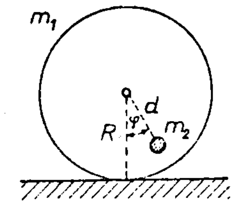
15.26. Nihalo je sestavljeno iz tanke palice (masa m, dolžina b = 1 m) in krogle (masa m, polmer $R = b/6$), ki je pritrjena na koncu palice. Poišči nihajni čas tega nihala.

$t_0 = 2\pi(J/2mgd)^{1/2}$
$d = b/4 + (b + R)/2 = 5b/6$
$J = mb^2/3 + m(b + R)^2 + 2mR^2/5 = 307mb^2/180$
$t_0 = 2\pi(307b/300g)^{1/2} = 2{,}0$ s

15.27. V lesen valj z maso m_1 = 5 kg in polmerom R = 20 cm zabijemo na razdalji $d = R/2$ od njegove geometrijske osi in vzporedno z njo tanko svinčeno palico z maso m_2 = 0,5 kg. Valj položimo na vodoravno podlago in ga zanihamo z majhno amplitudo. Kolik je nihajni čas (t_0) nihajočega valja?

Težišče valja s svinčeno palico je na razdalji e od osi:

$e = m_2d/(m_1 + m_2)$



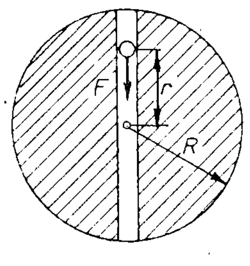
Ko se težiščnica valja odkloni od navpičnice za majhen kot φ, deluje na valj navor $M = (m_1 + m_2)ge\varphi$, ki vsiljuje valju kotni pospešek

$\alpha = M/J$

kjer je $J = 3m_1R^2/2 + m_2(R - d)^2 = (6m_1 + m_2)R^2/4$

$\alpha = 2gm_2\varphi/[R(6m_1 + m_2)] = \omega^2\varphi = (2\pi/t_0)^2\varphi$ ali
$t_0 = 2\pi[R(6m_1 + m_2)/(2gm_2)]^{1/2} = 5{,}0$ s

15.28. Mislimo si predor skozi sredino Zemlje. Vanj spustimo telo z maso m. Kako se telo giblje pod vplivom teže? Upor zraka zanemarimo. Kolik je nihajni čas t_0? S kolikšno hitrostjo švigne telo skozi središče Zemlje? Vrtenje Zemlje zanemarimo, predpostavljamo homogeno zgradbo Zemlje.



Ko je telo oddaljeno od središča Zemlje za r, deluje nanj gravitacijska sila $F = mg_0r/R$, g_0 = 9,8 m/s^2 = težni pospešek na zemeljskem površju, R = polmer Zemlje = 6370 km. Torej telo pada s pospeškom:

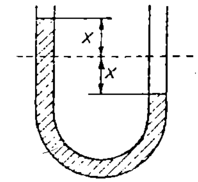
$a = F/m = g_0r/R = \omega^2r$
$t_0 = 2\pi/\omega = 2\pi(R/g_0)^{1/2} = 84$ min

Telo torej niha harmonično z amplitudo R in nihajnim časom t_0 = 84 min. Največja hitrost je za r = 0:

$v_0 = R\omega = R(2\pi/t_0) = 8$ km/s

Enaka je prvi kozmični hitrosti, s katero telo kroži okrog Zemlje tik nad njenim površjem. Seveda, saj je nihanje skozi središče Zemlje pravzaprav projekcija kroženja po obodu Zemlje.

15.29. V cevi U z enakomernim prerezom je steber tekočine z dolžino b = 20 cm. Tekočino v enem kraku potisnemo navzdol in nato popustimo, da tekočina zaniha. Kolik je nihajni čas t_0?



Čez nekaj časa od začetka nihanja je gladina tekočine v levem kraku za x nad ravnovesno gladino, v desnem pa za x pod njo. V tem trenutku deluje na celoten tekočinski steber sila $Sx\varrho g2$ (S = presek cevi, ϱ = gostota tekočine), ki pospešuje steber s pospeškom $a = 2Sx\varrho g/(Sb\varrho) = (2g/b)x = \omega^2x$

$t_0 = 2\pi(b/2g)^{1/2} = 0{,}63$ s

15.30. Utež z maso m_1 = 1 kg visi na vijačni vzmeti in niha z nihajnim časom t_1 = 2 s. Kolikšno utež (m_2) moramo dodati, da se nihajni čas poveča na t_2 = 4 s?

$t_1 = 2\pi(m_1/k)^{1/2}$, k = konstanta prožnosti vzmeti
$t_2 = 2\pi[(m_1 + m_2)/k]^{1/2}$
$(t_1/t_2)^2 = m_1/(m_1 + m_2)$ ali
$m_2 = m_1(t_2^2/t_1^2 - 1) = 3$ kg

15.31. Na prožni vzmeti je obešena utež, ki niha harmonično z amplitudo x_0 = 5 cm. Kolikšna je konstanta prožnosti vzmeti, če je največja kinetična energija nihajoče uteži enaka W_0 = 1 J? Maso vzmeti zanemarimo v primerjavi z maso uteži.

$W_0 = mv_0^2/2 = m(x_0\omega)^2/2 = (mx_0^2/2)(k/m) = kx_0^2/2$
$k = 2W_0/x_0^2 = 800$ N/m

15.32. Prožni vzmeti s konstantama k_1 in k_2 zvežemo ena za drugo (zaporedno) in obesimo na strop. Na prosti konec spodnje vzmeti pritrdimo utež z maso m. Kolik je nihajni čas (t_1) tega sestavljenega nihala (primer a na sliki). Kolik je nihajni čas (t_2) v primeru b, kjer je utež vpeta med vzmeti? In kolik (t_3), če utež visi na vzporedno povezanih vzmeteh (primer c)?

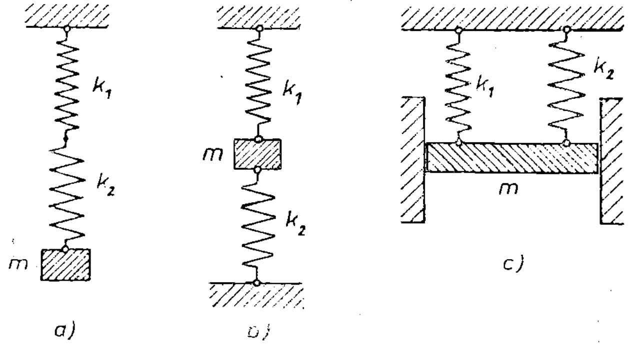
a) V ravnovesnem stanju je vzmet k_1 raztegnjena za x_1 in vzmet k_2 za x_2, tako da je $mg = k_1x_1 = k_2x_2$. Celoten ravnovesni raztezek je $x_0 = x_1 + x_2 = mg(1/k_1 + 1/k_2) = mg/k$, kjer je k konstanta prožnosti zaporedno povezanih vzmeti = $k_1k_2/(k_1 + k_2)$

$t_1 = 2\pi(m/k)^{1/2} = 2\pi[m(k_1 + k_2)/k_1k_2]^{1/2}$

b) V ravnovesju se zgornja vzmet raztegne za x_0, spodnja se za enako skrči, tako da je vsota sile k_1x_0 raztegnjene zgornje vzmeti in sile k_2x_0 skrčene spodnje vzmeti enaka teži uteži:

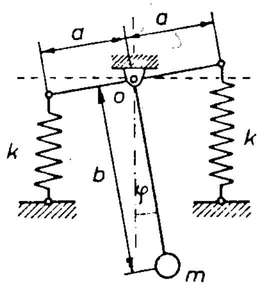
$mg = (k_1 + k_2)x_0 = kx_0$, $k = k_1 + k_2$
$t_2 = 2\pi(m/k)^{1/2} = 2\pi[m/(k_1 + k_2)]^{1/2}$

c) $t_3 = t_2$



15.33. Lahki palici z dolžino b in $2a$, spojeni v obliki črke T, sta vrtljivi okrog vodoravne osi skozi točko 0. Na spodnjem koncu navpične palice b je obešena utež z maso m. Konca vodoravne palice $2a$ sta pripeta na enaki vzmeti, ki sta v ravnovesni legi ($\varphi = 0$) neobremenjeni. Kolik je nihajni čas (t_0) celotnega nihala za majhne aplitude nihanja? Maso palic in vzmeti zanemarimo v primerjavi z maso uteži. Konstanta prožnosit vzmeti je k.

Ko se srednja palica odkloni od navpične smeri za majhen kot φ, se leva vzmet stisne za $a\varphi$, desna pa raztegne za $a\varphi$, zaradi česar se pojavi navor $ka \cdot 2a\varphi$, ki sili nihalo nazaj v ravnovesno lego. Poleg tega deluje še navor teže uteži: $mgb \sin\varphi \approx mgb\varphi$. Celoten navor $M = mbg\varphi + 2ka^2\varphi = (mgb + 2ka^2)\varphi$ vsiljuje nihalu kotni pospešek $\alpha = M/J = M/mb^2 = (mgb + 2ka^2)\varphi/mb^2 = \omega^2\varphi = (2\pi/t_0)^2\varphi$ ali



$t_0 = 2\pi b(gb + 2ka^2/m)^{-1/2}$

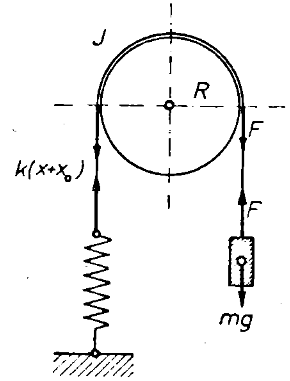
15.34. Lahka vrvica je napeljana prek škripca, ki ima polmer R in vztrajnostni moment J. En konec vrvi privežemo na pritrjeno vzmet, na drugi konec pa obesimo utež z maso m. Utež potegnemo navzdol (vzmet se raztegne) in nato spustimo, da zaniha. Kolik je nihajni čas? Konstanta prožnosti vzmeti je k, maso vzmeti zanemarimo. Vrvica ne podrsava po obodu škripca.

V ravnovesni legi je vzmet raztegnjena za $x_0 = mg/k$. Iz te lege potegnemo utež navzdol za x in nato spustimo, da se začne gibati s pospeškom a, škripec pa se vrti

s kotnim pospeškom $\alpha = a/R$. Velja:

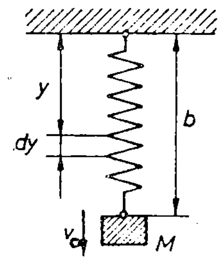
$F - mg = ma$
$k(x_0 + x)R - FR = J\alpha = Ja/R$

Izločimo F in izračunamo:
$a = kx/(m + J/R^2) = \omega^2 x = (2\pi/t_0)^2 x$ ter
$t_0 = 2\pi[(m + J/R^2)/k]^{1/2}$



15.35. Utež z maso $M = 0{,}8$ kg obesimo na prožno vzmet, ki ima maso $m = 0{,}3$ kg in konstanto prožnosti $k = 10$ N/cm. Kolik je nihajni čas (t_0) tega nihala?

Upoštevati moramo, da poleg uteži niha tudi vzmet. Spodnji konec vzmeti ima enako hitrost (npr. v_0) kot utež, višji deli vzmeti pa se gibljejo proporcionalno počasneje, pritrdišče ima seveda hitrost nič. Na globini y pod pritrdiščem je hitrost $v = v_0y/b$, kjer je b dolžina vzmeti. Če je x_0 amplituda nihanja uteži, je $kx_0^2/2$ največja prožnostna energija vzmeti, kar je obenem energija nihala. Ta je enaka največji kinetični energiji uteži in vzmeti:



$kx_0^2/2 = Mv_0^2/2 + W_v$

$v_0 =$ največja hitrost uteži $= x_0\omega = x_0(2\pi/t_0)$
$W_v =$ največja kinetična energija vzmeti, ko se spodnji del vzmeti giblje s hitrostjo v_0

$W_v = (1/2)\int v^2 dm = (m/2b)\int_0^b (v_0y/b)^2 dy = mv_0^2/6$

$kx_0^2/2 = Mv_0^2/2 + mv_0^2/6 = (M + m/3)v_0^2/2 = (M + m/3)x_0^2\omega^2/2$
$\omega^2 = k/(M + m/3) = (2\pi/t_0)^2$
$t_0 = 2\pi[(M + m/3)/k]^{1/2} = 0{,}2$ s

Masi nihajoče uteži prištejemo tretjino mase vzmeti.

15.36. Bakreno žico (dolžina $b = 2$ m, presek $S = 3$ mm^2, prožnostni modul $E = 12 \cdot 10^{10}$ N/m^2) pritrdimo na strop. Na spodnji konec žice obesimo utež z maso $m = 1$ kg in jo spustimo, da zaniha v navpični smeri. Kolik je nihajni čas?

V ravnovesnem stanju je žica raztegnjena za $z_0 = mg/k$, kjer je k konstanta prožnosti žice $= ES/b$ (kar sledi iz Hookovega zakona; $F/S = E\,z_0/b$). Če potegnemo utež iz te ravnovesne lege še za z navzdol, deluje žica nanjo z dodatno silo $F = ESz/b$, ki ji vsiljuje pospešek $a = F/m = (ES/bm)z$ v smeri navzgor:

$a = \omega^2 z = (ES/bm)z$ ali
$t_0 = 2\pi/\omega = 2\pi(bm/ES)^{1/2} = 15$ ms

Žica z utežjo torej niha podobno kot prožna vzmet s konstanto $k = ES/b$.

15.37. S stropa visi žica z dolžino b, s presekom S in strižnim modulom G. Na spodnji konec žice pritrdimo kroglico z maso m in polmerom R. Kroglico nekoliko zavrtimo okrog navpične osi, da se žica zvije, in nato spustimo. Kolik je nihajni čas (t_0) nastalega torzijskega nihanja?

Ko je žica zasukana za kot φ, deluje s torzijskim navorom $M = GS^2\varphi/(2\pi b)$ (glej Visokošolska fizika I. del, str. 138), ki vsiljuje kroglici kotni pospešek $\alpha = M/J = M/(2mR^2/5) = 5GS^2\varphi/(4\pi bmR^2) = \omega^2\varphi = (2\pi/t_0)^2\varphi$ ali

$t_0 = 4\pi(R/S)(\pi mb/5G)^{1/2}$

15.38. Naloga je podobna prejšnji, le da na žico obesimo zobato kolo z maso $m = 3$ kg. Žica ima dolžino $b = 2$ m in premer $2r = 0{,}8$ mm. Kolik je vztrajnostni moment kolesa, če je nihajni čas torzijskega nihanja $t_0 = 10$ s? Strižni modul žice je $G = 8{,}3 \cdot 10^4$ N/mm².

$\alpha = M/J = GS^2\varphi/(2\pi bJ) = (2\pi/t_0)^2\varphi$
$t_0^2 = 8\pi bJ/Gr^4$ ali
$J = Gr^4 t_0^2/8\pi b = 0{,}0042$ kgm²

15.39. Nihalo niha dušeno, začetna amplituda je $A_0 = 3$ cm. Po času $t_1 = 10$ s se amplituda zmanjša na $A_1 = 1$ cm. Po kolikšnem času (t_2) je amplituda enaka $A_2 = 0{,}3$ cm?

Predpostavimo, da je sila dušenja premo sorazmerna s hitrostjo, tako da se amplituda zmanjšuje eksponentno s časom (glej Visokošolska fizika I. del, str. 114):

$A_1 = A_0\exp(-\beta t_1)$ ali $\beta t_1 = \ln(A_0/A_1)$
$A_2 = A_0\exp(-\beta t_2)$ ali $\beta t_2 = \ln(A_0/A_2)$

Enačbi delimo drugo z drugo, da se koeficient dušenja (β) krajša:

$t_2 = t_1\ln(A_0/A_2)/\ln(A_0/A_1) = 21$ s

15.40. Nihalo odklonimo z začetno amplitudo $A_0 = 5$ cm in nato spustimo. Po prvem nihajnem času $t_d = 1$ s se amplituda zmanjša na $A_1 = 4{,}7$ cm. Kolikšen je koeficient dušenja (β) za to nihalo? S kolikšnim nihajnim časom (t_0) bi to nihalo nihalo, če ne bi bilo dušeno?

$\beta = (1/t_d)\ln(A_0/A_1) = 0{,}062/$ s
$\omega_0^2 = \omega_d^2 + \beta^2$ ali
$(2\pi/t_0)^2 = (2\pi/t_d)^2 + \beta^2$
$t_0 = t_d[1 + (\beta t_d/2\pi)^2]^{-1/2} \doteq 0{,}99995$ s $\approx 1{,}0$ s

15.41. Kroglico z maso $m = 0{,}1$ kg in polmerom $r = 1$ cm obesimo na vzmet s konstanto $k = 0{,}1$ N/cm in vse skupaj potopimo v vodo. S kolikšno frekvenco kroglica niha, če predpostavimo linearni zakon upora? Viskoznost vode je $\eta = 10^{-3}$ kg/ms. Po kolikšnem času (t_1) od začetka se amplituda zmanjša na polovico? Vpliv upora na nihanje vzmeti in vzgon v vodi zanemarimo.

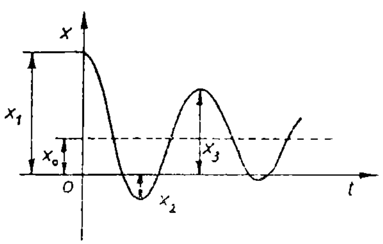
$F_u = 6\pi r\eta v$ (glej Visokošolska fizika I. del, str. 173 in 114)
$F_u = \gamma v = (2m\beta)v$
kjer je $\beta = 3\pi r\eta/m = 0{,}94 \cdot 10^{-3}/$ s = koeficient dušenja

Kroglica niha dušeno s frekvenco:

$\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2} = (k/m - \beta^2)^{1/2} = 10/$s

Amplituda pojema s časom eksponentno: $A = A_0\exp(-\beta t)$. Za $t = t_1$ je $A = A_0/2$ in dobimo: $t_1 = (1/\beta)\ln 2 = 735$ s

15.42. Kazalec galvanometra ima ničlo na sredini skale. Pri merjenju zabeležimo zaporedne največje odklone kazalca v obeh smereh. Dobimo: $x_1 = +20{,}0$ cm, $x_2 = -5{,}6$ cm, $x_3 = +12{,}8$ cm itd. Pri kolikšnem odklonu (x_0) se kazalec umiri?



Prva amplituda kazalca je $A_1 = x_1 - x_0$. Po preteku polovice nihajnega časa (t_0) pokaže kazalec amplitudo $A_2 = x_2 - x_0$ v negativni smeri. Po preteku celega nihajnega časa pokaže amplitudo $A_3 = x_3 - x_0$ zopet v pozitivni smeri itd. Velja:

$|x_2 - x_0| = (x_1 - x_0)\exp(-\beta t_0/2) = x_0 - x_2$ ter
$x_3 - x_0 = (x_1 - x_0)\exp(-\beta t_0)$

Iz obeh enačb izločimo βt_0 in izračunamo x_0:

$\exp(-\beta t_0) = (x_3 - x_0)/(x_1 - x_0)$
$(x_0 - x_2)^2 = (x_1 - x_0)^2\exp(-\beta t_0) = (x_1 - x_0)(x_3 - x_0)$ ter
$x_0 = (x_1x_3 - x_2^2)/(x_1 + x_3 - 2x_2) = +5{,}1$ cm

15.43. Nitno nihalo niha dušeno z nihajnim časom $t_d = 0{,}5$ s; koeficient dušenja je $\beta = 0{,}004/$s. Utež nihala odklonimo od ravnovesne lege za $A_0 = 2$ mm in spustimo. Kolikšno celotno pot popiše nihajoča utež?

Posamezne amplitude so: A_0 v začetku ($t = 0$), $A_1 = A_0\exp(-\beta t_0/2)$ po polovici nihaja, $A_2 = A_0\exp(-\beta t_0)$ po enem nihaju, $A_3 = A_0\exp(-\beta 3t_0/2)$ itd. ali splošno: $A_n = A_0\exp(-\beta nt_0/2)$, kjer gre n od 1, 2,3,... . Celotna pot je:

$x = A_0 + 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + \ldots = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n =$
$x = A_0 + 2A_0 \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\beta nt_0/2)$
$x = A_0 + 2A_0\exp(-\beta t_0/2)/[1 - \exp(-\beta t_0/2)]$
$x = A_0 + 2A_0/[\exp(\beta t_0/2) - 1]$

Ker je βt_0 majhen v primerjavi z 1, lahko napišemo $\exp(\beta t_0/2) \approx 1 + \beta t_0/2$ in dobimo:

$$x = A_0 + 2A_0/(\beta t_0/2) = A_0(1 + 4/\beta t_0) = 4\ \mathrm{m}$$

15.44. Nihalu z lastno frekvenco $\omega_0 = 10/\mathrm{s}$ vsiljujemo nihanje s frekvenco $\omega = 11/\mathrm{s}$. Če se koeficient dušenja (β) poveča za faktor $n = 3$, se amplituda nihala zmanjša za faktor $p = 1{,}5$. Kolikšen je prvotni koeficient (β) dušenja?

$A = konst.\ [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{-1/2}$ (Glej Visokošolska fizika I. del, str. 116.)
$A/p = konst.\ [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2\beta^2\omega^2]^{-1/2}$

Enačbi kvadriramo in nato medsebojno delimo, da se neznani faktorji krajšajo:

$p^2\,[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2\beta^2\omega^2$ ali
$(\omega^2 - \omega_0^2)^2(1 - p^2) = 4\beta^2\omega^2(p^2 - n^2)$
$\beta = [(p^2 - 1)/(n^2 - p^2)]^{1/2}|\omega^2 - \omega_0^2|/2\omega = 0{,}4\ /\mathrm{s}$

15.45. Vsako kolo železniškega vagona je opremljeno z močno vzmetjo, ki se pod vplivom sile $F_0 = 10$ kN stisne za $x = 16$ mm. Vagon vozi po vodoravnem tiru. Dolžina tračnic je $b = 12{,}5$ m, na vsako vzmet odpade teža $F = 55$ kN, ki pritiska navzdol. Pri kateri hitrosti (v) vagona nihajo vzmeti zaradi udarcev koles najmočneje?

Vzmeti nihajo najmočneje, če so v resonanci z udarjanjem koles. Udarci se ponavljajo s časovnimi presledki b/v, nihajni čas lastnega nihanja vzmeti pa je:

$t_0 = 2\pi(m/k)^{1/2} = 2\pi(Fx/gF_0)^{1/2} = b/v$ ali
$v = (b/2\pi)(gF_0/Fx)^{1/2} = 21\ \mathrm{m/s} = 76\ \mathrm{km/h}$

15.46. Blok z maso m leži na vodoravnih tleh in je prek prožne vzmeti (s konstanto k) pripet na zid. Izmaknemo ga iz ravnovesne lege za x_0 in nato spustimo, da začne nihati sem ter tja. Drsni torni koeficient med blokom in tlemi je k_t. Kako se odmik x iz ravnovesne lege spreminja s časom? Kolikšen mora biti drsni torni koeficient (k_1), da blok ne niha? Razliko med statičnim in drsnim trenjem zanemarimo.

V začetku ($t = 0$) je blok oddaljen za x_0 desno od ravnovesne lege. Nato se giblje v levo s pospeškom a, ki zadošča enačbi: $ma = kx - k_tmg$, kjer je x odmik iz ravnovesne lege v poljubnem trenutku (pozitiven, če je blok desno od ravnovesne lege):

$$a = kx/m - k_tg = (k/m)(x - mgk_t/k)$$

Pospešek je nič na oddaljenosti $x' = mgk_t/k$ desno od ravnovesne lege. Na tej oddaljenosti doseže največjo hitrost. Levo od te lege je pospešek negativen, hitrost se zmanjšuje, dokler se blok ne ustavi na oddaljenosti x_1 levo od prvotne ravnovesne lege.
Pišimo: $y = x - x'$ = oddaljenost desno od lege x', tako da je:

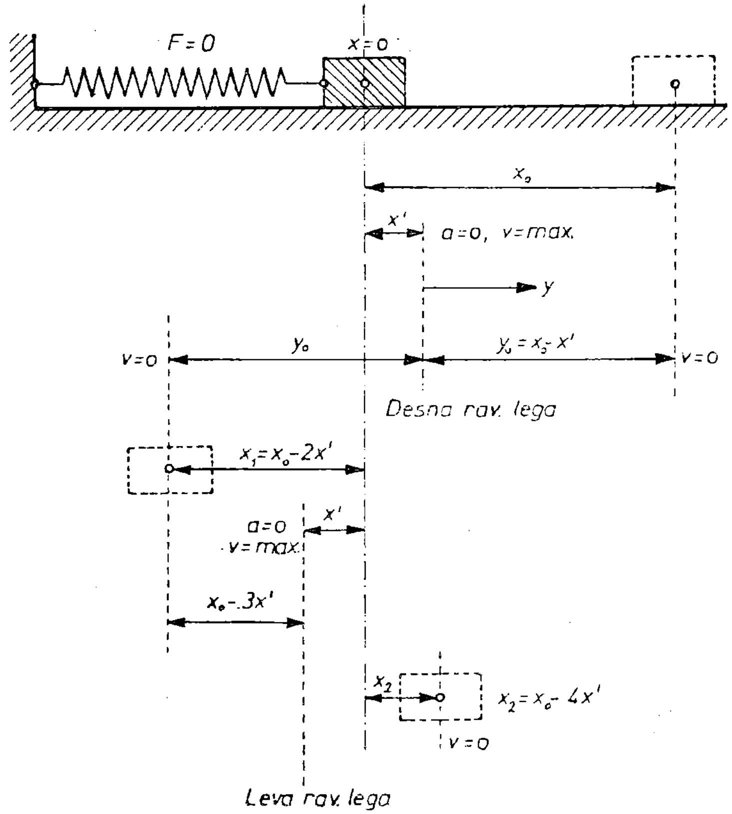
$$a = (k/m)y,$$

kar velja za harmonično nihanje s krožno frekvenco $(k/m)^{1/2}$ okrog ravnovesne lege x'.

Blok se prvič ustavi na razdalji $y_0 = x_0 - x'$ levo od nove ravnovesne lege x', torej na razdalji $x_1 = x_0 - 2x'$ levo od začetne ravnovesne lege. Ko se nato začne gibati v desno, je nova ravnovesna lega na razdalji $x' = mgk_t/k$ levo od začetne ravnovesne lege, nova amplituda je zdaj $x_0 - 3x'$. Blok se drugič ustavi na razdalji $x_2 = -x' + (x_0 - 3x') = x_0 - 4x'$ desno od začetne ravnovesne lege, nakar se igra ponovi. Posamezni nihaji so enako dolgi kot pri nedušenem nihanju, to je:

$$t_0 = 2\pi(m/k)^{1/2}$$

le amplituda se po vsakem nihaju zmanjša za $4x' = 4mgk_t/k$. Vmes med zaporednima največjima odklonoma se odmik bloka spreminja s časom harmonično okrog ravnovesne lege, ki je za $x' = mgk_t/k$ oddaljena levo ali desno od poprejšnje ravnovesne lege, odvisno od tega, s katere strani se začne blok pospešeno gibati.
Blok ne more nihati, če se prvič ustavi ravno v začetni ravnovesni legi, to je za $x_1 = 0$ ali $x' = x_0/2 = mgk_t/k$. Sledi: $k_1 = x_0k/2mg$ ali $kx_0^2/2 = mgk_1x_0$. Začetna energija raztegnjene vzmeti ravno zadošča za negativno delo drsne torne sile.



15.47. Nihanje jeklene strune zbujamo harmonično s pomočjo elektromagneta, frekvenco zbujanja spreminjamo. Pri frekvenci $\omega_2 = 303\ /\mathrm{s}$ dobimo amplitudo $A_2 = 2$ mm, največjo amplitudo $A_1 = 5$ mm pa dobimo pri frekvenci $\omega_1 = 300\ /\mathrm{s}$. V kolikšnem času

(t_1) se amplituda vsiljeno nihajoče strune zmanjša od A_1 do A_2 potem, ko elektromagnet odstranimo?

Struna sama zase niha z lastno frekvenco ω_0. Če jo zbujamo s frekvenco ω, niha z amplitudo:

$$A = K[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{-1/2} \qquad K = \text{konstanta}$$

Največjo amplitudo dobimo pri frekvenci ω_1, za katero velja $\mathrm{d}A/\mathrm{d}\omega = 0$, to je pri $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$:

$$A_1 = K[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2]^{-1/2} = (K/2\beta)(\omega_0^2 - \beta^2)^{-1/2}$$
$$A_2 = K[(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\beta^2\omega_2^2]^{-1/2}$$

Enačbi za A_1 in A_2 kvadriramo in nato medsebojno delimo. Dobimo:

$$(A_1/A_2)^2 = [(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\beta^2\omega_2^2]/[4\beta^2(\omega_0^2 - \beta^2)]$$

Iz enačb za A_1 izločimo ω_0^2, ga vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo iskani koeficient dušenja:

$$\beta^2 = (\omega_1^2/2)\left\{-1 + \left[1 + \frac{A_2^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{(A_1^2 - A_2^2)\omega_1^4}\right]^{1/2}\right\} = 1{,}7\ /s^2$$

$$\beta = 1{,}3/\mathrm{s}$$
$$A_2 = A_1\exp(-\beta t_1) \quad \text{ali}$$
$$t_1 = (1/\beta)\ln(A_1/A_2) = 0{,}7\ \mathrm{s}$$

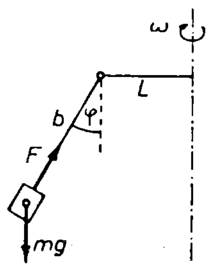
16. DEFORMACIJE TELES

16.1. Koliko dela (A) je treba, da raztegnemo jekleno žico z dolžino $b = 2$ m in premerom $2r = 0{,}2$ mm za $x = 1$ cm? Prožnostni modul jekla je $E = 2 \cdot 10^5\ \mathrm{N/mm^2}$.

Natezajoč žico, premagujemo silo $F = SEx/b$, kjer je S presek žice $= \pi r^2$. Celotno delo je:

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^x F\mathrm{d}x = (SE/b)\int_0^x x\mathrm{d}x = SEx^2/2b = 0{,}16\ \mathrm{J}$$

16.2. Na koncu ročice vrtiljaka z dolžino $L = 3$ m je pritrjena vrv z dolžino $b_0 = 2$ m in presekom $S = 1\ \mathrm{cm^2}$. Na vrv obesimo breme z maso $m = 100$ kg. Za koliko (x_0) se vrv podaljša? Vrtiljak nato vrtimo tako hitro, da se vrv nagne za kot $\varphi = 60°$ glede na navpičnico. Za koliko (Δx) se vrv dodatno raztegne zaradi vrtenja? Prožnostni modul vrvi je $E = 2 \cdot 10^5\ \mathrm{N/cm^2}$.



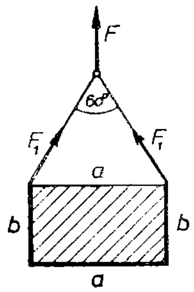
Če je vrv obremenjena s silo F, se raztegne za $x_0 = b_0F/SE$. Viseča mirujoča vrv je obtežena s težo bremena ($F = mg$, lastno težo vrvi zanemarimo), zato je $x_0 = b_0mg/SE = 1$ cm. Zaradi vrtenja se sila v vrvi poveča na $F = mg/\cos\varphi$ in je:

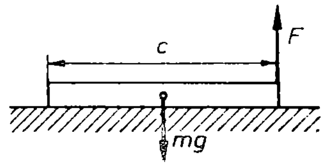
$$x_0 + \Delta x = mgb_0/(ES\cos\varphi) \quad \text{ali}$$
$$\Delta x = x_0(1/\cos\varphi - 1) = x_0 = 1\ \mathrm{cm}$$

16.3. Jekleno vrv ovijemo okrog kovinskega droga, ki ima maso $m = 5000$ kg in pravokoten presek ($a = 30$ cm, $b = 20$ cm). Presek vrvi je $S = 1\ \mathrm{cm^2}$, prožnostni modul je $E = 2{,}2 \cdot 10^7\ \mathrm{N/cm^2}$. Za koliko se vrv raztegne (x), če drog nekoliko dvignemo od tal, kot kaže slika? Trenje med drogom in vrvjo zanemarimo.

Vrv z dolžino $3a + 2b$ je napeta s silo F_1, tako da je dvižna sila F enaka: $2F_1\cos 30°$. Navor dvižne sile F je enak navoru teže droga:

$$Fc = mg\,c/2 \qquad c = \text{dolžina droga}$$
$$F = mg/2 \text{ in } F_1 = mg/(4\cos 30°) = mg\sqrt{3}/6$$
$$x = (3a + 2b)F_1/ES = mg\sqrt{3}(a/2 + b/3)/ES = 0{,}84\ \mathrm{mm}$$

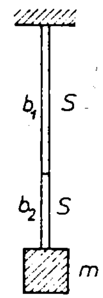




16.4. Za največ koliko odstotkov (p) lahko raztegnemo stekleno palico, preden se raztrga? Prožnostni modul stekla je $E = 7{,}3 \cdot 10^4$ N/mm^2, natezna trdnost je $\sigma_0 =$ $= 70$ N/mm^2. Predpostavimo veljavnost Hookovega zakona.

$p = x/b = \sigma_0/E = 0{,}1\%$

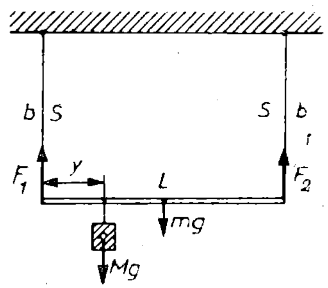
16.5. Bakreno žico z dolžino $b_1 = 2$ m in jekleno žico z dolžino $b_2 = 1$ m povežemo eno za drugo. En konec sestavljene žice pritrdimo na strop, na drugi konec pa obesimo utež z maso $m = 5$ kg. Žici imata enak presek $S = 1$ mm^2, prožnostni modul bakra je $E_1 = 12 \cdot 10^{10}$ N/m^2, jekla pa $E_2 = 20 \cdot 10^{10}$ N/m^2. Za koliko se sestavljena žica podaljša? Težo žic zanemarimo.



Žici sta enako obremenjeni, vsaka s težo uteži mg. Bakrena žica se podaljša za $x_1 = mgb_1/SE_1$, jeklena pa za $x_2 = mgb_2/SE_2$. Podaljšek sestavljene žice je vsota podaljškov posameznih delov:

$x = x_1 + x_2 = (mg/S)(b_1/E_1 + b_2/E_2)$
$x = 1{,}1$ mm

16.6. Palico z maso $m = 2$ kg in dolžino $L = 1{,}5$ m obesimo na enako dolgi žici iz jekla in bakra, ki sta pritrjeni na strop. Kam (y od jeklene žice) moramo na palico obesiti utež z maso $M = 5$ kg, da je palica v ravnovesju vodoravna? Prožnostni modul jekla je $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2, bakra pa $E_2 = 1{,}2 \cdot 10^{11}$ N/m^2.



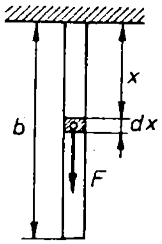
Žici se raztegneta enako, npr. za x. Raztegnjena jeklena žica vleče levi konec palice navzgor s silo $F_1 = E_1Sx/b$, raztegnjena bakrena žica pa vleče desni konec palice navzgor s silo $F_2 = E_2Sx/b$. Ravnovesni pogoj zahteva:

$F_1 + F_2 = (M + m)g$ ter $F_2L = Mgy + mgL/2$

Iz obeh enačb izračunamo x in y:

$x = b(M + m)g/[S(E_1 + E_2)]$
$y = L(1 + m/M)/(1 + E_1/E_2) - mL/2M = 0{,}49$ m

16.7. Svinčeno palico z dolžino $b = 0{,}75$ m obesimo na strop. Za koliko (Δb) se raztegne zaradi lastne teže? Najmanj kako dolga (b_0) bi morala biti palica, da bi se zaradi lastne teže pretrgala? Natezna trdnost svinca je $\sigma_0 = 2$ kN/cm^2, gostota je $\varrho = 11{,}3$ g/cm^3, prožnostni modul je $E = 2 \cdot 10^6$ N/cm^2. Predpostavljamo veljavnost Hookovega zakona tudi pri velikih relativnih raztezkih.



Kratek odsek palice z dolžino dx na globini x pod pritrdiščem palice je obremenjen s težo spodnjega dela palice, to je silo $F = (b-x)S\varrho g$, zato se raztegne za $F dx/SE$ (S = presek palice). Raztezek celotne palice je:

$\Delta b = \int_0^b (F/ES)dx = (\varrho g/E)\int_0^b (b - x)dx = g\varrho b^2/2E$
$\Delta b = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ mm

Palica se najprej pretrga na pritrdišču, kjer je obremenjena s celotno težo $bS\varrho g$. Pretrga se pri dolžini b_0, za katero velja:

$Sb_0\varrho g/S = b_0\varrho g = \sigma_0$ ali
$b_0 = \sigma_0/\varrho g = 180$ m

16.8. En konec gumijaste vrvice z dolžino $b = 2$ m in polmerom $r = 1$ mm privežemo na strop, na drugi konec pa pritrdimo utež z maso $m = 200$ g. Za koliko (Δx) se vrvica zaradi uteži podaljša? Prožnostni modul gumija je $E = 5$ N/mm^2. Utež dvignemo do stropa in jo nato spustimo, da začne padati. Koliko (Δh) je vrvica raztegnjena, ko doseže utež najnižjo lego?

$mg = ES\Delta x/b$
$\Delta x = mgb/(E\pi r^2) = 25$ cm

Ko se utež v najnižji legi ustavi, se celotno zmanjšanje potencialne energije spremeni v prožnostno energijo nategnjene vrvice:

$mg(b + \Delta h) = k(\Delta h)^2/2 = (ES/b)(\Delta h)^2/2$ ali
$(\Delta h)^2 - (2mgb/ES)\Delta h - 2mgb^2/ES = 0$ ali
$(\Delta h)^2 - 2\Delta x\Delta h - 2b\Delta x = 0$

Od obeh korenov te kvadratne enačbe upoštevamo pozitivnega:

$\Delta h = \Delta x[1 + (1 + 2b/\Delta x)^{1/2}] = 1{,}3$ m

16.9. Gumijasto vrvico z dolžino $b_0 = 20$ cm in prečnim presekom $S = 0{,}6$ cm^2 pritrdimo na vrh stožca, ki se vrti okrog navpične geometrijske osi. Na prosti konec vrvice obesimo kroglico z maso $m = 0{,}3$ kg, tako da sloni na plašču stožca. Pri kateri frekvenci (ν_0) vrtenja se kroglica odlepi od stožca? Kot ob vrhu stožca je $2\alpha = 40°$, prožnostni modul vrvice je $E = 5$ N/cm^2.
(Glej nalogo 6.8.)

Kroglica se odlepi pri frekvenci $\nu_0 = (1/2\pi)(g/b \cos\alpha)^{1/2}$, kjer je b dolžina raztegnjene vrvice. To določimo s pomočjo sile F v vrvici: $F = mg/\cos\alpha = SE(b - b_0)/b_0$ ali

$b = b_0[1 + mg/(SE \cos\alpha)] = 41$ cm
$\nu_0 = 0{,}8$ /s

16.10. Tovornjak vleče za seboj breme z maso m = 5 t. Vlečna vrv ima presek S = 1 cm^2. Kolikšna je natezna trdnost (σ_0) vrvi, če se vrv pretrga pri pospešku a = 2 m/s^2? Drsni torni koeficient med bremenom in tlemi je $k_t = 0{,}4$.

$F = ma + mgk_t = 30$ kN
$\sigma_0 = F/S = 30$ kN/cm^2 = 300 MPa = 3 kbar

16.11. Dvigalo z maso m = 2 t visi na jekleni vrvi s presekom S = 3 cm^2. Z največ kolikšnim pospeškom (a) se lahko dvigalo dviga, če natezna napetost v vrvi ne sme preseči polovice meje prožnosti, ki je pri $\sigma_{pr} = 3 \cdot 10^4$ N/cm^2? Kolik je tedaj relativni raztezek vrvi (ε)? Prožnostni modul je $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2.

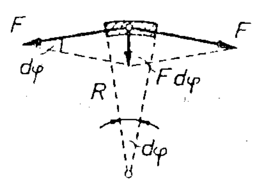
$F = \mathrm{mg} + \mathrm{ma} = S\sigma_{pr}/2$
$a = S\sigma_{pr}/2m - g = 13$ m/s^2
$\varepsilon = F/SE = \sigma_{pr}/2E = 0{,}00075$

16.12. Na jekleno žico (dolžina b = 1 m, presek S = 2 mm^2) pritrdimo utež z maso m = 20 kg in jo vrtimo v navpični ravnini s stalno kotno hitrostjo ω = 10 /s. Kolik je raztezek žice (x) v trenutku, ko gre utež skozi najnižjo točko kroga? Prožnostni modul žice je $E = 2 \cdot 10^5$ N/mm^2.
(Glej nalogo 6.7.)

V najnižji točki kroga je žica obremenjena s silo $F = mg + mb\omega^2 = 2200$ N $= SEx/b$ ali
$x = (mb/ES)(g + b\omega^2) = 5{,}5$ mm

16.13. Jeklen obroč s polmerom R = 50 cm leži na vodoravni ledeni ploskvi. Obroč zavrtimo okrog navpične geometrijske osi s kotno hitrostjo ω = 10 /s. Za koliko odstotkov (p) se poveča njegov polmer? Pri kolikšni kotni hitrosti (ω_0) obroč poči, če je njegova natezna trdnost enaka σ_0 = 400 N/mm^2? Prožnostni modul jekla je $E = 2 \cdot 10^7$ N/cm^2, gostota je ϱ = 7,9 g/cm^3.

Najprej določimo silo F, ki natezuje vrteči se obroč. Na diferencialni odsek obroča z dolžino $ds = Rd\varphi$ učinkujeta v nasprotnih smereh sili F, katerih rezultanta $Fd\varphi$ ima radialno smer in daje temu elementu z maso $dm = \varrho Sds$ (S = presek obroča) radialni pospešek $R\omega^2$. Sledi:



$Fd\varphi = \varrho SRd\varphi\, R\omega^2$ ali $F = SR^2\varrho\omega^2 = ESx/(2\pi R)$
$p = x/(2\pi R) = R^2\varrho\omega^2/E = 10^{-6} = 10^{-4}\%$

Obroč se pretrga, ko sila F preseže mejno vrednost $\sigma_0 S$, kar se zgodi, če je kotna hitrost ω vrtenja obroča večja od ω_0, ki zadošča enačbi:

$SR^2\varrho\omega_0^2 = \sigma_0 S$ ali
$\omega_0 = (\sigma_0/\varrho R^2)^{1/2} = 450$ /s

16.14. Utež z maso m = 8 kg obesimo na bakreno žico, katere dolžina je b = 2 m, presek pa S = 1 mm^2. Za koliko (x) se žica raztegne in kolikšen je njen novi prečni presek (S_1)? Prožnostni modul bakra je $E = 1{,}2 \cdot 10^{11}$ N/m^2, Poissonovo število je $\mu = 0{,}35$.

$x = bmg/ES = 1{,}3$ mm

Poissonovo število μ je količnik relativne spremembe premera žice ($\Delta d/d$) in relativne spremembe njene dolžine ($\Delta b/b$):

$\mu = -(\Delta d/d)/(\Delta b/b)$ ali
$\Delta d/d = -\mu\Delta b/b = -\mu x/b$
$S_1 = \pi(d + \Delta d)^2/4 = S(1 + \Delta d/d)^2 \approx S(1 + 2\Delta d/d)$
$S_1 = S(1 - 2\mu x/b) = 1$ mm$^2(1 - 0{,}00046) \approx 1$ mm^2

16.15. Utež z maso m = 80 kg obesimo na jekleno žico z dolžino b = 3 m in premerom $2r$ = 2 mm. Kolikšna je relativna sprememba prostornine žice ($\Delta V/V$) in kolikšna je relativna sprememba površine plašča žice ($\Delta P/P$)? Prožnostni modul je $E = 2 \cdot 10^5$ N/mm^2, Poissonovo število je $\mu = 0{,}3$.

$V = \pi r^2 b$, $P = 2\pi rb$

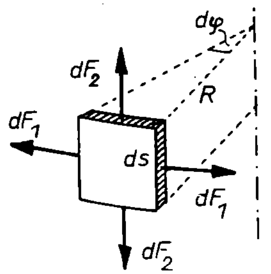
Pričakujemo majhne spremembe, zato računamo z odvajanjem:

$\mathrm{d}V = 2\pi r\mathrm{d}r\, b + \pi r^2\mathrm{d}b$ ter
$\mathrm{d}V/V = 2\mathrm{d}r/r + \mathrm{d}b/b$, $\mu = (-\mathrm{d}r/r)/(\mathrm{d}b/b)$
$\mathrm{d}V/V = (1 - 2\mu)\mathrm{d}b/b = (1 - 2\mu)mg/ES = 0{,}0005$
$\mathrm{d}P = 2\pi b\mathrm{d}r + 2\pi r\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}P/P = \mathrm{d}r/r + \mathrm{d}b/b$
$\mathrm{d}P/P = (1 - \mu)\mathrm{d}b/b = (1 - \mu)mg/ES = 0{,}0009$

16.16. Elektromotor poganja z močjo P = 50 kW jekleno os z dolžino b = 2 m in polmerom R = 2 cm; frekvenca vrtenja je ν = 20 /s. Za kolikšen kot (φ) se zvije vrteča se os? Sučni (torzijski) modul jeklene osi je $G = 8 \cdot 10^4$ N/mm^2.

Elektromotor vrti gred z navorom $M = P/\omega = P/2\pi\nu$, ki zvije gred za kot φ, tako da je:
$M = \pi GR^4\varphi/2b$ (glej Visokošolska fizika, I. del, str. 138)
$\varphi = 2bM/(\pi GR^4) = bP/(\pi^2 G\nu R^4) = 0{,}04$ rad $= 2{,}3°$

16.17. V jekleni valjasti posodi je plin, ki pritiska na stene s tlakom p = 10 bar. Kakšne so natezne napetosti v steni posode? Notranji polmer posode je R = 20 cm, debelina stene je h = 1 cm. Največ kolik sme biti tlak plina v posodi (p_0), da se ta ne razleti, če je natezna trdnost jekla $\sigma_0 = 1$ kN/mm^2?



Da določimo napetosti v plašču posode, si mislimo element valjastega plašča s pokončno stranico ds in lokom $Rd\varphi$, na katerega pritiska plin s silo $pdsRd\varphi$. Okolišna stena deluje na element z dvema dvojicama notranjih sil: prek stranic ds z dvojico vodoravnih sil $dF_1 = \sigma_1 hds$, prek stranic $Rd\varphi$ pa z dvojico navpičnih sil $dF_2 = \sigma_2 hRd\varphi$. Rezultanta vodoravnih sil dF_1 je enaka $dF_1 d\varphi$ (glej nalogo 16.13.) in ima smer pravokotno skozi steno v notranjost posode. V ravnovesju je enaka sili, s katero plin pritiska na element:

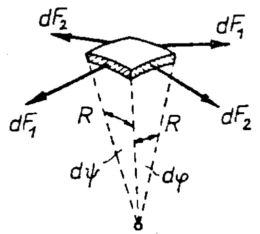
$\sigma_1 hdsd\varphi = pRd\varphi ds$ ali
$\sigma_1 = pR/h = 20$ N/mm^2

Navpična sila dF_2 je posledica sile $p\pi R^2$, s katero plin odriva zgornjo ploskev posode. Ta sila se porazdeli po prečnem prerezu valjastega plašča ($2\pi Rh$). Na ločni element $Rd\varphi$ deluje sila $dF_2 = p\pi R^2\, Rd\varphi/2\pi R = pR^2 d\varphi/2 = \sigma_2 hRd\varphi$ ali

$\sigma_2 = pR/2h = \sigma_1/2 = 10$ N/mm^2

Posoda se razleti pri tlaku $p_0 = h\sigma_0/R = 500$ bar.

16.18. Naloga je podobna prejšnji, le da je posoda kroglaste oblike.



Tu je zaradi simetrije $\sigma_1 = \sigma_2$. Na element stene z lokoma $Rd\varphi$ in $Rd\psi$ deluje okolišna stena z dvojicama sil $dF_1 = \sigma hRd\psi$ in $dF_2 = \sigma hRd\varphi$. Njuna skupna rezultanta znaša $dF_1 d\varphi + dF_2 d\psi$ in je enaka sili $pR^2 d\varphi d\psi$, s katero plin pritiska na izbrani element stene. Sledi:

$2\sigma hRd\varphi d\psi = pR^2 d\varphi d\psi$ ali
$\sigma = pR/2h = 10$ N/mm^2

Največji dovoljeni tlak je pri enaki debelini stene in enaki snovi dvakrat večji kot pri valjasti posodi.

16.19. Dolga jeklena valjasta cev ima notranji polmer $R = 15$ cm, debelina sten je $h = 0{,}5$ cm. Za koliko odstotkov (p) se poveča polmer cevi, če tlak v cevi povečamo z nič na $p = 50$ bar? Spremembo debeline stene med raztezanjem zanemarimo. Prožnostni modul jekla je $E = 2 \cdot 10^5$ N/mm^2.
(Glej nalogo 16.17.)

Obseg cevi ($2\pi R$) se zaradi napetosti $\sigma_2 = pR/h$ poveča za $2\pi\Delta R$. Velja Hookov zakon:

$\sigma_2 = E \cdot 2\pi\Delta R/(2\pi R) = E\Delta R/R$ ali
$p = \Delta R/R = \sigma_2/E = pR/hE = 0{,}00075 = 0{,}075\%$

16.20. Med močni gumijasti cevi (ki preneseta visok tlak), vključimo stekleno cevko z zunanjim polmerom $R_2 = 10$ mm in notranjim polmerom $R_1 = 8$ mm. Največ kolik je lahko tlak (p_0) plina v cevi, če je natezna trdnost stekla $\sigma_0 = 3$ kN/cm^2?
(Glej nalogo 16.17.)

$\sigma_0 = p_0 R_1/(R_2 - R_1)$
$p_0 = \sigma_0(R_2/R_1 - 1) = 75$ bar

17. TLAK V MIRUJOČIH TEKOČINAH

17.1. V zaprti posodi je $V_0 = 30{,}00\ dm^3$ alkohola. Če tlak v posodi povečamo za $\Delta p = 500$ bar, se volumen alkohola zmanjša na $V_1 = 28{,}35\ dm^3$. Kolikšna je stisljivost alkohola?

$\Delta V/V_0 = -\chi\Delta p \quad , \quad \Delta V = V_1 - V_0 = -1{,}65\ dm^3$
$\chi = -\Delta V/(V_0\Delta p) = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ /bar

17.2. Kako se gostota vode in tlak v njej spreminjata z globino, če je stisljivost vode stalna? Kolikšna sta v globini $h = 6000$ m pod gladino morja (ϱ_1 in p_1)? Na gladini morja je tlak $p_0 = 1{,}0$ bar in gostota $\varrho_0 = 1{,}025\ g/cm^3$. Stisljivost vode je $\chi = 5 \cdot 10^{-5}$ / bar.

$dV/V = -d\varrho/\varrho = -\chi dp = -\chi\varrho g dz$

Višinsko koordinato z merimo od gladine navzdol.

$d\varrho/\varrho^2 = g\chi dz \qquad \varrho = \varrho_0$ za $z = 0$
$1/\varrho_0 - 1/\varrho = \chi g z$ ali
$\varrho = \varrho_0/(1 - \chi\varrho_0 g z)$
$\varrho_1 = \varrho_0/(1 - \chi\varrho_0 g h) = 1{,}06\ g/cm^3$
$\chi dp = d\varrho/\varrho$ ter po integraciji:
$\chi(p - p_0) = \ln(\varrho/\varrho_0) = \ln[1/(1 - \chi\varrho_0 g z)]$ ali
$p_1 = p_0 - (1/\chi)\ln(1 - \chi\varrho_0 g h) = 1$ bar $+ 613$ bar $= 614$ bar

17.3. Kako se gostota v tekočini spreminja s tlakom, če je stisljivost stalna? Pri tlaku p_0 je gostota enaka ϱ_0.

Sposodimo si rezultat iz prejšnje naloge:

$\chi(p - p_0) = \ln(\varrho/\varrho_0)$ ali
$\varrho = \varrho_0\exp[\chi(p - p_0)]$

17.4. Motor poganja kompresor, ki s tlakom $p = 6$ bar potiska zrak z volumenskim pretokom $\Phi_v = 600\ m^3/h$. Kolikšna je moč motorja (P), če dela z izkoristkom $\eta = 60\%$?

$\eta P = A/\Delta t = p\Delta V/\Delta t = p\Phi_v$
$P = p\Phi_v/\eta = 1{,}67 \cdot 10^5$ W $= 167$ kW

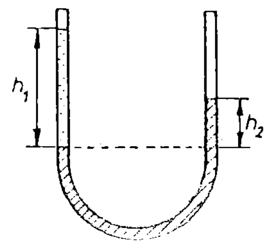
17.5. Koliko dela (A) je treba, da stisnemo tekočino s prostornino V_1 od tlaka p_1 na tlak p_2? Predpostavljamo, da je sprememba prostornine tekočine med stiskanjem majhna v primerjavi z začetno prostornino V_1. Stisljivost tekočine je stalna.

$dV/V_1 = -\chi dp$
$dA = -p dV = \chi V_1 p dp$
$A = \int dA = \chi V_1 \int_{p_1}^{p_2} p dp = \chi V_1(p_2^2 - p_1^2)/2$

17.6. Ob predpostavki, da je temperatura ozračja enakomerna, izračunaj zračni tlak na višini $h = 2864$ m (Triglav). Na morski gladini je gostota zraka $\varrho_0 = 1{,}29\ kg/m^3$, tlak pa $p_0 = 1011$ mbar.

$p(z) = p_0\exp(-\varrho_0 g z/p_0)$ (Glej Visokošolska fizika I. del, str. 156)
$p = p_0\exp(-\varrho_0 g h/p_0) = 706$ mbar

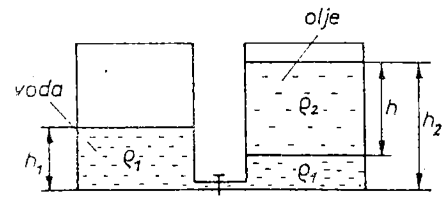
17.7. V U-cev natočimo malo živega srebra. V en krak dotočimo še stolpec $h_1 = 16{,}3$ cm neke tekočine. Kolikšna je gostota (ϱ_1) dolite tekočine, če je živo srebro v drugem kraku za $h_2 = 1{,}2$ cm višje kot v prvem kraku? Gostota živega srebra je $\varrho_2 = 13{,}6\ g/cm^3$.



$\varrho_1 g h_1 = \varrho_2 g h_2$ ali $\varrho_1 = \varrho_2 h_2/h_1 = 1{,}0\ g/cm^3$

17.8. Enaki pokončni valjasti posodi, zgoraj odprti, sta na dnu povezani s cevko. V levi posodi je do višine $h = 10$ cm voda, v desni pa do enake višine olje z gostoto $\varrho_2 = 0{,}8\ g/cm^3$. Kaj se zgodi, če odpremo pipo na sredini cevke? Predpostavljamo, da se olje in voda ne mešata.

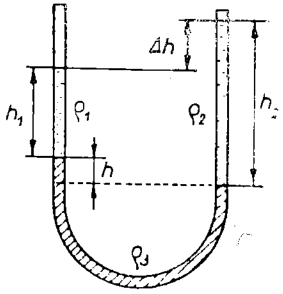
Na levi strani pipe je tlak večji kot na desni, zato začne voda iz leve posode vdirati v desno; gladina vode se zato znižuje, gladina olja pa zvišuje. V ravnovesju je gladina vode na višini h_1, gladina olja pa na višini h_2.



$\varrho_1 g h_1 = \varrho_1 g(h_2 - h) + \varrho_2 g h\ ,\ 2h = h_1 + h_2$
$2\varrho_1 h_1 = h(\varrho_1 + \varrho_2)$ ter
$h_1 = h(\varrho_1 + \varrho_2)/2\varrho_1 = 9$ cm
$h_2 = h(3\varrho_1 - \varrho_2)/2\varrho_1 = 11$ cm

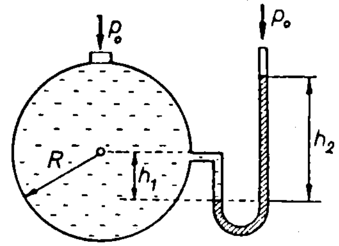
17.9. V U-cev nalijemo nekaj živega srebra. V en krak dolijemo še $m_1 = 20$ g vode, v drugega pa $m_2 = 80$ g alkohola. Kolikšna je višinska razlika (Δh) gladin vode in alkohola? Gostota vode je $\varrho_1 = 1\ \mathrm{g/cm^3}$, alkohola $\varrho_2 = 0{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$ in živega srebra $\varrho_3 = 13{,}6\ \mathrm{g/cm^3}$. Premer cevi je $2r = 2$ cm.

$h_1 = m_1/(\varrho_1 S) = m_1/(\varrho_1 \pi r^2)$
$h_1 = 6{,}4$ cm
$h_2 = m_2/\varrho_2 S = m_2/(\varrho_2 \pi r^2)$
$h_2 = 31{,}8$ cm



Pogoj za ravnovesje:
$\varrho_2 g h_2 = \varrho_3 g h + \varrho_1 g h_1$ ali
$h = (\varrho_2 h_2 - \varrho_1 h_1)/\varrho_3$
Velja še: $h_2 - \Delta h = h_1 + h$ in dobimo:
$\Delta h = h_2 - h_1 - h = h_2 - h_1 - (\varrho_2 h_2 - \varrho_1 h_1)/\varrho_3 = 24{,}0$ cm

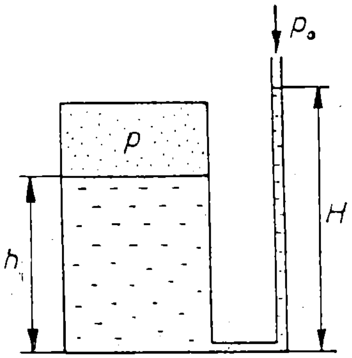
17.10. Okrogla posoda je napolnjena z vodo; zgoraj je odprta, ob strani pa je nanjo priključen živosrebrni manometer. Gladina živega srebra v levem kraku manometra je $h_1 = 20$ cm pod središčem krogle, gladina v desnem kraku pa je $h_2 = 50$ cm nad gladino v levem kraku. Kolik je polmer (R) posode? Gostota živega srebra je $\varrho_2 = 13{,}6\ \mathrm{g/cm^3}$, vode pa $\varrho_1 = 1\ \mathrm{g/cm^3}$.



Tlak na globini h_1 pod središčem krogle izrazimo na dva načina:

$p = p_0 + \varrho_1 g(R + h_1) =$
$= p_0 + \varrho_2 g h_2$
$R = h_2\varrho_2/\varrho_1 - h_1 = 6{,}6$ m

17.11. V zaprti pokončni posodi sega voda do višine $h = 120$ cm. Na dno posode je priključena dolga navpična cevka, ki je zgoraj odprta. Kolik je tlak zraka (p) nad vodo v posodi, če je zunanji zračni tlak $p_0 = 0{,}92$ bar in če sega voda v navpični cevki do višine $H = 2$ m?



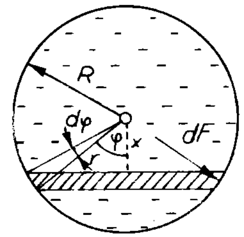
Tlak na dnu posode izrazimo na dva načina:

$p + \varrho g h = p_0 + \varrho g H$ ali
$p = p_0 + \varrho g(H - h) = 1{,}00$ bar

17.12. Okrogla posoda s polmerom $R = 3$ m je napolnjena z nafto (gostota $\varrho = 0{,}9\ \mathrm{g/cm^3}$). S kolikšno rezultanto pritiska nafta na stene posode?

Iz ravnovesnega pogoja sledi, da je ta rezultanta enaka teži nafte v posodi. To dokažemo tudi z računom.
Pritisk nafte na posamezne dele posode razstavimo na navpične in vodoravne komponente. Zadnje se zaradi simetrije medsebojno izničijo, zato upoštevamo le navpične komponente. Kroglasto steno posode v mislih razdelimo na ozke vodoravne (kolobarjaste) trakove. Trak na globini x pod središčem krogle ima površino $dS = R d\varphi 2\pi r = 2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi$, kjer je $x = R\cos\varphi$. Nanj

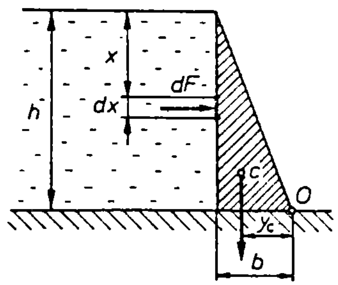
deluje sila $dF = p dS$, katere navpična komponenta je:



$dN = dF\cos\varphi = p\cos\varphi\, dS = \varrho g(R + x)2\pi R^2 \sin\varphi \cos\varphi d\varphi$
$dN = 2\pi\varrho g R^3(1 + \cos\varphi)\sin\varphi \cos\varphi d\varphi$
$N = \int dN = 2\pi\varrho g R^3 \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)\sin\varphi \cos\varphi d\varphi$
$N = 2\pi\varrho g R^3 2/3 = (4\pi R^3/3)\varrho g = mg = 1{,}1$ MN

17.13. Brana akumulacijskega jezera ima obliko tristrane ležeče prizme s katetama b in h ter dolžino a. Kolikšno mora biti razmerje med debelino b in višino h brane, da je navor zaradi vodnega pritiska na brano n-ti del navora zaradi teže brane, merjeno glede na vodoravno os skozi spodnjo točko O? Gostota brane je $\varrho_1 = 2{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$.

Notranjo steno brane v mislih razdelimo na ozke vodoravne trakove. Na trak v globini x deluje vodni pritisk $dF = p(x) a dx = \varrho g a x dx$, njegov navor je $dM = (h - x)dF = \varrho g a x(h - x)dx$. Celoten navor je:



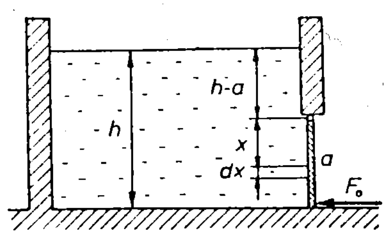
$M = \int dM = \varrho a g \int_0^h x(h - x)dx$
$M = \varrho a g h^3/6 = M_{\text{teže brane}}/n = \varrho_1 V y_c g/n =$
$= \varrho_1 g a h b y_c/2n$

Težišče trikotnega prereza je za $y_c = 2b/3$ oddaljeno od vrtišča O. Sledi:

$\varrho a g h^3/6 = \varrho_1 h g a b^2/3n$ ali
$b/h = (n\varrho/2\varrho_1)^{1/2}$

17.14. Bazen ima v steni pri dnu kvadratasta vrata s stranico $a = 2$ m, ki so vrtljiva okrog vodoravne osi. Do katere višine (h) lahko v bazen natočimo vodo, da tlak na vrata ne preseže vrednosti $p_0 = 6\ \mathrm{N/cm^2}$? Najmanj s kolikšno silo (F_0) moramo v tem mejnem primeru tiščati vrata v vodoravni smeri, da se ne odpro?

Največji tlak je pri dnu ($x = a$), torej mora veljati: $\varrho g h \leq p_0$ ali $h \leq p_0/\varrho g = 6{,}1$ m. Tiščati moramo s silo F_0 na dnu vrat, tako da se navora izenačita:



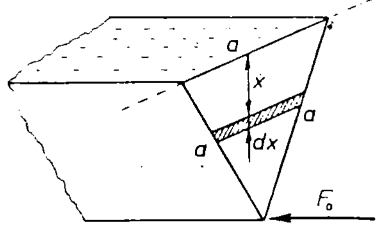
$F_0 a = \int dM = \int x dF = \int x p(x) dS =$
$= \varrho g a \int_0^a (h - a + x)x dx$
$F_0 = \varrho g(ha^2/2 - a^3/2 + a^3/3) = \varrho g a^2(3h - a)/6 = 107$ kN

17.15. Vodoraven žleb s trikotnim enakostraničnim prerezom (stranica $a = 40$ cm) je napolnjen z vodo. Na koncu je zaprt s trikotno loputo, ki se lahko vrti okrog zgornje vodoravne osi. Najmanj s kolikšno silo (F_0) in kje (b od vrha) moramo potiskati loputo, da se ta zaradi vodnega pritiska ne odpre?

Loputo moramo potiskati pri dnu ($b = a\sqrt{3}/2$) s silo F_0. Podobno kot pri prejšnji nalogi dobimo:

$$bF_0 = \int xp(x)\mathrm{d}S = \varrho g\int_0^b x^2(b-x)(a/b)\mathrm{d}x$$

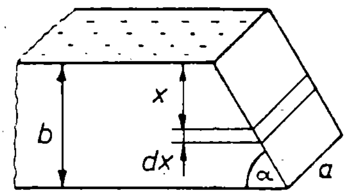
$$F_0 = \varrho ab^2 g/12 = 39 \text{ N}$$



17.16. Pravokotno korito (širina a = 2 m, višina b = 1 m) je polno vode. Zapira ga poševna zapornica, naklonski kot je $\alpha = 45^0$. S kolikšno silo (F) pritiska voda nanjo?

Voda pritiska pravokotno na zapornico. Sila dF na ozek vodoraven trak v globini x je d$F = p(x)$dS $= \varrho gx\, a\mathrm{d}x/\sin\alpha$. Celotna sila je:

$$F = \int \mathrm{d}F = (a\varrho g/\sin\alpha)\int_0^b x\mathrm{d}x = a\varrho gb^2/(2\sin\alpha)$$
$$= 14 \text{ kN}$$

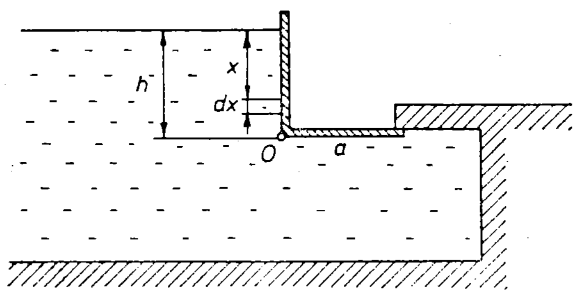


17.17. Pravokotni krili vodoravno položenih vrat imata enako stranico a; vrtljiva so okrog vodoravne osi skozi ogelni rob O. Pri kateri višini (h) vode za vrati se vrata odpro? Težo kril zanemarimo.

Voda pritiska na vodoravno krilo vrat s silo $\varrho ghab$ (b = dolžina krila). Navor te sile $M = \varrho ghab \cdot a/2 = \varrho ga^2bh/2$ mora biti enak navoru vodnih pritiskov na pokončno krilo:

$$M = \int \mathrm{d}M = \int (h-x)\mathrm{d}F = \int_0^h (h-x)\varrho gxb\mathrm{d}x = \varrho gbh^3/6$$

Sledi: $\varrho ga^2bh/2 = \varrho gbh^3/6$ ali $h = a\sqrt{3}$.

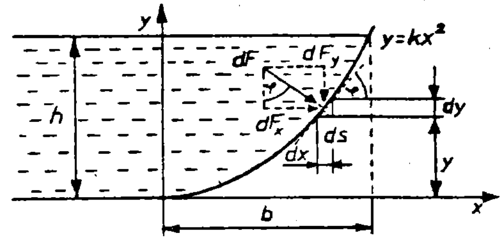


17.18. Jez v obliki parabole $y = kx^2$ (k = 1 /m) je napolnjen z vodo do višine h = 2 m; njegova širina je a = 4 m. S kolikšno silo (F) pritiska nanj voda?

Ozek trak na globini $h - y$ ima površino dS = d$y/\sin\varphi$ = d$x/\cos\varphi$. Nanj pritiska voda s silo d$F = p$d$S = a\varrho g(h-y)\mathrm{d}y/\sin\varphi$. To razstavimo na vodoravno komponento dF_x in na navpično dF_y:

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\sin\varphi \text{ in } \mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cos\varphi$$

$$F_x = \int \mathrm{d}F_x = \varrho ga\int_0^h (h-y)\mathrm{d}y = \varrho gah^2/2 = 78 \text{ kN}$$
$$F_y = \int \mathrm{d}F_y = \varrho ag\int_0^b (h-kx^2)\mathrm{d}x \quad , \quad \text{kjer je } h = kb^2$$
$$F_y = (2/3)\varrho gah(h/k)^{1/2} = 74 \text{ kN}$$



Vodoravna komponenta vodnega pritiska (F_x) je enaka kot pri navpičnem zidu, navpična komponenta (F_y) pa je odvisna od oblike zidu.

Celotna sila na jez je:

$$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = 108 \text{ kN}$$

17.19. Betonski kanal s pravokotnim presekom (širina a = 1 m, višina h = 0,8 m) je napolnjen z vodo. Na koncu ga zapira lesena zapornica z maso m = 30 kg, ki lahko drsi po navpičnih žlebovih v stranskih stenah kanala. S kolikšno silo (F) moramo dvigniti zapornico, če je drsni torni koeficient med zapornico in kanalom k_t = 0,3? Koliko dela (A) je treba za dvig zapornice, če je voda v kanalu stalno enako visoko? Najmanj kolikšno moč (P) mora imeti elektromotor, da dvigne zapornico v času t = 3 s?

Premagujemo težo zapornice in torno silo F_t:

$$F = mg + F_t$$

Zadnja je odvisna od normalne sile N, s katero voda pritiska pravokotno na zapornico. Pri spustu za dx se ta sila poveča za d$N = p(x)a\mathrm{d}x = \varrho gax\mathrm{d}x$. Celotna pravokotna sila je:

$$N = \int \mathrm{d}N = \varrho gah^2/2$$

$$F = mg + k_tN = mg + k_t\varrho gah^2/2 = 1{,}24 \text{ kN}$$

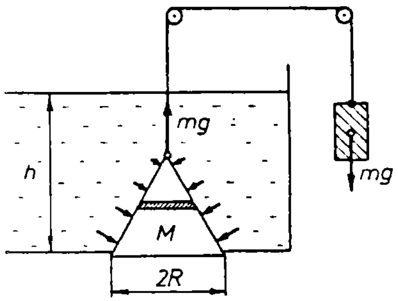
Da se vrata dvignejo za h, je potrebno delo:

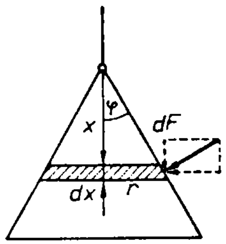
$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^h F(x)\mathrm{d}x = \int_0^h (mg + k_t\varrho gax^2/2)\mathrm{d}x = mgh + F_th/3$$
$$A = 490 \text{ J}$$
$$P = A/t = 160 \text{ W}$$

17.20. Zamašek v obliki enakostraničnega stožca s polmerom R = 20 cm in maso M = 50 kg zapira krožno odprtino (premer 2R) na dnu posode. Vrh stožca je z vrvjo prek škripcev povezan z visečo utežjo. Kolikšna mora biti masa (m) te uteži, da stožec zapira odprtino, če je v posodi voda do višine h = 2 m?

Poiskati moramo navpično komponento rezultante vodnega pritiska na plašč stožca. Stožec v mislih razdelimo na ozke vodoravne kolobarjaste pasove. Na pas v globini x pod vrhom stožca, ki ima površino $dS = 2\pi r dx/\cos\varphi$, kjer je $r = x/\sqrt{3}$ in $\varphi = 30^0$ (enakostranični trikotnik), deluje navpična sila $dF = \varrho g(h - R\sqrt{3} + x)dS = \varrho g(h - R\sqrt{3} + x)(2\pi/3)xdx$

$$F = \int dF = (2\pi\varrho g/3)\int_0^{R\sqrt{3}}(h - R\sqrt{3} + x)xdx =$$
$$F = \pi\varrho g R^2(h - R/\sqrt{3}) = 2{,}3 \text{ kN}$$
$$mg = F + Mg$$
$$m = M + F/g = 285 \text{ kg}$$

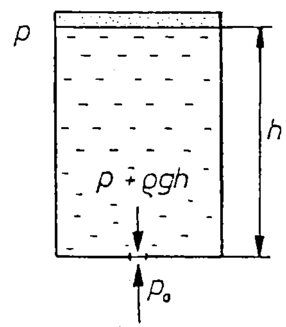




17.21. Zgoraj odprta pokončna posoda je polna vode. Za koliko se spremeni tlak na dnu posode, če v vodo položimo telo s prostornino V in gostoto ϱ?

Tlak se ne spremeni. Zaradi telesa se izlije nekaj vode. Tlak na dnu je odvisen od višine vode, ki pa se ne spremeni.

17.22. Zaprta pokončna posoda je skoraj napolnjena z vodo; višina vode je h = 80 cm. V dnu posode napravimo odprtinico. Največ kolikšen (p) je lahko tlak zraka nad gladino v posodi, da voda ne izteče? Zunanji zračni tlak je p_0 = 1 bar. Najmanj kako visoka (H) mora biti posoda, da voda ne izteka skozi odprtinico, četudi ni zraka v posodi?



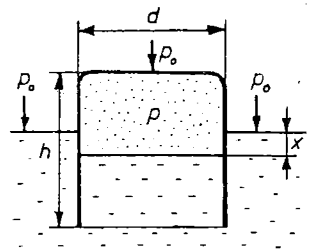
Voda ne izteka, če ob odprtinici pritiska navzdol z manjšim tlakom, kot zrak pritiska navzgor:

$p + \varrho gh \leqslant p_0$ ali
$p \leqslant p_0 - \varrho gh = 0{,}92$ bar
$h = H$ za $p = 0$:
$H = p_0/\varrho g = 10{,}2$ m

17.23. Valjasto posodo s premerom d = 10 cm položimo na gladino vode z odprtino navzdol. Posoda nekoliko potone in nato plava. Kolik je tlak (p) zraka v posodi, če je

zunanji zračni tlak p_0 = 1 bar? Za koliko (x) je gladina vode v posodi nižja od okolišne gladine? Masa lonca je m = 2 kg.

Ko posodo potopimo v vodo, se tlak zraka v njej poveča s p_0 na p. Na zgornje dno posode deluje zato razlika tlakov $p - p_0$, ki vzdržuje ravnovesje teži posode:



$mg = (p - p_0)\pi d^2/4$
$p = p_0 + 4mg/\pi d^2 = 1{,}025$ bar

Na globini x pod gladino okolišne vode je tlak
$p = p_0 + \varrho gx = p_0 + 4mg/\pi d^2$
$x = 4m/(\varrho\pi d^2) = 25{,}5$ cm

17.24. Nakit z maso m = 50 g položimo v vrč, ki je poln vode; izlije se V = 4 cm^3 vode. Koliko odstotkov (p_1) je v nakitu zlata in koliko (p_2) svinca? Gostota zlata je ϱ_1 = 19,3 g/cm^3, svinca pa ϱ_2 = 11,4 g/cm^3.

Prostornina nakita je enaka prostornini V izlite vode. Povprečna gostota nakita je $\varrho = m/V$ = 12,5 g/cm^3. Ker je ta manjša od gostote zlata, nakit ni ves iz zlata.

$m_1 = p_1 m$ = masa zlata v nakitu
$m_2 = p_2 m$ = masa svinca v nakitu , $p_2 = 1 - p_1$
$V = V_1 + V_2 = m_1/\varrho_1 + m_2/\varrho_2 = m/\varrho$ ali
$1/\varrho = p_1/\varrho_1 + p_2/\varrho_2 = 1/\varrho_2 - p_1(1/\varrho_2 - 1/\varrho_1)$
$p_1 = (1/\varrho_2 - 1/\varrho)/(1/\varrho_2 - 1/\varrho_1) = 0{,}215 = 21{,}5$ %
$p_2 = 1 - p_1 = 78{,}5$ %

17.25. Zlata zapestnica tehta na zraku T = 0,49 N, v vodi pa T_1 = 0,44 N. Koliko (m_1) je v zapestnici zlata in koliko (m_2) je bakra? Gostota zlata je ϱ_1 = 19,3 g/cm^3, bakra pa ϱ_2 = 8,9 g/cm^3.

Če zanemarimo vzgon v zraku, pokaže tehtanje na zraku pravo težo. Masa m celotne zapestnice zato znaša: $m = T/g$ = 50 g.
Tehtanje v vodi pokaže razliko med pravo težo zapestnice in vzgonom: $T_1 = T -$ vzgon $= mg - \varrho_0 Vg$, kjer je ϱ_0 gostota vode in V volumen zapestnice: $V = (T - T_1)/\varrho_0 g$ = 5,1 cm^3.

$m_1 + m_2 = m$
$m_1/\varrho_1 + m_2/\varrho_2 = V$

Iz obeh enačb izračunamo:

$m_1 = \varrho_1(m - \varrho_2 V)/(\varrho_1 - \varrho_2) = 8{,}5$ g ter
$m_2 = m - m_1 = 41{,}5$ g

17.26. Porozen odlitek železa je poln zračnih votlinic. Tehtanje na zraku pokaže težo T = 265 N, tehtanje v vodi pa pokaže navidezno manjšo težo T_1 = 177 N. Kolikšna je celotna prostornina (V_1) zračnih votlinic v odlitku? Gostota homogenega litega železa je $\varrho = 7{,}8$ g/cm^3. Vzgon v zraku zanemarimo.

V = volumen čistega železa v odlitku = $m/\varrho = T/(\varrho g) = 3{,}46$ dm^3
$T - T_1$ = vzgon = $\varrho_0(V + V_1)g$ ali
$V_1 = (T - T_1)/(\varrho_0 g) - V = 5{,}51$ dm^3

17.27. Splav je narejen iz $n = 10$ lesenih debel z dolžino $h = 15$ m in premerom $d = 40$ cm. Največ kolikšno breme (m) lahko splav nosi? Gostota lesa je $\varrho = 0{,}8$ g/cm^3.

Splav se lahko potopi največ toliko, da sega voda tik do roba. V tem skrajnem primeru je vzgon enak $g\varrho_0 nh\pi d^2/4$ (ϱ_0 = gostota vode). Teža tovora je razlika med vzgonom in težo samega splava:

$mg = (\varrho_0 - \varrho)gnh\pi d^2/4$ ali
$m = (\varrho_0 - \varrho)nh\pi d^2/4 = 3770$ kg

17.28. Leseno ploščo z debelino $h = 10$ cm položimo v vodo, ki je v veliki posodi. Za koliko (x) se plošča potopi? Gostota plošče je $\varrho = 0{,}8$ g/cm^3. Kaj pa, če se posoda giblje navzgor (ali navzdol) s pospeškom $a = 2$ m/s^2?

Plošča se potopi za toliko (x), da je teža izpodrinjene vode enaka teži plošče: $Sh\varrho g = Sx\varrho_0 g$ ali

$x = h\varrho/\varrho_0 = 8$ cm

Pospešeno gibanje posode je ekvivalentno spremembi težnega pospeška (povečanje, če se posoda giblje navzgor, in zmanjšanje, če se giblje navzdol). Ker ta izpade iz računa, je ravnovesna potopitev plošče neodvisna od pospeška posode.

17.29. Kvader z višino h in gostoto ϱ plava na vodi. Nekoliko ga potisnemo v vodo in nato spustimo, da začne nihati. Kolik je njegov nihajni čas (t_0)? Upor vode zanemarimo.

V ravnovesnem stanju je dno kvadra na globini x_0, tako da je vzgon enak teži kvadra: $x_0 S\varrho_0 g = hS\varrho g$ (S = ploščina dna kvadra).

$x_0 = h\varrho/\varrho_0$

Ko je dno na globini x (ki je večja od x_0), deluje na kvader rezultanta vzgona in teže kvadra, ki ima smer navzgor in vsiljuje kvadru pospešek a:

$xS\varrho_0 g - hS\varrho g = ma = Sh\varrho a$ ali
$a = g(x - x_0)\varrho_0/\varrho h = \omega^2(x - x_0)$
$t_0 = 2\pi/\omega = 2\pi(h\varrho/\varrho_0 g)^{1/2}$

17.30. Leseno klado s presekom S in debelino b potopimo v vodo tako, da je zgornja ploskev v ravnini gladine. Kako visoko (h) odskoči, ko jo spustimo? Gostota klade je ϱ, gostota vode je ϱ_0. Upor vode zanemarimo.

Ko je dno klade na globini x, deluje na klado vzgon $F = Sx\varrho_0 g$, ki med dviganjem iz vode opravi delo:

$A = \int_0^b F dx = Sg\varrho_0 \int_0^b x dx = Sg\varrho_0 b^2/2$

To delo se naloži v obliki povečane potencialne energije klade.
Težišče klade se dvigne za h, tako da je $mgh = A$ ali
$h = b\varrho_0/2\varrho$

17.31. Telo z gostoto $\varrho = 1{,}030$ g/cm^3 spustimo, da se potopi v morje. Na kateri globini h obmiruje? Stisljivost vode je $\chi = 5 \cdot 10^{-5}$/bar, gostota vode na gladini je $\varrho_0 = 1{,}025$ g/cm^3.

Telo obstane na globini h, na kateri je njegova gostata enaka gostoti obstoječe vode. (Glej nalogo 17.2.)

$\varrho = \varrho_0/(1 - \chi\varrho_0 gh)$
$h = (1 - \varrho_0/\varrho)/(\varrho_0\chi g) = 966$ m

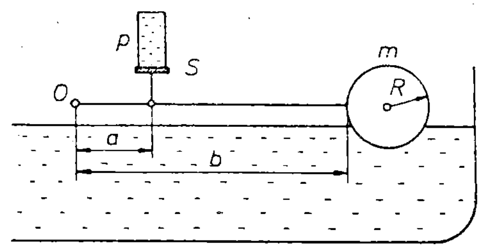
17.32. V posodi sta živo srebro (gostota $\varrho_1 = 13{,}6$ g/cm^3) in voda (gostota $\varrho_0 = 1$ g/cm^3). V posodo spustimo kos železa (gostota $\varrho_2 = 7{,}8$ g/cm^3), ki obmiruje med vodo in živim srebrom. Kolikšen del (p) prostornine predmeta je v vodi?

V = prostornina predmeta = V_0 (v vodi) + V_1 (v Hg)

Teža predmeta je vsota vzgonov v vodi in živem srebru:

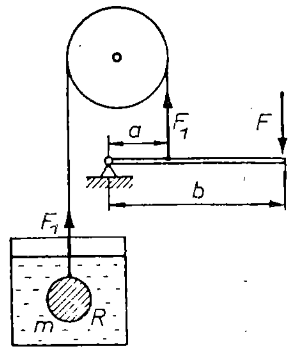
$V\varrho_2 g = V_0\varrho_0 g + V_1\varrho_1 g$ ali
$p = V_0/V = (\varrho_1 - \varrho_2)/(\varrho_1 - \varrho_0) = 0{,}46 = 46$ %

17.33. Plavač (masa $m = 62$ g) v obliki votle krogle z zunanjim polmerom $R = 5$ cm je pritrjen na vodoraven vzvod z dolžino $b = 30$ cm, ki se lahko vrti okrog vodoravne osi skozi točko 0. Na razdalji $a = 5$ cm od vrtišča je na vzvod pritrjen poklopec, ki zapira cev s premerom $S = 4$ cm^2. Najmanj kolikšen (p) mora biti tlak v cevi, da se poklopec odpre, če je plavač do polovice potopljen v vodo? Težo vzvoda zanemarimo.



$pSa + mg(b + R) = F_{vz}(b + R) = g\varrho(2\pi R^3/3)(b + R)$ ali
$p = (b + R)(2\pi R^3\varrho/3 - m)g/aS = 0{,}34$ bar

17.34. Kroglo s polmerom R in gostoto ϱ obesimo na nit in potopimo v vodo. Nit je prek škripca privezana na lahek vodoraven drog, na razdalji a od njegovega vrtišča. S kolikšno silo (F) moramo potiskati navzdol na konec droga, da je krogla v ravnovesju? Dolžina droga je b, gostota vode je ϱ_0.

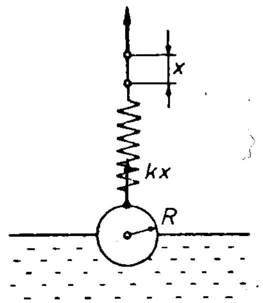


Sila v vrvi je:

$F_1 = mg - F_{vz} =$
$= (\varrho - \varrho_0)g4\pi R^3/3$
$Fb = F_1 a$
$F = F_1 a/b = 4\pi agR^3(\varrho - \varrho_0)/3b$

Če škripec zamenjamo s pritrjenim valjem, se sila F zmanjša za faktor $\exp(-\pi k_s)$, kjer je k_s statični torni koeficient med nitjo in valjem.

17.35. Kroglo s polmerom R = 3 cm in gostoto ϱ = 3 g/cm^3 pritrdimo na vijačno vzmet in potopimo v vodo. Za koliko (x) moramo raztegniti vzmet navzgor, da je krogla do polovice potopljena v vodo? Konstanta prožnosti vzmeti je k = 10 N/cm.



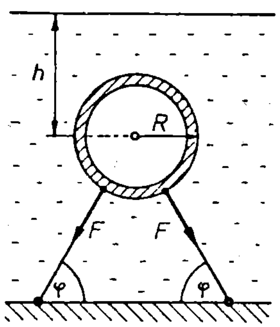
Na kroglo učinkujejo sila kx raztegnjene vzmeti in vzgon $\varrho_0 g2\pi R^3/3$ v smeri navzgor ter teža $\varrho g4\pi R^3/3$ navzdol. V ravnovesju je njihova rezultanta nič:

$kx + 2\pi\varrho_0 gR^3/3 = 4\pi\varrho gR^3/3$
$x = (2\varrho - \varrho_0)2\pi R^3 g/3k$ = 2,8 mm

17.36. Votla krogla z maso m = 20 kg in zunanjim polmerom R = 50 cm je z dvema jeklenima vrvema pritrjena na dno jezera. Vrvi oklepata kot $\varphi = 60^0$ z vodoravnim dnom. Kolikšna je sila (F) v vsaki vrvi? Središče krogle je na globini h = 5 m.

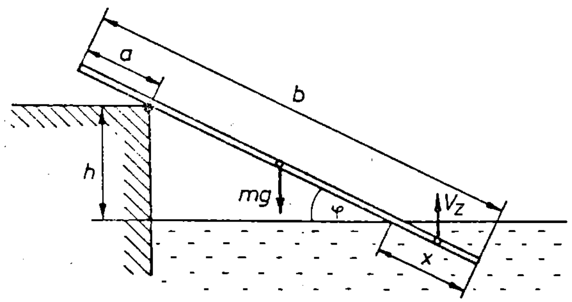
$2F\sin\varphi = F_{vz} - mg$

Ker je $h > R$, je cela krogla potopljena v vodi, zato je $F_{vz} = (4\pi R^3/3)\varrho g$ in dobimo:



$F = (4\pi R^3\varrho/3 - m)g/(2\sin\varphi)$
F = 2,85 kN

17.37. Tenka palica (dolžina b = 2 m) je na oddaljenosti a = 20 cm od enega konca prislonjena ob rob pomola. Drug konec palice je v vodi. Kolikšna je dolžina (x) potopljenega dela palice? Gostota palice je ϱ_1 = 0,8 g/cm^3, višina pomola nad vodo je h = 0,5 m.



Navor teže palice glede na vodoravno os skozi rob pomola je enak navoru vzgona, ki deluje na potopljeni del palice; zadnji ima prijemališče v težišču potopljenega dela palice.

$\varrho_1 Sbg(b/2 - a)\cos\varphi = S\varrho xg(b - a - x/2)\cos\varphi$

S je presek palice, ϱ je gostota vode, φ je naklonski kot palice, ki je odvisen od višine h pomola.

$\varrho_1 b(b/2 - a) = \varrho(b - a)x - \varrho x^2/2$ ali
$x^2 - 2(b - a)x + (\varrho_1/\varrho)b(b - 2a) = 0$

Netrivialna rešitev (ki ima fizikalen pomen) te kvadratne enačbe je:

$x = b - a - [(b - a)^2 - (\varrho_1/\varrho)b(b - 2a)]^{1/2}$ = 98 cm

17.38. Najmanj koliko dela (A) je treba, da napihnemo milni mehurček s polmerom R = 7 cm? Površinska napetost milnice je σ = 0,073 N/m.

Opravljeno delo se naloži v obliki povečane površinske energije mehurčka: $A = \sigma 4\pi R^2 2$ (faktor 2 zato, ker ima mehurček dve prosti gladini) $= 8\pi\sigma R^2$ = 9,0 mJ.

17.39. Najmanj koliko dela (A) je treba, da razpršimo oljno kapljo z maso m = 1 g v vodi v drobne kapljice s polmerom R = 1 μm? Gostota olja je ϱ = 0,8 g/cm^3, površinska napetost na meji olje–voda je σ = 0,018 N/m.

Vsaka kapljica ima površino $4\pi R^2$ in maso $4\pi R^3\varrho/3$. Prvotna kaplja s površino $S_0 =$ $= 4\pi R_0^2 = 4\pi(3m/4\pi\varrho)^{2/3}$ = 5,6 cm^2 se razprši v $3m/4\pi\varrho R^3$ kapljic, katerih skupna površina je $S_1 = 4\pi R^2 3m/(4\pi\varrho R^3) = 3m/(\varrho R)$ = 3,75 m^2. Delo A je enako povečanju površinske energije:

$A = \sigma(S_1 - S_0)$ = 68 mJ

17.40. Kolik je tlak zraka (p_1) v milnem mehurčku s polmerom $r_1 = 2$ cm? Za koliko se ta tlak zmanjša (Δp), če mehurček napihnemo, da se njegov polmer poveča na $r_2 = 5$ cm? Koliko dela (A) opravimo med napihovanjem? Površinska napetost milnice je $\sigma = 0{,}040$ N/m, zunanji zračni tlak je $p_0 = 1$ bar.

$p_1 = p_0 + 4\sigma/r_1 = 1 \text{ bar} + 8 \text{ N/m}^2 \approx 1 \text{ bar}$

Povečanje tlaka zaradi površinske napetosti je pri našem mehurčku majhno v primerjavi z zunanjim tlakom.

$\Delta p = 4\sigma/r_1 - 4\sigma/r_2 = 4{,}8 \text{ N/m}^2$
$A = \int dA = \int_{r_1}^{r_2}(p - p_0)4\pi r^2 dr = 16\pi\sigma\int_{r_1}^{r_2} r dr$
$A = 8\pi\sigma(r_2^2 - r_1^2) = 2{,}1$ mJ

17.41. Kolikšna je gostota vode (ϱ_1) v kapljici s polmerom $r = 10^{-6}$ cm pri temperaturi 4^0C? Površinska napetost vode je $\sigma = 0{,}070$ N/m, stisljivost vode je $\chi = 5 \cdot 10^{-5}$/bar.

Gostota vode pri 4^0C je točno 1,000 g/cm^3, če je tlak $p_0 = 1$ bar. V kapljici s polmerom r pa je tlak za $2\sigma/r$ večji, zato je tudi gostota nekoliko večja (glej nalogo 17.2.):

$\Delta\varrho/\varrho = \chi\Delta p = \chi 2\sigma/r = 0{,}007$
$\Delta\varrho = 0{,}007 \text{ g/cm}^3$
$\varrho_1 = \varrho + \Delta\varrho = 1{,}007 \text{ g/cm}^3$

17.42. Voda v odprti kapilari z notranjim polmerom $r = 0{,}5$ mm se zaradi površinske napetosti dvigne za $h = 2{,}9$ cm nad okolišno gladino. Kolikšna je površinska napetost vode, če voda popolnoma omoči kapilaro?
(Glej Visokošolsko fiziko I. del, str. 153)

$h = 2\sigma/(\varrho g r)$ ali
$\sigma = \varrho g h r/2 = 0{,}071$ N/m

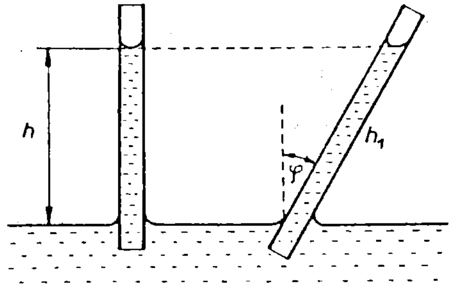
17.43. Kapilari z notranjim premerom $d_1 = 0{,}1$ mm in $d_2 = 0{,}3$ mm potopimo v kapljevino, ki ima površinsko napetost $\sigma = 0{,}07$ N/m in gostoto $\varrho = 1$ g/cm^3. Kolikšna je višinska razlika (Δh) gladin v obeh kapilarah? Kapilari sta pokončni, kapljevina povsem moči njune stene.

$\Delta h = 4\sigma/(\varrho g d_1) - 4\sigma/(\varrho g d_2) = (4\sigma/\varrho g)(1/d_1 - 1/d_2) = 19$ cm

17.44. Kapilaro z notranjim polmerom $r = 0{,}2$ mm postavimo pokonci v vodo. Kako visoko (h) se voda dvigne v njej, če povsem omoči njene stene? Površinska napetost vode je $\sigma = 0{,}072$ N/m. Koliko dela (A) opravi med kapilarnim dvigom sila površinske napetosti? Kolikšna je potencialna energija (W_p) dvignjene vode? Kako dolg (h_1) je stolpec vode v kapilari, ki je nagnjena za kot $\varphi = 45^0$?

$h = 2\sigma/(\varrho g r) = 7{,}3$ cm
$W_p = mgh/2$, m = masa dvignjenega stebra vode $= \varrho\pi r^2 h$

$W_p = \pi r^2\varrho g h^2/2 = 2\pi\sigma^2/(\varrho g) = 3{,}3$ μJ
$A = Fh = 2\pi r\sigma h = 4\pi\sigma^2/(\varrho g) = 2$ W_p



Polovica dela sile površinske napetosti se naloži kot potencialna energija dvignjene vode, druga polovica se porabi za premagovanje trenja in upora med dviganjem. Višinska razlika dvignjene vode je neodvisna od nagiba kapilare, zato je $h_1 = h/\cos\varphi = 10{,}3$ cm.

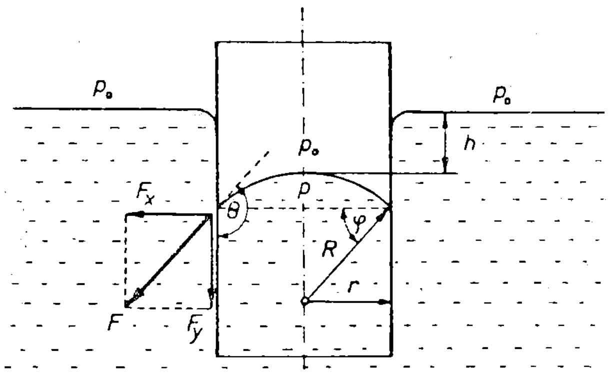
17.45. Pokončno kapilaro s polmerom $r = 0{,}8$ mm potopimo v živo srebro; površinska napetost je $\sigma = 0{,}48$ N/m. Kolik je krivinski polmer (R) meniskusa v kapilari in kolik je kot močenja (θ), če se živo srebro v kapilari spusti za $h = 6{,}6$ mm?

Nalogo rešimo na dva načina.
a) Tlak v globini h v okolici kapilare je $p_0 + \varrho g h$, v notranjosti kapilare (tik pod meniskusom) pa $p_0 + 2\sigma/R$. Ker sta v ravnovesju enaka, je $2\sigma/R = \varrho g h$ ali $R = 2\sigma/(\varrho g h) = 1{,}1$ mm.

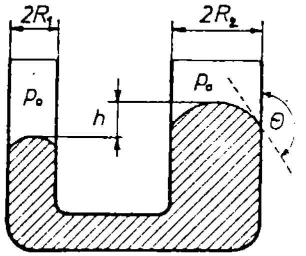
$r = R\cos\varphi = R\cos(\pi - \theta) = -R\cos\theta$ ali
$\cos\theta = -r/R = -0{,}727$, $\theta = 137^0$

b) Navpična komponenta sile $F = 2\pi r\sigma$ površinske napetosti je enaka $F_y = F\cos\varphi = -F\cos\theta$ in vzdržuje ravnovesje s silo $\varrho g h\pi r^2$, s katero skuša okolišna tekočina dvigniti meniskus v kapilari in ga izravnati z okolišno gladino:

$-2\pi r\sigma\cos\theta = \varrho g h\pi r^2$ ali
$\cos\theta = -\varrho g r h/2\sigma = -r/R$, kar že poznamo.



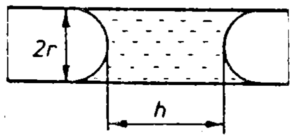
17.46. V *U*-cev z odprtima krakoma (polmera $R_1 = 0{,}3$ mm in $R_2 = 0{,}5$ mm) nalijemo živo srebro. Približno kolikšna je višinska razlika (h) gladin v krakih? Površinska napetost živega srebra je $\sigma = 0{,}48$ N/m, mejni kot močenja je $\theta = 140^0$, gostota je $\varrho = 13{,}6$ g/cm^3.

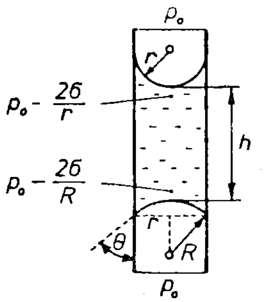


Zaradi površinske napetosti se gladina živega srebra v ožji kapilari s polmerom R_1 zniža za $h_1 = 2\sigma|\cos\theta|/(\varrho g R_1)$, v širši s polmerom R_2 pa za $h_2 = 2\sigma|\cos\theta|/(\varrho g R_2)$. Gladini se torej razlikujeta za:

$$h = h_1 - h_2 = (2\sigma|\cos\theta|/\varrho g)(1/R_1 - 1/R_2) = 7{,}3\ \text{mm}$$

17.47. V vodoravno položeni kapilari s polmerom $r = 0{,}5$ mm je stolpec vode z dolžino $h = 2$cm; mejni kot močenja obeh gladin je nič. Kapilaro postavimo pokonci. Kolik je krivinski radij in kolik je mejni kot močenja ob spodnji gladini? Površinska napetost vode je $\sigma = 0{,}07$ N/m.

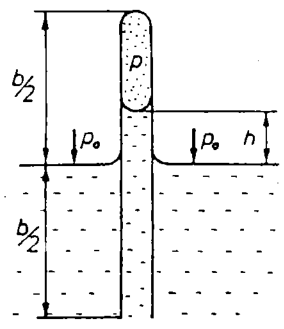




Pri vodoravno položeni kapilari imata gladini enaka krivinska polmera r. Ko kapilaro dvignemo, se ukrivljenost spodnje gladine zmanjša, krivinski radij se poveča z r na R, tako da se pojavi razlika površinskih tlakov $\Delta p = (p_0 - 2\sigma/R) - (p_0 - 2\sigma/r) = 2\sigma(1/r - 1/R)$, ki vzdržuje ravnovesje tlaku na spodnjo gladino zaradi teže stolpca: $\Delta p = \varrho gh$.

$1/R = 1/r - \varrho gh/2\sigma$ ali $R = 1{,}7$ mm
$r = R\cos\theta$, $\cos\theta = r/R$ ter $\theta = 73^0$

17.48. Kapilaro z dolžino $b = 20$ cm in polmerom $r = 0{,}5$ mm, ki je na enem koncu zataljena, potopimo do polovice v vodo. Za koliko (h) se razlikujeta gladini v kapilari in okolici? Zunanji zračni tlak je $p_0 = 1$ bar, površinska napetost vode je $\sigma = 0{,}07$ N/m. Predpostavimo, da voda povsem omoči steno kapilare.



Zrak v kapilari se stisne od prvotne prostornine bS (S = presek kapilare)

in od prvotnega tlaka p_0 do prostornine $S(b/2 - h)$ in tlak p. Ker se temperatura ne spremeni, velja: $p_0Sb = pS(b/2 - h)$ ali:

$$p = 2p_0b/(b - 2h)$$

Tlak p_0 na višini gladine okolišne vode lahko izrazimo tudi takole:

$p_0 = p - 2\sigma/r + \varrho gh$ ali
$p = p_0 + 2\sigma/r - \varrho gh$

Primerjajoč izraza za p, dobimo kvadratno enačbo za h:

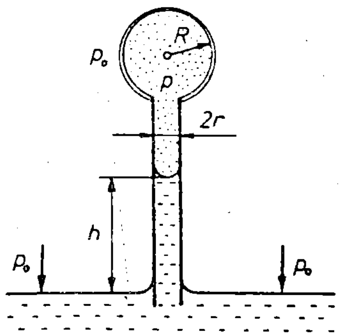
$h^2 - (\varrho gb + 4\sigma/r + 2p_0)h/(2\varrho g) - (bp_0 - 2b\sigma/r)/(2\varrho g) = 0$ ali
$h^2 - Bh - C = 0$

kjer je $B = 10{,}32$ m in $C = 1{,}016$ m^2. Rešitvi te enačbe sta $h_1 = 10{,}42$ m in $h_2 = -9{,}8$ cm. Prva seveda odpade, saj je $h > b$ (kar fizikalno ni možno). Gladina vode v kapilari je 9,8 cm pod gladino okolišne vode.

17.49. Kapilaro z notranjim polmerom $r = 0{,}1$ mm postavimo pokonci v vodo. Na prostem koncu kapilare je mehurček iz glicerina s polmerom $R = 2$ mm. Kako visoko (h) se dvigne voda v kapilari, če povsem omoči njeno steno? Površinska napetost vode je $\sigma_1 = 0{,}073$ N/m, glicerina pa $\sigma_2 = 0{,}060$ N/m.

Zrak v kapilari ima tlak $p = p_0 + 4\sigma_2/R$, pri čemer je p_0 zunanji zračni tlak. Tlak na dnu kapilare, na višini okolišne vode, je:

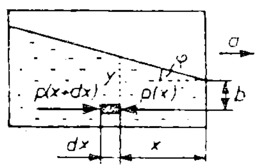
$p_0 = p - 2\sigma_1/r + \varrho gh = p_0 + 4\sigma_2/R - 2\sigma_1/r + \varrho gh$ ali
$h = 2(\sigma_1/r - 2\sigma_2/R)/(\varrho g) = 13{,}7$ cm



18. GIBANJE TEKOČIN

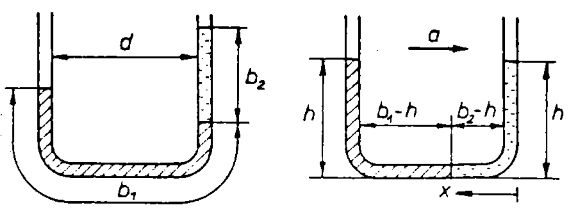
18.1. Akvarij z vodo začnemo pospešeno potiskati v vodoravni smeri s stalnim pospeškom a. Kolik je naklonski kot (φ) gladine vode glede na vodoravno smer?

To nalogo smo že obravnavali (gl. 5.35.). Tokrat jo rešimo drugače.
Izberemo element tekočine z dolžino dx v smeri pospeška in s prečnim presekom S, na razdalji x od sprednje strani posode in na globini b pod gladino ob sprednji strani. Nanj pritiska tekočina od spredaj s tlakom $p(x) = \varrho g(b + x\,\mathrm{tg}\varphi)$, z leve strani pa ga potiska tekočina s tlakom $p(x + dx) = p(x) + \varrho g(\mathrm{tg}\varphi dx)$. Rezultanta obeh nasprotujočih si tekočinskih pritiskov: $S[p(x + dx) - p(x)]$
daje tekočinskemu elementu z maso $dm = \varrho S dx$
pospešek a:



$S[p(x + dx) - p(x)] = a dm$ ali
$S\varrho g\,\mathrm{tg}\varphi\, dx = a\varrho S dx$
$a = g\,\mathrm{tg}\varphi$ ali
$\mathrm{tg}\varphi = a/g$

18.2. V levi krak U-cevi natočimo živo srebro, v desnega pa vodo. Dolžina živosrebrnega stolpca je $b_1 = 10$ cm, vodnega pa $b_2 = 8$ cm; razdalja med krakoma cevi je $d = 2$ cm. Cev začnemo pospešeno pomikati v desno. Pri katerem pospešku (a) sta gladini v obeh krakih enako visoko? Gostota živega srebra je $\varrho_1 = 13{,}6$ g/cm^3, gostota vode je $\varrho_2 = 1$ g/cm^3.



V spodnjem delu mirujoče cevi se tlak ne spreminja v vodoravni smeri. Brž ko cev pospešeno potiskamo v desno, se tlak v levi smeri povečuje, saj je potrebna tlačna razlika za pomikanje tekočine v desno. Na mestu $x = 0$ (v vznožju desnega kraka, kjer je voda) je tlak enak $\varrho_2 gh$ (zunanjega tlaka ne upoštevamo, ker sta oba kraka cevi

odprta). Če se pomaknemo v levo za dx, se tlak poveča za dp, tako da je $S dp = dma = S dx \varrho_2 a$ ali $dp = a\varrho_2 dx$. Tlak na stiku vode in živega srebra (kjer je $x = b_2 - h$) označimo s p_0 in znaša:

$$p_0 = \varrho_2 gh + \varrho_2 a(b_2 - h)$$

Levo od tega mesta je v cevi živo srebro z gostoto ϱ_1. V vznožju levega kraka ($x = d$) je tlak največji (p_1):

$$p_1 = \varrho_1 gh = p_0 + \varrho_1 a(d - b_2 + h)$$

Ker velja še: $d = b_1 + b_2 - 2h$, dobimo:

$$a = (\varrho_1 - \varrho_2)(b_1 + b_2 - d)g/[\varrho_1(d + b_1 - b_2) + \varrho_2(d + b_2 - b_1)]$$
$$a = 36 \text{ m/s}^2$$

18.3. Pokončna posoda je do višine $h = 1$ m napolnjena z vodo. Kolik je tlak na dnu posode (p), če se posoda giblje navzgor s pospeškom $a = 5$ m/s^2?

Vodo potiska navzgor sila N, s katero pritiska dno posode:

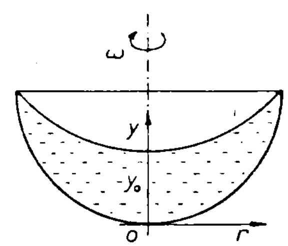
$N - mg = ma$
$N = m(g + a) = S\varrho h(g + a)$, S = prečni presek posode

Sila N je tudi enaka sili, s katero voda pritiska navzdol na dno. Tlak vode torej znaša:

$p = N/S = \varrho h(g + a) = 0{,}15$ bar

18.4. Odprta polkroglasta posoda s polmerom $R = 10$ cm je polna vode. Posoda se začne vrteti okrog navpične simetrijske osi. Pri kateri kotni hitrosti (ω_0) se gladina vode na osi zniža na polovico? Koliko vode (volumen V) izteče iz posode?
(Glej nalogo 6.9.)

$y = y_0 + \omega^2 r^2/2g$



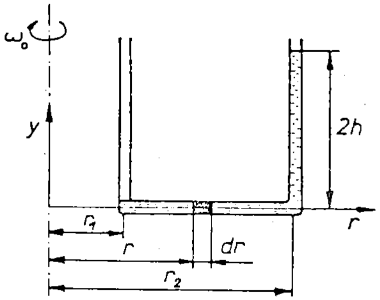
Konstanta y_0 je višina gladine na osi ($r = 0$); določimo jo s pogojem na robu posode: $y = R$ za $r = R$:

$R = y_0 + \omega^2 R^2/2g$
$y_0 = R - \omega^2 R^2/2g$
$y = R - \omega^2(R^2 - r^2)/2g$
$\omega = \omega_0$ za $y_0 = R/2 = R - \omega_0^2 R^2/2g$ ali
$\omega_0^2 = g/R$, $\omega_0 = 9{,}9$ /s
$y = R - \omega_0^2(R^2 - r^2)/2g = R - (R^2 - r^2)/2R = (R^2 + r^2)/2R$

Prostornina iztekle vode je:

$$V = \int_0^R (R - y)2\pi r dr = (\pi/R)\int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$
$$V = \pi R^3/4 = 785 \text{ cm}^3$$

18.5. Tanka U-cev z odprtima krakoma je do višine $h = 20$ cm napolnjena z živim srebrom. S kolikšno kotno hitrostjo (ω_0) se mora cev vrteti okrog navpične osi, ki je vzporedna z levim krakom in od njega oddaljena za $r_1 = h/2$, da se gladina živega srebra v levem kraku spusti do dna cevi? Presek cevi je enakomeren. Desni krak je od osi oddaljen za $r_2 = 2h$.
Nalogo rešimo na dva načina.



a) Pri nalogi 6.9 smo izračunali obliko gladine rotirajoče tekočine: $y = y_0 + \omega^2 r^2/2g$. Konstanta y_0 je odvisna od višine gladin v obeh krakih cevi: $y(r_1) + y(r_2) = 2h = 2y_0 + \omega^2(r_1^2 + r_2^2)/2g$ ali

$$y_0 = h - \omega^2(r_1^2 + r_2^2)/4g = h - 17h^2\omega^2/16g$$

Za $\omega = \omega_0$ je $y(r_1) = 0 = y_0 + \omega_0^2 r_1^2/2g$ ali

$$\omega_0^2 = 4gh/(r_2^2 - r_1^2) = 16g/15h$$
$$\omega_0 = 7{,}2\ /\mathrm{s}$$

b) V dnu cevi si mislimo element tekočine s presekom S in dolžino $\mathrm{d}r$, ki je na razdalji r od osi. Nanj učinkuje v radialni smeri sila $F(r + \mathrm{d}r) - F(r) = \mathrm{d}F$ in mu vsiljuje radialni pospešek $r\omega^2$:

$$\mathrm{d}F = r\omega^2 \mathrm{d}m = r\omega^2 S\varrho \mathrm{d}r$$

Po integraciji dobimo:

$$F = konst. + \varrho S\omega^2 r^2/2$$

Integracijsko konstanto določimo z robnim pogojem: pri $\omega = \omega_0$ v levem kraku ni tekočine, torej je $F(r_1) = 0 = konst. + \varrho S\omega_0^2 r_1^2/2$.

$$F = \varrho S\omega_0^2(r^2 - r_1^2)/2$$

V dnu desnega kraka je tlak enak $\varrho g \cdot 2h$, torej je:

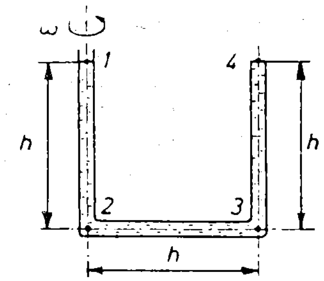
$$F(r_2) = S\varrho g 2h = \varrho S\omega_0^2(r_2^2 - r_1^2)/2 \quad \text{ali}$$
$$\omega_0^2 = 4hg/(r_2^2 - r_1^2)\ , \quad \text{enako kot zgoraj.}$$

18.6. U-cev ima en krak zaprt in je napolnjena z živim srebrom; višina kraka je $h = 20$ cm. Cev vrtimo okrog odprtega kraka s stalno kotno hitrostjo $\omega = 5$ /s. Kolikšni so tlaki v točkah 1, 2, 3 in 4, če sega živo srebro v odprtem kraku enako visoko kot v zaprtem? Zunanji zračni tlak je $p_0 = 1$ bar, gostota živega srebra je $\varrho = 13.6$ g/cm^3.

$$p_1 = p_0 = 1\ \text{bar}$$
$$p_2 = p_0 + \varrho gh = 1{,}27\ \text{bar}$$

Če bi bil zunanji krak odprt, bi živo srebro v njem segalo do višine $h_1 = \omega^2 h^2/2g$ (glej nalogo 6.9.). Ker je krak zaprt, je v točki 4 tlak $p_4 = p_0 + \varrho g h_1 = p_0 + \varrho\omega^2 h^2/2 = 1{,}07$ bar

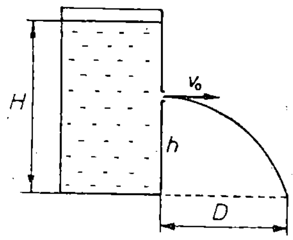
$$p_3 = p_4 + \varrho gh = 1{,}34\ \text{bar}$$



18.7. Zgoraj odprta pokončna valjasta posoda je do višine H napolnjena z vodo. Na kateri višini (h) od dna moramo v steni izvrtati luknjico, da je domet iztekajočega curka na vodoravnih tleh največji?

Voda izteka s hitrostjo $v_0 = [2g(H - h)]^{1/2}$. Domet pri vodoravnem metu z višine h je:

$$D = v_0(2h/g)^{1/2} \quad \text{ali}$$
$$D^2 = 4h(H - h)$$



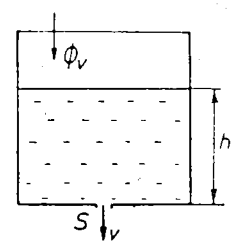
Največji domet dobimo pri višini h, ki zadošča enačbi $\mathrm{d}D^2/\mathrm{d}h = 0$ ali $H - h - h = 0$:

$$h = H/2$$

18.8. V sredini dna posode, ki je do višine $h = 30$ cm napolnjena z vodo, izvrtamo luknjico. S kolikšno hitrostjo (v) izteka voda skozi luknjico, če posoda: a) miruje, b) se giblje s pospeškom $a = 2$ m/s^2 navzgor oziroma navzdol, c) se dviguje enakomerno in č) se giblje s pospeškom a v vodoravni smeri?

V primerih a) in c) je $v = (2gh)^{1/2} = 2{,}4$ m/s. Enak rezultat dobimo tudi za primer č), če se gladina vode nad luknjico zaradi vodoravnega pospeška ne spremeni. V primeru b) je $v = [2h(g \pm a)]^{1/2} = 2{,}7$ m/s ali 2,2 m/s.

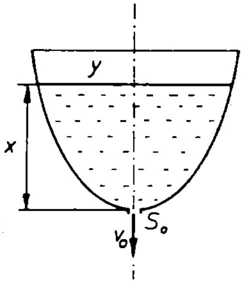
18.9. Voda doteka s stalnim volumenskim tokom $\Phi_V = 150$ cm^3/s v sod, ki ima v dnu luknjico s presekom $S = 0{,}5$ cm^2. Pri kateri višini (h) se gladina vode v sodu ne spreminja s časom?



$$\Phi_V = vS = S(2gh)^{1/2}$$
$$h = \Phi_V^2/(2gS^2) = 46\ \text{cm}$$

18.10. Odprta rotacijsko simetrična posoda je napolnjena z vodo. V dnu ima luknjico s presekom S_0, skozi katero voda izteka iz posode. Kakšna mora biti oblika plašča posode, da se gladina vode zaradi iztekanja enakomerno znižuje?

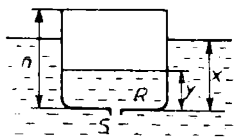
V trenutku t je gladina vode na višini x nad dnom, njen polmer pa je y. Voda izteka s hitrostjo v_0 in gladina se spušča s hitrostjo $v = v_0S_0/(\pi y^2)$. Hitrosti v in v_0 sta povezani tudi z Bernoullijevo enačbo za navpično pretakanje:



$\varrho v^2/2 + \varrho gx = \varrho v_0^2/2$ ali
$v_0^2 = v^2 + 2gx$ ali
$(\pi y^2/S_0)^2 = 1 + 2gx/v^2$
$y^2 = (S_0/\pi)(1 + 2gx/v^2)^{1/2}$

18.11. Valjast lonec z maso m = 2 kg, polmerom R = 8 cm in višino h = 16 cm previdno položimo v vodo. Ko se lonec umiri, odpremo v sredini dna luknjico s presekom S = 3 mm², skozi katero voda priteka v lonec. Po kolikšnem času (t_1) se lonec potopi toliko, da začne voda pritekati vanj prek zgornjega roba?

V začetku (t = 0) je dno lonca v globini $x_0 = m/(\varrho\pi R^2)$ = 10 cm (ϱ = gostota vode). V trenutku t je voda v loncu do višine y, dno pa je v globini x pod zunanjo gladino. Tedaj deluje na lonec vzgon $\varrho g(x-y)\pi R^2$, ki je približno enak (če zanemarimo pospešek spuščanja lonca in upor vode) teži lonca mg. Dobimo: $m = \varrho(x-y)\pi R^2$ ali



$x = y + m/(\varrho\pi R^2) = y + x_0$

V naslednjem kratkem časovnem intervalu dt priteče v lonec $dV = vSdt = Sdt[2g(x-y)]^{1/2}$ vode, ki poveča gladino vode v loncu za dy:

$\pi R^2 dy = Sdt[2g(x-y)]^{1/2} = Sdt(2mg/\varrho\pi R^2)^{1/2}$
(lonec ima tanke stene, tako da sta zunanji in notranji polmer praktično enaka).

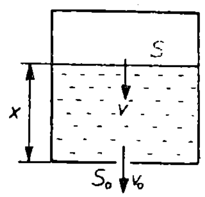
$y = t(S/\pi R^3)(2mg/\pi\varrho)^{1/2}$

Voda začenja pritekati v lonec prek roba, ko je $y + x_0 = x = h$ ali ko je $y = h - x_0$, kar se zgodi za $t = t_1$:

$t_1 = (h - x_0)(\pi R^3/S)(\pi\varrho/2mg)^{1/2}$ = 4,8 min

18.12. Pokončna posoda z višino h = 70 cm in prečnim presekom S = 600 cm² je napolnjena z vodo. V njenem dnu je odprtinica s presekom S = 1 cm². V kolikšnem času (t_1) se gladina zniža na h_1 = 20 cm?

V trenutku t je gladina vode na višini x, voda izteka s hitrostjo v_0, gladina vode pa se spušča s hitrostjo v. Velja:



$v^2 = v_0^2 - 2gx$ ter
$vS = v_0S_0$

Iz obeh enačb izločimo v_0 in izračunamo: $v^2 = 2gx/(S^2/S_0^2 - 1)$.

$v = -dx/dt$ (negativen predznak zato, ker se x znižuje)
$dx = -vdt$
$x^{-1/2}dx = -[2g/(S^2/S_0^2 - 1)]^{1/2}dt$

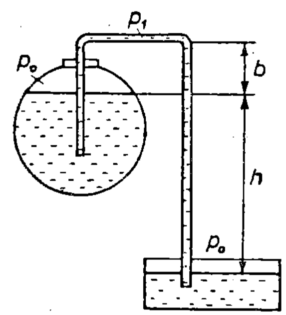
Po integraciji, upoštevajoč začetni pogoj: $x = h$ za t = 0, dobimo:

$x^{1/2} = h^{1/2} - (t/2)[2g/(S^2/S_0^2 - 1)]^{1/2}$
$t_1 = 2(h^{1/2} - h_1^{1/2})[(S^2/S_0^2 - 1)/2g]^{1/2}$

Ker je v našem primeru $S \gg S_0$, lahko zgornji rezultat poenostavimo:

$t_1 = (S/S_0)(h^{1/2} - h_1^{1/2})(2/g)^{1/2}$ = 106 s

18.13. Bencin iz cisterne se pretaka po cevi s polmerom R = 3 cm v rezervoar, katerega gladina je za h = 6 m nižje od gladine v cisterni. Najvišje mesto cevi (natege) je za b = 1 m nad gladino v cisterni. Kolikšen je volumenski pretok Φ_v pretakanja? Kolik je tlak (p_1) v najvišji točki natege? Zunanji zračni tlak je p_0 = 10 N/cm², gostota bencina je ϱ = 0,7 g/cm³.



Bencin priteka v rezervoar s hitrostjo $v = (2gh)^{1/2}$ = 11 m/s. Ker je pretok stacionaren, je ta hitrost praktično enaka v vsakem delu cevi in velja:
$\Phi_v = v\pi R^2$ = 31 litrov/s.
Tlak p_1 v zgornjem delu cevi, kjer bencin teče s hitrostjo v, se primerja s tlakom p_0 ob ustju cevi, kjer bencin izteka s hitrostjo v, po Bernoullijevi enačbi: $p_1 + \varrho v^2/2 + \varrho g(b + h) = p_0 + \varrho v^2/2$ ali

$p_1 = p_0 - \varrho g(h + b)$ = 0,31 bar

Pri $b + h >$ 10,2 m bi bil $p_1 < 0$ in natega ne bi »vlekla«.

18.14. Voda teče s stalno hitrostjo v_1 = 6 m/s po cevi s polmerom R_1 = 10 cm. Cev se razcepi v dve cevi. Prva ima polmer R_2 = 6 cm, voda v njej teče s hitrostjo v_2 = 8 m/s. Kolikšen je polmer (R_3) druge cevi, če je hitrost vode v njej v_3 = 10 m/s?

$S_1v_1 = S_2v_2 + S_3v_3$ ali $R_1^2v_1 = R_2^2v_2 + R_3^2v_3$
$R_3 = (R_1^2v_1/v_3 - R_2^2v_2/v_3)^{1/2}$ = 5,6 cm

18.15. Nestisljiva tekočina se pretaka stacionarno s hitrostjo v = 2 m/s po cevi s polmerom R = 5 cm. Cev se razdeli v tri manjše cevi. Skozi vsako od njih teče tretjina prvotnega pretoka. Kolikšni so polmeri (R_1, R_2, R_3) teh cevi, če se tekočina v njih pretaka s hitrostmi v_1 = 8 m/s, v_2 = 10 m/s in v_3 = 12 m/s?

$\Phi = v\pi R^2 = 0{,}016\ \mathrm{m^3/s} = 3\Phi_1$
$\Phi_1 = v_1\pi R_1^2 = v_2\pi R_2^2 = v_3\pi R_3^2$
$R_1 = R(v/3v_1)^{1/2} = 1{,}4\ \mathrm{cm}$
$R_2 = R(v/3v_2)^{1/2} = 1{,}3\ \mathrm{cm}$
$R_3 = R(v/3v_3)^{1/2} = 1{,}2\ \mathrm{cm}$

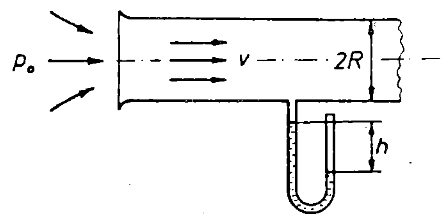
18.16. Voda teče po cevi s polmerom $R = 4$ cm s hitrostjo $v_0 = 1$ m/s. Zaradi kotlovca se debelina cevi enakomerno povečuje s časom; v času $t_1 = 30$ dni se poveča za $h = 1$ mm. Kako se hitrost vode spreminja s časom, če je pretok vode stalen? Kolikšna je hitrost (v_2) po času $t_2 = 8$ mesecev?

$\Phi_v = v_0\pi R^2 = v\pi(R - ht/t_1)^2$ ali
$v = v_0(1 - ht/t_1R)^{-2}$
$v_2 = v_0(1 - ht_2/t_1R)^{-2} = 1{,}56\ \mathrm{m/s}$

18.17. Ventilator sesa zrak skozi cev s polmerom $R = 25$ cm. Kolik je masni pretok (Φ_m) zračnega toka, če priključeni vodni manometer pokaže višinsko razliko $h = 12$ cm? Zunanji zračni tlak je $p_0 = 1$ bar, gostota zraka je $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$, gostota vode je $\varrho_0 = 1\ \mathrm{g/cm^3}$.

$\Phi_m = \varrho\Phi_v = \varrho v\pi R^2$

Hitrost v pretakanja določimo z Bernoullijevo enačbo za vodoravno pretakanje. p_0 je tlak mirujočega zraka daleč proč od cevi:



$p_0 = p + \varrho v^2/2 =$
$= (p_0 - \varrho_0 gh) + \varrho v^2/2$
$v = (2\varrho_0 gh/\varrho)^{1/2} = 44\ \mathrm{m/s}$
$\Phi_m = 10{,}4\ \mathrm{kg/s}$

18.18. Kolik je pretok (Φ_v) zraka skozi Venturijevo cev, če priključeni vodni manometer kaže višinsko razliko $h = 10$ cm? Premer širšega dela cevi je $2R_1 = 1$ cm, premer ožjega dela pa $2R_2 = 0{,}5$ cm. Gostota zraka je $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$, gostota vode je $\varrho_v = 1\ \mathrm{g/cm^3}$.

$\Phi_v = v_1\pi R_1^2 = v_2\pi R_2^2$
$p_1 + \varrho v_1^2/2 = p_2 + \varrho v_2^2/2$
$\Delta p = p_1 - p_2 = (\varrho/2)(v_2^2 - v_1^2) = (R_1^4/R_2^4 - 1)v_1^2\varrho/2 = \varrho_v gh$
$v_1 = [2\varrho_v gh/\varrho(R_1^4/R_2^4 - 1)]^{1/2} = 10{,}4\ \mathrm{m/s}$
$\Phi_v = 0{,}82\ \mathrm{dm^3/s} = 3{,}0\ \mathrm{m^3/h}$

18.19. Določi volumenski pretok (Φ_v) viskozne tekočine v vodoravni valjasti cevi s polmerom $R = 2$ cm, če je gibanje tekočine laminarno in stacionarno ter če je hitrost na razdalji $r = 1$ cm od osi enaka $v_1 = 0{,}3$ m/s.
(Glej Visokošolska fizika, str. 168).

$\Phi_v = \pi R^4\Delta p/(8\eta L)$.

Δp je tlačna razlika na razdalji L v smeri toka. Gradient tlaka ($\Delta p/L$), ki poganja tekočino po cevi, določimo iz profila hitrosti v prečnem prerezu cevi: $v(r) = (\Delta p/L)(R^2 - r^2)/(4\eta)$. Za $r = r_1$ je $v = v_1$:

$\Delta p/L = 4\eta v_1/(R^2 - r_1^2)$
$\Phi_v = (\pi R^4/8\eta)4\eta v_1/(R^2 - r_1^2)$
$\Phi_v = \pi R^4 v_1/[2(R^2 - r_1^2)] = 0{,}25\ \mathrm{dm^3}$

18.20. Velik rezervoar ima dno z debelino $b = 20$ cm. V njem izvrtamo luknjico s polmerom $R = 1$ mm. Koliko vode (volumen V) steče skozi njo v času $t = 1$ min, če je gladina vode v rezervoarju na višini $h = 5$ m? Viskoznost vode je $\eta = 0{,}001$ kg/ms.

Vodo potiska skozi luknjico stalna tlačna razlika $\Delta p = \varrho gh$.

$\Phi_v = \pi R^4\Delta p/(8\eta b) = \pi R^4\varrho gh/(8\eta b) = V/t$
$V = \pi R^4\varrho ght/(8\eta b) = 5{,}8\ \mathrm{dm^3}$

18.21. Kolikšna moč (P) je potrebna za pretakanje vode s tlačno razliko $\Delta p = 3$ bar po vodoravni valjasti cevi z dolžino $L = 1$ km in notranjim polmerom $R = 2{,}5$ cm? Viskoznost vode je $\eta = 0{,}001$ kg/ms.

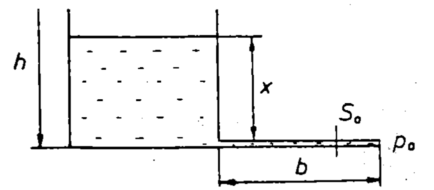
$\Phi_v = V/t = \pi R^4\Delta p/(8\eta L) = 46\ \mathrm{dm^3/s}$
$P = A/t = \Delta pV/t = \Delta p\Phi_v = 14\ \mathrm{kW}$

18.22. Posoda z višino $h = 20$ cm in presekom $S = 20\ \mathrm{cm^2}$ je polna vode. Z dna posode vodi tanka vodoravna cevka z dolžino $b = 10$ cm in presekom $S_0 = 5\ \mathrm{mm^2}$, skozi katero voda izteka. V kolikšnem času (t_1) se posoda izprazni do polovice? Viskoznost vode je $\eta = 10^{-3}\ \mathrm{Ns/m^2}$.

V trenutku t je gladina vode na višini x. Ker se znižuje počasi, vlada na obeh koncih cevke tlačna razlika $\Delta p = p - p_0 = \varrho gx$, in dobimo:

$\Phi_v = \pi R^4\Delta p/(8\eta b) =$
$= S_0^2\Delta p/(8\pi\eta b) =$
$= S_0^2\varrho gx/(8\pi\eta b)$

Zaradi pretoka Φ_v se višina gladine (x) zmanjšuje s časom; v dt se zmanjša za dx:



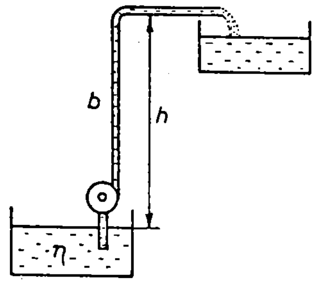
$\Phi_v = dV/dt = -S\,dx/dt$ ali
$dx/x = -(S_0^2\varrho g/8\pi\eta bS)dt$
$\ln x = konst. - (S_0^2\varrho g/8\pi\eta bS)t$

Začetni pogoj zahteva $x = h$ za $t = 0$ in je zato $konst. = \ln h$. Po antilogaritmiranju dobimo:

$x = h \exp[-(S_0^2\varrho g/8\pi\eta bS)t]$
$x = h/2$ za $t = t_1 = 8\pi\ln 2\eta bS/(S_0^2\varrho g) = 14\ \mathrm{s}$

18.23. Po navpični cevi z dolžino $b = 25$ m in notranjim polmerom $R = 0{,}5$ cm črpamo olje v rezervoar, ki je za $h = 20$ m više. Najmanj kolikšna moč (P) je potrebna za pretok $\Phi_v = 25\ \mathrm{dm^3/min}$? Viskoznost olja je $\eta = 1$ kg/ms, gostota je $\varrho = 0{,}91\ \mathrm{g/cm^3}$.

Moč P črpalke je sestavljena iz moči P_1 za dviganje olja in iz moči P_2 za potiskanje skozi cev: $P = P_1 + P_2$.

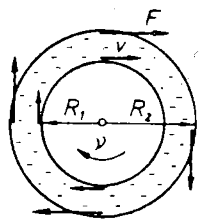


$P_1 = A/t = mgh/t = \Phi_m gh = \varrho gh\Phi_v = 74$ W
$P_2 = \Delta p\Phi_v$, kjer je Δp tlačna razlika, potrebna za potiskanje volumenskega pretoka Φ_v viskoznega olja po cevi:

$\Delta p = 8\eta b\Phi_v/(\pi R^4)$
$P_2 = 8\eta b\Phi_v^2/(\pi R^4) = 17{,}7$ kW
$P = P_1 + P_2 = 0{,}1\ \mathrm{kW} + 17{,}7\ \mathrm{kW} = 17{,}8$ kW

18.24. Prostor med koaksialnima valjema je napolnjen z oljem (viskoznost $\eta = 10\ \mathrm{Ns/m^2}$). Kolik navor ($M$) učinkuje na zunanji mirujoči valj, če se notranji valj vrti s frekvenco $\nu = 3/\mathrm{s}$? Polmer notranjega valja je $R_1 = 8{,}0$ cm, zunanjega $R_2 = 8{,}2$ cm, dolžina valjev pa je $h = 20$ cm.

Obod notranjega valja in plast olja tik ob njem se vrtita s hitrostjo (obodno) $v = R_1\omega = 2\pi R_1\nu$. Vrteča se plast olja vleče zunanji mirujoči valj s tangentno silo $F = \eta 2\pi R_2 hv/(R_2 - R_1) = 4\pi^2\nu\eta R_1 R_2 h/(R_2 - R_1)$. Navor te sile je:



$M = FR_2 = 4\pi^2\nu\eta R_1 R_2^2 h/(R_2 - R_1) = 64$ Nm

18.25. Vztrajnik z vztrajnostnim momentom $J = 10\ \mathrm{kgm^2}$ je nasajen na gred s polmerom $R_0 = 3$ cm. Ta leži v dveh drsnih ležajih z dolžino $b = 6$ cm in notranjim polmerom $R_1 = 3{,}1$ cm, v katerih je olje z viskoznostjo $\eta = 10$ kg/ms. Koliko moči (P) se troši v ležajih, če se vztrajnik vrti s kotno hitrostjo $\omega_0 = 50/\mathrm{s}$? V kolikšnem času (t_1) od trenutka, ko prenehamo poganjati, se frekvenca vrtenja zmanjša na polovico? (Glej prejšnjo nalogo)

Viskozno olje v obeh ležajih zavira vrtenje gredi z navorom $M = 4\pi R_0 R_1^2 b\eta\omega/(R_1 - R_0) = K\omega$, kjer je $K = 4\pi\eta R_0 R_1^2 b/(R_1 - R_0) = 0{,}22$ Nms. Če naj se vztrajnik vrti s stalno kotno hitrostjo ω_0, moramo premagovati navor $M_0 = K\omega_0$, za kar je potrebna moč $P = M_0\omega_0 = 0{,}54$ kW. Ko prenehamo poganjati, se vztrajnik vrti pojemajoče s kotnim pojemkom $\alpha = M/J = K\omega/J = -\,d\omega/dt$ ali

$d\omega/\omega = -\,(K/J)dt$

Upoštevajoč začetni pogoj $\omega = \omega_0$ za $t = 0$, dobimo po integraciji:

$t = (J/K)\ln(\omega_0/\omega)$ oziroma
$t_1 = (J/K)\ln 2 = 32$ s

18.26. Valj s polmerom $R_2 = 4{,}8$ cm spustimo v dolgo pokončno cev z notranjim polmerom $R_1 = 5{,}0$ cm, v kateri je olje. Čez nekaj časa pada valj v cevi enakomerno s hitrostjo $v = 5$ cm/s. Kolikšna je viskoznost olja? Gostota olja je $\varrho_0 = 0{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$, valja pa $\varrho = 5{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$.
Teži valja ($\pi R_2^2 h\varrho g$, h = višina valja) nasprotujeta vzgon ($\pi R_2^2 h\varrho_0 g$) in viskozna sila $2\pi R_2 h\eta v/(R_1 - R_2)$. Med enakomernim padanjem je rezultanta teh sil nič:

$\pi R_2^2 hg(\varrho - \varrho_0) = 2\pi\eta R_2 hv/(R_1 - R_2)$ ali
$\eta = R_2 g(\varrho - \varrho_0)(R_1 - R_2)/2v = 47\ \mathrm{Ns/m^2}$

18.27. V viskozno tekočino z gostoto ϱ spustimo kroglico s polmerom R in gostoto ϱ_1. Kako se hitrost (v) padanja kroglice spreminja s časom, če velja linearni zakon upora in če je začetna hitrost nič?

Teža – vzgon – viskozni upor = masa x *pospešek*
$(4\pi R^3/3)(\varrho_1 - \varrho)g - 6\pi R\eta v = (4\pi R^3/3)\varrho_1 dv/dt$
$\varrho_1 dv/dt = (\varrho_1 - \varrho)g - (9\eta/2R^2)v$
$\varrho_1[(\varrho_1 - \varrho)g - (9\eta/2R^2)v]^{-1}dv = dt$

Začetni pogoj: $v = 0$ za $t = 0$. Dobimo:

$t = -(2R^2\varrho_1/9\eta)\ln\,[1 - 9\eta v/2R^2(\varrho_1 - \varrho)g]$ ali
$v = (2R^2 g/9\eta)(\varrho_1 - \varrho)[1 - \exp(-9\eta t/2R^2\varrho_1)]$

Takoj v začetku padanja, za $t \ll 2R^2\varrho_1/9\eta$, je padanje še enakomerno pospešeno (upor še ne učinkuje): $\exp(-9\eta t/2R^2\varrho_1) \approx 1 - 9\eta t/2R^2\varrho_1$ in $v \approx (2R^2 g/9\eta)(\varrho_1 - \varrho)9\eta t/2R^2\varrho_1 = tg(\varrho_1 - \varrho)/\varrho_1 = at$, kjer je $a = g(1 - \varrho/\varrho_1)$. Nato se pospešek padanja zmanjšuje k nič. Po dolgem času (za $t \gg 2R^2\varrho_1/9\eta$) je padanje enakomerno s stalno hitrostjo $v_0 = (2R^2 g/9\eta)(\varrho_1 - \varrho)$.

18.28. Riba plava proti rečnemu toku, ki teče s stalno hitrostjo $v_0 = 1{,}4$ m/s. Prečni presek ribe je $S = 25\ \mathrm{cm^2}$, koeficient upora je $c_u = 0{,}04$. Najmanj kolikšno moč (P) troši riba, če se glede na obalo giblje s hitrostjo $v = 1$ m/s proti rečnemu toku?

Riba se glede na rečni tok giblje z relativno hitrostjo $v_0 + v$, torej mora premagovati silo $F_u = c_u S\varrho(v + v_0)^2/2$ (glej Visokošolska fizika, I. del, str. 174).

$P = F(v + v_0) = c_u S\varrho(v + v_0)^3/2 = 0{,}7$ W

18.29. Betonski blok z maso $m = 1$ t drsi po morskem dnu, ki je nagnjeno za kot $\varphi = 45°$, drsni torni koeficient je $k_t = 0{,}4$. S kolikšno hitrostjo (v_0) drsi po dolgem času enakomerno, če je upor vode premo sorazmeren s hitrostjo: $F_u = -\,cv$, kjer je $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Ns/m? Vzgon zanemarimo.

$mg(\sin\varphi - k_t\cos\varphi) - cv = m\,dv/dt$ ali
$dv/(a_0 - vc/m) = dt$, $a_0 = g(\sin\varphi - k_t\cos\varphi) = 4{,}2\ \mathrm{m/s^2}$

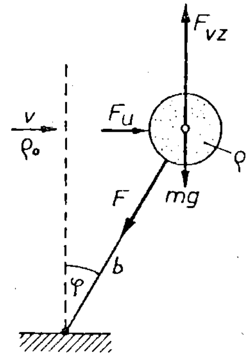
Začetni pogoj je: $v = 0$ za $t = 0$. Dobimo:

$t = -(m/c)\ln(1 - vc/ma_0)$ ali
$v = (ma_0/c)[1 - \exp(-ct/m)]$

Končna hitrost je $v_0 = ma_0/c = 1$ m/s.
Kaj se spremeni, če upoštevamo še vzgon?

18.30. Balon s polmerom $R = 1$ m je napolnjen s plinom (gostota $\varrho = 0{,}15$ kg/m^3) in privezan na vrvico, katere drugi konec je pritrjen na tla. Kolikšen kot (φ) oklepa vrvica z navpičnico, če piha veter v vodoravni smeri s hitrostjo $v = 36$ km/h? Koeficient upora je $c_u = 0{,}4$, gostota zraka je $\varrho_0 = 1{,}2$ kg/m^3.

Na balon učinkujejo sile: teža $(4\pi R^3/3)\varrho g$, upor vetra $F_u = c_u\pi R^2\varrho_0 v^2/2$, vzgon $F_{vz} = (4\pi R^3/3)\varrho_0 g$ ter sila vrvice (F). V ravnovesju, pri kotu φ, je njihova rezultanta nič. Sledi:



$F_u = F\sin\varphi$
$F\cos\varphi = F_{vz} - mg$ ali
$\mathrm{tg}\varphi = F_u/(F_{vz} - mg) = 3c_u\varrho_0 v^2/[8gR(\varrho_0 - \varrho)]$
, $\varphi = 60°$

18.31. Avtomobil na vodoravni cesti lahko pri moči $P_1 = 60$ kW motorja vozi s stalno hitrostjo $v_1 = 108$ km/h. Zaradi napake v motorju se moč zmanjša na $P_2 = 30$ kW, nova hitrost je $v_2 = 72$ km/h. Kolikšna je zaviralna sila (F_1) tal, ki je neodvisna od hitrosti? Upor zraka je premo sorazmeren s kvadratom hitrosti: $F_u = bv^2$. Kolikšen je parameter (b) upora?

$P_1 = (F_1 + bv_1^2)v_1$
$P_2 = (F_1 + bv_2^2)v_2$

Iz zgornjih enačb izračunamo:

$F_1 = (P_1v_2^2/v_1 - P_2v_1^2/v_2)/(v_2^2 - v_1^2) = 1{,}1$ kN
$b = (P_1/v_1 - P_2/v_2)/(v_1^2 - v_2^2) = 1{,}0$ Ns^2/m^2

18.32. Okrogel kamen s polmerom $R = 1$ cm in gostoto $\varrho = 2{,}7$ g/cm^3 pada v tekočini z gostoto $\varrho_0 = 1$ g/cm^3. S kolikšno stalno hitrostjo (v) pada? Koeficient upora za kroglo je $c_u = 0{,}4$. Viskoznost tekočine je $\eta = 10^{-3}$ Ns/m^2. Izračunaj Reynoldsovo število (Re).

Najprej predpostavimo, da velja linearni zakon upora: $F_u = 6\pi R\eta v$.

$mg = F_u + F_{vz}$ ali $(4\pi R^3/3)(\varrho - \varrho_0)g = 6\pi R\eta v$
$v = 2R^2g(\varrho - \varrho_0)/9\eta = 370$ m/s

Dobljeni rezultat je nesmiseln, saj kamen ne more padati hitreje od hitrosti zvoka. Torej velja kvadratni zakon upora: $F_u = c_u\pi R^2\varrho_0 v^2/2$.

$(4\pi R^3/3)(\varrho - \varrho_0)g = c_u\pi R^2\varrho_0 v^2/2$
$v^2 = 8Rg(\varrho - \varrho_0)/(3c_u\varrho_0)$, $v = 1{,}1$ m/s

Da zares lahko uporabimo kvadratni zakon upora, se prepričamo s pomočjo Reynoldsovega števila: $Re = 2Rv\varrho_0/\eta = 2{,}2 \cdot 10^4$ (glej Visokošolska fizika, I. del, str. 176).

18.33. Leseno kroglo z maso $m = 1$ kg porinemo po vodi tako, da se začne gibati z začetno hitrostjo $v_0 = 5$ m/s v vodoravni smeri. Kako se hitrost krogle spreminja s časom, če je upor premo sorazmeren s hitrostjo? Pri začetni hitrosti v_0 je upor enak $F_0 = 0{,}5$ N. V kolikšnem času (t_1) se hitrost zmanjša na polovico začetne vrednosti? Kolikšno pot (x_1) napravi v tem času? Na kolikšni oddaljenosti (x_0) se krogla umiri?

$m\,dv/dt = -kv$, $k = F_0/v_0 = 0{,}1$ Ns/m
$dv/v = -(k/m)dt$ ter po integraciji:
$\ln(v/v_0) = -kt/m$ ali
$v = v_0\exp(-kt/m)$

Pri $t = t_1$ je $v = v_0/2$:
$t_1 = (m/k)\ln 2 = 6{,}9$ s

$dx = v\,dt = v_0\exp(-kt/m)dt$

Zopet integriramo:

$x = (mv_0/k)[1 - \exp(-kt/m)]$
$x_1 = (mv_0/k)[1 - \exp(-kt_1/m)] = 25$ m

Krogla se umiri na razdalji $x_0 = x(t \to \infty) = mv_0/k = mv_0^2/F_0 = 50$ m.

18.34. Padalec z maso m je privezan na padalo s prečnim presekom S. Spusti se brez začetne hitrosti. Kako se njegova hitrost spreminja s časom, če velja kvadratni zakon upora zraka? Kolikšna je končna hitrost (v_0) enakomernega padanja?

$mg - c_uS\varrho v^2/2 = ma = m\,dv/dt$ ali
$(1 - c_uS\varrho v^2/2mg)^{-1}\,dv = g\,dt$

Vstavimo $\alpha^2 = 2mg/(c_u\varrho S)$ in dobimo enostavnejšo enačbo:

$(1 - v^2/\alpha^2)^{-1}dv = g\,dt$

Po integraciji, upoštevaje začetni pogoj: $v = 0$ za $t = 0$, dobimo:

$t = (\alpha/2g)\ln[(\alpha + v)/(\alpha - v)]$ ali
$v = \alpha[\exp(2gt/\alpha) - 1]/[\exp(2gt/\alpha) + 1] = \alpha\,\mathrm{th}(gt/\alpha)$

Takoj po odskoku, za $t \ll \alpha/g$, je $\mathrm{th}(gt/\alpha) \approx gt/\alpha$ in $v \approx gt$, kar pomeni, da padalec prosto pada (upor zraka zaradi majhne hitrosti še ne učinkuje zaznavno). Nato se pospešek padanja zmanjšuje k nič. Po dolgem času ($t \gg \alpha/g$) je $v \approx v_0 = \alpha =$ $= (2mg/c_u\varrho S)^{1/2}$.

19. TEMPERATURA

19.1. Kolikšna je povprečna translacijska kinetična energija kisikovih molekul pri temperaturi $T = 20$ °C? Kolikšna je povprečna hitrost ($\bar{v}$)?

$\overline{W} = (3/2)kT = 1{,}5 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\mathrm{JK}^{-1} \cdot 293\ \mathrm{K} = 6{,}1 \cdot 10^{-21}$ J
$\overline{W} = \mu v^2/2$, μ = masa molekule = Mu = 32 u , u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
$\bar{v} = (2\overline{W}/\mu)^{1/2} = 480$ m/s

19.2. Koliko (n) krat je povprečna kinetična translacijska kinetična energija kisikovih molekul pri temperaturi $T_1 = +\,200$ °C večja kot pri temperaturi $T_2 = -100$ °C?

$n = \overline{W}(T_1)/\overline{W}(T_2) = T_1/T_2 = 473/173 = 2{,}7$

19.3. Koliko molekul (N) vodika je v prostornini $V = 1$ cm^3 pri tlaku $p = 0{,}27$ bar? Povprečna hitrost vodikovih molekul je $\bar{v} = 2400$ m/s.

$pV = NkT$ (glej Visokošolska fizika I. del, str. 185)

Temperatura T je v zvezi s povprečno hitrostjo molekul: $(3/2)kT = \mu\bar{v}^2/2$ ali $kT = \mu v^2/3$ (μ = 2u)
$N = pV/kT = 3pV/(\mu\bar{v}^2) = 4{,}2 \cdot 10^{18}$

19.4. Vodo z maso $m = 1$ kg izparimo; dobimo paro pri temperaturi $T = 100$ °C in tlaku $p = 1$ bar. Zaradi odprtinice v steni posode uide nekaj pare in tlak se zmanjša za $\Delta p = 0{,}02$ bar. Približno koliko molekul uide iz posode? Relativna molekulska masa vode je $M = 18$. Predpostavljamo stalno temperaturo.

Prvotno število molekul vode v posodi: $N = m/(Mu) = 3{,}35 \cdot 10^{25}$.

$pV = NkT$, V = volumen posode

Ker se število molekul zmanjša (za ΔN), se tlak zmanjša za Δp, tako da je (ker je T stalen):

$(p - \Delta p)V = (N - \Delta N)kT$

Zgornji enačbi medsebojno delimo, da se volumen V krajša:

$(p - \Delta p)/p = (N - \Delta N)/N$ ali
$\Delta N = N\,\Delta p/p = 6{,}7 \cdot 10^{23}$

19.5. V posodi s prostornino $V_1 = 5$ dm^3 je plin s tlakom $p_1 = 2$ bar in temperaturo $T = 27$ °C. Posodo prek cevke povežemo z drugo prazno posodo s prostornino $V_2 = 2$ dm^3. Ventil v cevki odpremo, da nekaj plina steče v prazno posodo. Koliko molekul plina (N_1) ostane v prvi posodi in koliko (N_2) se jih preseli v drugo posodo, ko se vzpostavi toplotno ravnovesje (enaka tlaka v obeh posodah)? Temperatura se ne spremeni.

N = celotno število molekul = $p_1V_1/kT = 2{,}4 \cdot 10^{23} = N_1 + N_2$
p = končni tlak v obeh posodah
$T = pV_2/N_2k = pV_1/N_1k$ ali
$N_1V_2 = N_2V_1 = (N - N_1)V_1$
$N_1 = NV_1/(V_1 + V_2) = 1{,}7 \cdot 10^{23}$
$N_2 = N - N_1 = 0{,}7 \cdot 10^{23}$

19.6. V jeklenki s prostornino $V = 10$ dm^3 je kisikov plin z maso $m = 200$ g. Kolik je tlak (p) tega plina pri temperaturi $T = 27$ °C? Predpostavljamo, da se kisik pokorava Van der Waalsovi enačbi stanja; konstanti sta: $A = aN_A^2 = 1{,}4 \cdot 10^5$ Jm^3 in $B = bN_A = 0{,}032$ m^3. Koliko (o) odstotkov napake napravimo, če uporabimo enačbo stanja idealnih plinov? Relativna molekulska masa kisika je $M = 32$.
(Glej Visokošolska fizika I. del, str. 186).

$(p + An^2/V^2)(V - Bn) = nRT$ ali
$p = nRT/(V - Bn) - An^2/V^2 = 1{,}53 \cdot 10^6$ N/m^2
n = število kmolov = m/Mkg = 0,00625

S pomočjo enačbe idealnih plinov pa dobimo tlak:

$p_0 = nRT/V = 1{,}56 \cdot 10^6$ N/m^2
$o = (p_0 - p)/p = 0{,}02 = 2\%$

19.7. V jeklenki s prostornino $V = 20$ dm^3 imamo $m = 2{,}4$ kg stisnjenega plina z relativno molekulsko maso $M = 30$. Tlak plina pri temperaturi $T = 15$ °C je $p = 90$ bar. Če povišamo temperaturo na $T_1 = 65$ °C, se tlak poveča na $p_1 = 110$ bar. Kolikšni sta Van der Waalsovi konstanti (A in B) tega plina?

$p + An^2/V^2 = nRT/(V - Bn)$
$n = m/M$kg = 0,08
$p_1 = nRT_1/(V - Bn) - An^2/V^2$

Enačbi za p in p_1 odštejemo drugo od druge, da člen s parametrom A izpade:

$p_1 - p = nR(T_1 - T)/(V - Bn)$ ali
$B = V/n - R(T_1 - T)/(p_1 - p) = 0{,}043$ m^3
$A = (V^2/n^2)(p_1T - pT_1)/(T_1 - T) = 1{,}6 \cdot 10^5$ Jm^3