Newtonov zakon dinamike $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ omogoča izračun pospeška, če so znane sile, učinkujoče na telo. Izračunani pospešek integriramo in dobimo hitrost ($\mathbf{v}$) telesa kot funkcijo časa. Račun se zaplete, če se sile spreminjajo s časom oziroma s krajem.

Kadar je znano, kako so sile odvisne od časa, olajšamo zgoraj omenjeni problem tako, da uporabimo **gibalno količino** ($\mathbf{G} = m\mathbf{v}$) in **sunek sile** (gl. 2.2–2.5). Zadnji je dan s produktom sile in časovnim intervalom njenega učinkovanja ter je enak spremembi gibalne količine telesa. Končna gibalna količina ($m\mathbf{v}_2$) je enaka vsoti začetne gibalne količine ($m\mathbf{v}_1$) in sunka sile, ki ga je telo med potjo prejelo. Tako lahko s pomočjo sunka sile ugotovimo končno hitrost $\mathbf{v}_2$, ne da bi morali računati, kolikšna je v vmesnih trenutkih.

Nekaj podobnega napravimo, če vemo, kako se sila spreminja s krajem. Tedaj silo integriramo po poti. Dobljeni produkt se imenuje **delo sile** (A) in je enak spremembi **kinetične energije telesa** ($W_k = mv^2/2$). Končna kinetična energija telesa ($W_{k2} = mv_2^2/2$) je vsota njegove začetne kinetične energije ($W_{k1} = mv_1^2/2$) in dela A, ki ga telo prejme spotoma (ki ga sile opravijo spotoma). Torej lahko tudi v tem primeru določimo končno hitrost telesa, ne da bi jo bilo treba poznati v vseh vmesnih trenutkih.

Zgornjo ugotovitev dokažemo tako, da Newtonov zakon dinamike $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ pomnožimo na levi in desni strani skalarno z vektorjem premika telesa $d\mathbf{s}$:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$$

Ker je $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ in $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$, lahko zapišemo:

$$m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = m(d\mathbf{v}/dt) \cdot d\mathbf{s} = m d\mathbf{v} \cdot (d\mathbf{s}/dt) = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \\ = m d(v^2)/2 = d(mv^2/2)$$

tako da dobimo:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = d(mv^2/2) \qquad (4.1)$$

Skalarni produkt sile $\mathbf{F}$ in premika $d\mathbf{s}$ njenega prijemališča je po definiciji **delo sile** na poti $d\mathbf{s}$ (označimo ga z dA), količina $mv^2/2$ pa je **kinetična energija telesa** z maso m pri hitrosti v:

$$W_k = mv^2/2 \qquad (4.2)$$

Vidimo, da je **delo sile enako spremembi kinetične energije telesa**:

$$dA = dW_k$$

Z delom in kinetično energijo smo se sicer že seznanili v srednji šoli, toda ti količini sta dovolj pomembni, da zaslužita ponovitev.

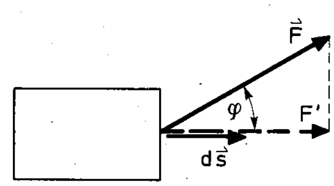
4. ENERGIJA

Delo sile in moč

Delo sile je po definiciji **skalarni produkt sile in premika njenega prijemališča.** Na kratki poti $d\mathbf{s}$ opravi sila $\mathbf{F}$ delo:

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos\varphi = F' ds \quad \text{(slika 4.1)} \qquad (4.3a)$$

kjer je F' projekcija sile **F** na smer premika, φ pa kót med smerjo sile in smerjo premika. **Delo je** torej **enako produktu premika in projekcije sile na smer premika.** Pravimo, da delo opravlja projekcija sile na smer premika.



Slika 4.1

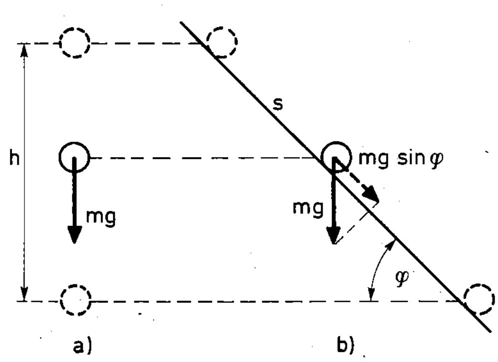
Sila, ki je pravokotna na smer premika, med tem premikom ne opravlja dela: $dA = 0$ za $\varphi = 90°$. Če sila kaže v smer premika ($\varphi < 90°$), je njeno delo pozitivno. Nasprotno: delo sile je negativno, če sila nasprotuje premiku ($\varphi > 90°$), če ima njena projekcija F' nasprotno smer kot premik.

Celotno delo A na daljši poti **s** je algebraična vsota (oziroma integral) diferencialnih del dA, opravljenih na posameznih kratkih odsekih **ds**:

$$A = \int dA = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad (4.3b)$$

Če je celoten premik **s** premočrten in sila **F** med potjo stalna, lahko izpostavimo **F** iz integrala in dobimo za delo preprost izraz:

$$\boxed{A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs\cos\varphi} \qquad (4.3c)$$



Slika 4.2

Sila opravi na dani poti največ dela, če je usmerjena v smer premika ($\varphi = 0°$, tedaj dela celotna sila):

$$A = Fs \quad \text{za } \varphi = 0°$$

Merske enote za delo: J (joule, izg. džul) = **Nm** = = kgm^2/s^2 (toliko dela opravi sila 1 N na poti 1 m, če kaže v smer premika); večji enoti sta kJ = 10^3J (kilodžul) ter MJ = 10^6J (megadžul). Stari enoti: **kpm** = 9,81 J **(kilopondmeter)** ter **erg** = dina · cm = 10^{-7} J.

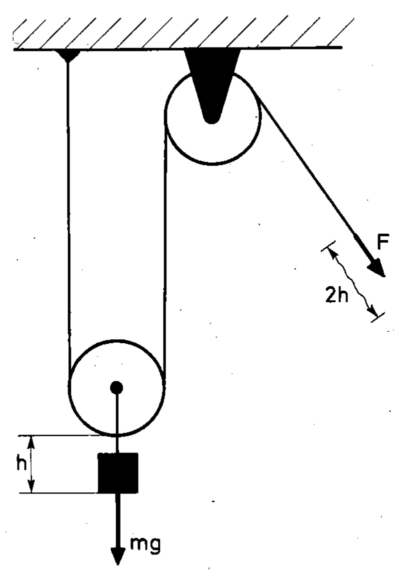
Recimo, da na telo učinkuje več sil hkrati, npr. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... Med danim premikom telesa opravijo sile, ki učinkujejo v smeri premika, pozitivno delo, zaviralne sile (ki premiku nasprotujejo) pa negativno delo. Celotno delo vseh sil je algebraična vsota del posameznih sil:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots$$

Če so premiki prijemališč posameznih sil enaki, npr. **s** (kot pri translatornem premiku telesa), velja: $A_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{s}$, $A_2 = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{s}$, ... ter

$$A = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

kjer je **F** rezultanta delujočih sil. Pri **translatornem premiku telesa je celotno delo vseh delujočih sil kar enako delu rezultante sil.** To seveda ne velja za premike, kjer se prijemališča sil različno premikajo, kot npr. pri vrtenju telesa.



Slika 4.3

Primeri:

1. Med navpičnim spustom telesa m za višinsko razliko h (slika 4.2a) opravi **teža telesa** pozitivno delo $A = mgh$. Enako veliko dela opravi teža telesa pri poševnem spustu navzdol po klancu z naklonskim kotom φ (slika 4.2b). Res je pot daljša ($s = h/\sin\varphi$), zato pa dela ne opravlja celotna teža mg ampak le njena dinamična komponenta $F_d = mg\sin\varphi$, tako da je $A = F_d s = mg\sin\varphi \cdot h/\sin\varphi = mgh$.

Med gibanjem navzdol je delo teže pozitivno in enako mgh, kjer je h višinska razlika spusta (neodvisno od strmine spuščanja). Med dviganjem pa teža telesa opravlja negativno delo ($= - mgh$), medtem ko je pri premikanju v vodoravni smeri delo teže nič.

2. Vlečna sila F vleče vrv, ki vodi prek pritrjenega in gibljivega škripca, in s tem dviguje breme m (slika 4.3). Koliko dela opravita vlečna sila F in teža bremena (mg), ko se breme dvigne za višino h?

Teža bremena med dvigom za h opravi negativno delo $A_1 = - mgh$. Prijemališče vlečne sile F se premakne za $2h$ (gibljivi škripec se kotali navzgor po levi viseči vrvi, zato se vrv na desni strani tega škripca dviguje dvakrat hitreje kot središče škripca, gl. kotaljenje, str. 74), torej ta sila opravi delo $A_2 = F \cdot 2h$. Obe sili skupaj opravita delo:

$$A = A_1 + A_2 = (2F - mg)h$$

Če se breme dviguje enakomerno, je $2F = mg$ in zato $A = 0$ (kolikor pozitivnega dela opravi vlečna sila F, toliko negativnega opravi teža bremena in je zato celotno delo nič).

3. Delo prožne sile. Ko raztegujemo prožno vzmet, premagujemo silo prožnosti, s katero vzmet nasprotuje raztezku; ta narašča premo sorazmerno z raztezkom x vzmeti. Vlečna sila se povečuje z raztezkom vzmeti po enačbi: $F = kx$ (k je konstanta prožnosti vzmeti, gl. str. 43). Ko se raztezek vzmeti poveča od x na $x + dx$ (to je za dx), opravi vlečna sila $F = kx$ delo $dA = Fdx = kxdx$. Celotno delo, potrebno, da se vzmet raztegne od 0 do končnega x, je enako:

$$A = \int dA = \int_0^x kxdx = kx^2/2 \qquad (4.4)$$

Prožno vzmet raztegnemo za $x_1 = 2$ cm, za kar je potrebna sila $F_1 = 5$ N. Koliko dela mora opraviti vlečna sila, da poveča raztezek te vzmeti z x_1 na $x_2 = 6$ cm?

$$A = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = (k/2)(x_2^2 - x_1^2) = (F_1/2x_1)(x_2^2 - x_1^2) = 0{,}4 \text{ J}$$

Delo sile pri vrtenju

Med vrtenjem telesa okrog stalne osi krožijo prijemališča delujočih sil v ravninah, ki so pravokotne na vrtilno os. Zatorej sile, ki so vzporedne z vrtilno osjo, med vrtenjem ne opravljajo dela (gl. str. 64). Delo opravljajo projekcije sil na ravnino, ki je pravokotna na vrtilno os. Recimo, da sila **F** leži v tej ravnini; njeno prijemališče je npr. oddaljeno od vrtilne osi za r (slika 4.4).

Med majhnim zasukom telesa za kót $d\varphi$ se prijemališče sile F premakne za ločni element $ds = rd\varphi$, zato sila F opravi delo:

$$dA = F'ds = F\sin\theta \cdot rd\varphi$$

kjer je θ kót, ki ga smer sile oklepa z radijem r. Produkt $r\sin\theta$ je ročica sile (r', gl. str. 64) in dobimo:

$$dA = Fr'd\varphi = Md\varphi$$

pri čemer je M **navor** sile F.

Pri vrtenju je delo enako produktu navora in kota zasuka. Pravimo, da pri vrtenju opravlja delo navor sile.

Zgoraj smo vzeli, da sila **F** leži v ravnini, pravokotno na vrtilno os. Navor sile $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (gl. 3.22) ima torej smer vrtilne osi, enako kakor kót zasuka $d\varphi$ (gl. str. 23). Če sila **F** ne leži v tej ravnini, moramo upoštevati projekcijo navora **M** na smer vrtilne osi, to je vzeti skalarni produkt navora in kota zasuka:

$$dA = \mathbf{M} \cdot d\varphi$$

Celotno delo, ki ga opravi navor **M** pri večjem zasuku, je dano z integralom:

$$\boxed{A = \int \mathbf{M} \cdot d\varphi} \qquad (4.5)$$

Kadar učinkuje na vrteče se telo hkrati več navorov, v splošnem izračunamo delo vsakega navora posebej. Le pri togem telesu, če je zasuk prijemališča vsake sile enak, dobimo celotno delo neposredno iz gornje enačbe (4.5), pri čemer je **M** rezultanta vseh delujočih navorov.

Primera:

1. **Vrv** je navita **na obodu gredi**, ki se lahko vrti okrog vodoravne osi (slika 4.5). Na viseči konec vrvi obesimo utež m. Koliko dela opravi teža uteži med spustom za h? Koliko od tega dela prejme sama utež in koliko vrteča se gred?

Med spustom za h opravi teža uteži delo mgh. Če bi utež prosto padala, bi to delo v celoti povečevalo njeno kinetično energijo in bi zato prosto padala. Ker pa je privezana na vrv, njeno padanje zadržuje sila F v vrvi, ki opravlja negativno delo. Utež zato prejme le delo $A_1 = (mg - F)h$.

Sila F vrti gred z navorom $M = RF$. Ko se utež spusti za h, se gred zasuče za kót $\varphi = h/R$ in sila F opravi delo $A_2 = M\varphi = RF \cdot h/R = Fh$, ki ga prejme gred. Velja: $A_1 + A_2 = mgh$. Sila F v vrvi torej omogoča, da se nekaj opravljenega dela prenese z uteži na gred. Delo A_1 povečuje kinetično energijo padajoče uteži, delo A_2 pa kinetično energijo vrteče se gredi.

2. **Vijak** omogoča spreminjanje dela navora med vrtenjem v delo sile pri linearnem premiku. Ko vijak zavrtimo z navorom M za polni kót 2π (in opravimo delo $A = M\varphi = 2\pi M$), se vijak pomakne za h (višina navoja) in potisne naprej s silo F, tako da je: $A = 2\pi M = Fh$ ali $F = 2\pi M/h$.

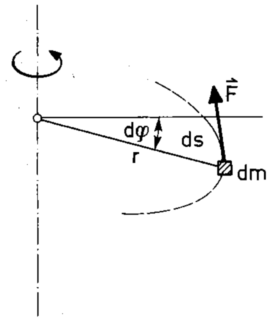
Moč

Poleg dela (A) je pomemben tudi časovni interval, v katerem je delo opravljeno, to je pomembna je **moč** (P), ki predstavlja delo, opravljeno v časovni enoti. Če se delo dA opravi v kratkem časovnem intervalu dt, je moč enaka:

$$\boxed{P = dA/dt} \qquad (4.6)$$

Merska enota moči je 1 W (**watt**) = J/s. Stroj dela z močjo 1 W, če vsako sekundo opravi 1 J dela. Stare enote moči: 1 kpm/s = 9,81 W, KM (konjska moč, HP) = 75 kpm/s = 736 W = 0,736 kW. Če delamo s stalno močjo P, opravimo v času od 0 do t_0 delo:

$$A = Pt_0 \qquad (P = \text{konst.}) \tag{4.7}$$



Slika 4.4

Enoto dela – J = Nm = kgm^2/s^2 – pogosto izrazimo z enoto moči in pišemo:

J = Ws (**wattsekunda**)

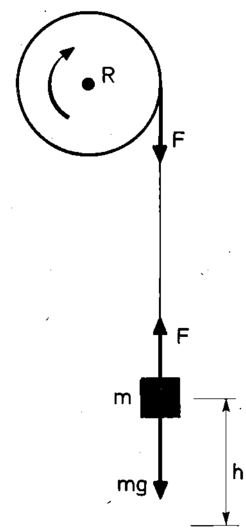
Večji enoti dela te vrste sta:

Wh (wattura) = W · h = W · 3 600s = 3,6 kJ
kWh (kilowattura) = kW · h = 3,6 MJ

Delo 1 kWh opravi stroj, ki dela eno uro s stalno močjo 1 kW.

Če se moč P spreminja s časom, računamo opravljeno delo takole: v kratkem časovnem intervalu dt opravljeno delo znaša: $dA = P(t)dt$, v daljšem času (npr. od 0 do t_0) pa:

$$A = \int dA = \int_0^{t_0} P(t)dt \tag{4.7a}$$



Slika 4.5

Na grafu (slika 4.7), ki prikazuje odvisnost moči od časa, $P(t)$, je opravljeno delo predstavljeno s ploščino pod krivuljo moči. Pri časovno spremenljivi moči nas zanima **povrečna moč $\bar{P}$**, to je moč, s katero moramo stalno delati, da opravimo enako veliko dela (A) kot pri spremeljivi moči, to je:

$$A = \bar{P}t_0$$

Na časovnem grafu moči (slika 4.7) postavimo povprečno moč $\bar{P}$ tako visoko, da je ploščina pravokotnika $\bar{P}t_0$ enaka ploščini A pod krivuljo moči, to je:

$$\bar{P} \cdot t_0 = \int_0^{t_0} P(t)dt \quad \text{ali}$$

$$\bar{P} = (1/t_0) \int_0^{t_0} P(t)dt \tag{4.8}$$

Pri stalni moči: $P(t) = P$ je seveda $\bar{P} = P$.

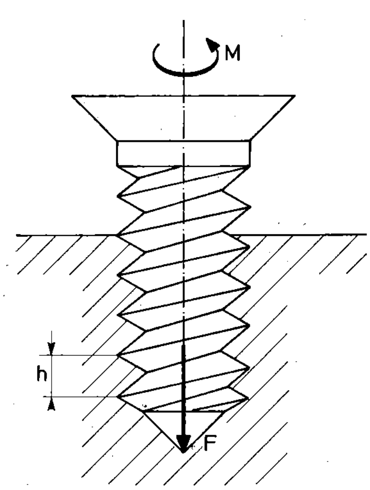
Primer:

Moč stroja se povečuje s časom linearno od nič navzgor do vrednosti P_1 = 3 kW, ki jo doseže po času t_1 = = 6 s, nato je stalna do trenutka t_2 = 46 s, nakar se linearno zmanjšuje in doseže nič po času t_3 = 60 s od začetka. Kolikšna je povprečna moč tega stroja?

$$\bar{P} \cdot t_3 = \int_0^{t_3} P(t)dt = P_1t_1/2 + P_1(t_2 - t_1) + P_1(t_3 - t_2)/2$$

$$\bar{P} = P_1(t_2 + t_3 - t_1)/2t_3 = 0{,}83P_1 = 2{,}5\text{ kW}$$

Stroj med tem časom opravi delo $A = \bar{P}t_3$ = 2,5 kW · 60 s = 150 kWs = 150 kJ = 0,15 MJ.



Slika 4.6

Moč pri premem gibanju: $P = dA/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, ker je $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$.

$$\boxed{P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} \tag{4.9}$$

Moč sile pri premem gibanju je skalarni produkt sile in hitrosti. To velja ne glede na vrsto gibanja (pospešeno ali pojemajoče) in ne glede na smer sile.

Primera:

1. Na telo m učinkuje sila F. Kako se hitrost telesa spreminja s časom, če je moč sile stalna in če je telo v začetku mirovalo?

Ker imata sila in hitrost enako smer, lahko vektorske znake opustimo:

$$P = F \cdot v = v \cdot ma = v \cdot m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t \quad \text{ali}$$
$$v\mathrm{d}v = (P/m)\mathrm{d}t$$

Po integraciji (upoštevaje začetni pogoj: $v = 0$ za $t = 0$) dobimo:

$$v^2 = (2P/m)t \quad \text{ali}$$
$$v = (2Pt/m)^{1/2}$$

Pri stalni moči se hitrost povečuje s korenom časa.

Do enakega rezultata pridemo hitreje, če se spomnimo, da delo $A = Pt$ poveča kinetično energijo telesa (od 0 do $mv^2/2$), tako da je: $Pt = mv^2/2$.

Kako se mora sila F spreminjati s časom, da je njena moč med gibanjem stalna? $F = P/v = (mP/2t)^{1/2}$.

Kako se spreminja s časom moč pri gibanju, če je sila F stalna?

2. Kolikšna moč je potrebna, da vlečemo hlod z maso $m = 200$ kg po vodoravnih, zamrznjenih tleh s stalno hitrostjo $v = 2$ m/s? Drsni torni koeficient med hlodom in tlemi je $k_t = 0{,}1$.

Ker je hitrost stalna, mora biti vlečna sila F enaka torni sili $F_t = k_t N = k_t mg$ (gl. str. 38). Sledi:

$$P = Fv = k_t mgv = 400\ \mathrm{kgm^2/s^3} = 400\ \mathrm{J/s} = 400\ \mathrm{W}$$

Moč pri vrtenju. Pri vrtenju opravlja delo navor M. Ko se telo zasuče za kót $\mathrm{d}\varphi$, opravi navor $\mathbf{M}$ (ki ima smer osi zasuka) delo $\mathrm{d}A = \mathbf{M}\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$. Moč navora zato znaša:

$$P = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t = \mathbf{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}/\mathrm{d}t = \mathbf{M}\boldsymbol{\omega}$$

$$\boxed{P = \mathbf{M}\boldsymbol{\omega}} \qquad (4.10)$$

Moč pri vrtenju je produkt navora in kotne hitrosti vrtenja

Moč vrteče se gredi enostavno izmerimo s t. i. **Pronyjevo zavoro** (slika 4.8). Gred objamemo z jarmom (zavoro), ki se podaljšuje v ročico, na kateri se pomika znana utež. Vrteča se gred skuša prek torne sile zavrteti jarem z navorom M navzgor; ta navor uravnovesimo s protinavorom uteži, tako da ročica ostane vodoravna (kljub vrtenju gredi). S tem določimo navor M gredi, njeno kotno hitrost ω pa izmerimo npr. s stroboskopsko metodo (glej srednješolsko fiziko). Iskana moč gredi je: $P = M\omega$.

Primer:

Moč vrtenja prenašamo z ene gredi na drugo s prestavami, npr. z jermenom (slika 4.9). Gonilna gred se vrti z močjo P_1 in s kotno hitrostjo ω_1; na njej je pritrjena jermenica s polmerom R_1. Prek nje vodi jermen do jermenice (polmer R_2) na drugi (vzporedni) gredi. Jermen vrti gnano gred z navorom M_2 in s kotno hitrostjo ω_2, tako da ta prejema moč $P_2 = M_2\omega_2$. Dokaži, da je moč gonilne gredi enaka moči gnane gredi ($P_2 = P_1$).

Jermen se giblje s hitrostjo v, ki je obenem obodna hitrost obeh gredi, zato velja: $v = R_1\omega_1 = R_2\omega_2$ ali

$$\omega_2/\omega_1 = R_1/R_2$$

Gred z večjo jermenico se vrti počasneje od gredi z manjšo. V napetem delu jermena učinkuje sila F, ki jo povzroča gonilna jermenica (silo v ohlapnem delu zanemarimo, gl. str. 40). Ta napenja jermen z navorom $M_1 = P_1/\omega_1 = FR_1$, tako da je $F = P_1/R_1 = P_1/\omega$. Jermen pa poganja gnano jermenico z navorom $M_2 = FR_2$, zato gnana gred prejema moč $P_2 = M_2\omega_2 = F \cdot R_2\omega_2 = Fv = P_1$. Vidimo, da se moč gonilne gredi ($M_1\omega_1$) prenaša prek jermena ($= Fv$) na gnano gred ($= M_2\omega_2$). Pri dani gonilni moči P_1 se gnana gred vrti s tem večjim navorom, čim večji je polmer njene jermenice (in čim počasneje se vrti). Pri vožnji z avtomobilom v klanec moramo zato prestaviti v nižjo prestavo (to je vključiti večje zobato kolo na gnani osi), da ima gnana os s kolesi večji navor, ki je potreben za premagovanje dinamične komponente teže.

Kinetična energija

Točkasto telo z maso m, ki se giblje s hitrostjo v, ima kinetično energijo $W_k = mv^2/2$ (gl. 4.2). Ta izraz lahko uporabimo tudi za večje telo, če se telo giblje translatorno, torej če ima vsak del telesa enako hitrost:

$$\boxed{W_k = mv^2/2} \qquad \textbf{kinetična energija translatorno gibajočega se telesa} \qquad (4.11)$$

Hitrost $\mathbf{v}$ translatorno gibajočega se telesa v splošnem predstavimo z vektorsko vsoto hitrosti telesa vzdolž posameznih koordinatnih osi: $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$ (gl. 1.3). Kvadrat hitrosti je vsota kvadratov projekcij hitrosti na koordinatne osi (gl. 1.5): $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, zato je **kinetična energija translatorno gibajočega se telesa v splošnem vsota kinetičnih energij zaradi gibanja telesa vzdolž posameznih koordinatnih osi:**

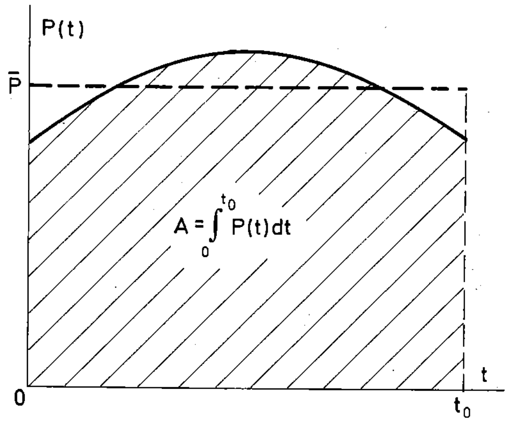
$$W_k = mv^2/2 = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + mv_z^2/2 \qquad (4.11a)$$

Kinetično energijo togega telesa, ki se vrti s kotno hitrostjo ω okrog stalne osi, pa izpeljemo takole: Telo v mislih razdelimo na diferencialne masne elemente $\mathrm{d}m$. Ti krožijo okrog izbrane vrtilne osi z enako kotno hitrostjo ω (gl. sliko 3.27). Element $\mathrm{d}m$ z oddaljenosti r od osi kroži z obodno hitrostjo $v = r\omega$ in ima zato kinetično energijo $\mathrm{d}W_k = \mathrm{d}m \cdot v^2/2 = \mathrm{d}m \cdot r^2\omega^2/2$. Kinetična energija W_k celotnega rotirajočega telesa je vsota (integral) kinetičnih energij posameznih diferencialnih masnih elementov:

$$W_k = \int dW_k = \int dm \cdot r^2\omega^2/2 = (\omega^2/2)\int r^2 dm$$

$$\boxed{W_k = J\omega^2/2}$$ **kinetična energija rotirajočega telesa** (4.12)

kjer je J vztrajnostni moment telesa glede na izbrano vrtilno os (gl. 3.26). Zgornji izraz velja ne glede na lego vrtilne osi; lahko je os tudi izven telesa (odvisnost od lege vrtilne osi je zajeta v vztrajnostnem momentu J telesa).

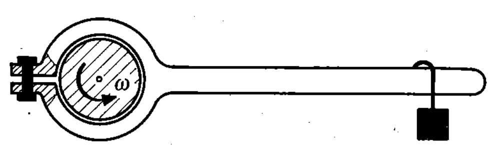


Slika 4.7

Kakor lahko kinetično energijo translacijsko gibajočega se telesa izrazimo kot vsoto kinetičnih energij zaradi gibanja vzdolž posameznih koordinatnih osi (4.11a), tako lahko tudi kinetično energijo togega telesa, ki se vrti s kotno hitrostjo ω okrog poljubne osi predstavimo kot vsoto kinetičnih energij zaradi vrtenja telesa okrog posameznih glavnih osi:

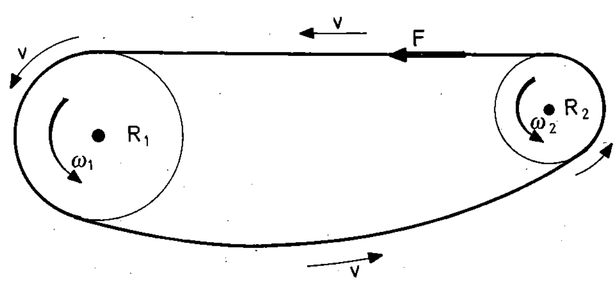
$$W_k = J_1\omega_1^2/2 + J_2\omega_2^2/2 + J_3\omega_3^2/2 \qquad (4.12a)$$

kjer so J_1, J_2 in J_3 glavni vztrajnostni momenti togega telesa, ω_1, ω_2 in ω_3 pa kotne hitrosti vrtenja telesa okrog ustreznih glavnih osi (glej podobno izvajanje vrtilne količine togega telesa, str. 80): $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_x + \omega_2\mathbf{e}_y + \omega_3\mathbf{e}_z$.



Slika 4.8

Dokaz: $W_k = (1/2)\int v^2 dm$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (gl. 1.53c), $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\cdot\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (y^2 + z^2)\omega_1^2 + (z^2 + x^2)\omega_2^2 + (x^2 + y^2)\omega_3^2$ – členi z mešanimi produkti xy, yz, zx (gl. 3.56a). Če koordinatne osi x,y in z sovpadajo z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa, izpadejo iz integrala vsi dodatni členi z mešanimi produkti xy, yz in zx (izpadejo centrifugalni vztrajnostni momenti, gl. 3.35) in ostanejo le prvi trije členi, v katerih nastopajo glavni vztrajnostni momenti J_1, J_2 in J_3 (gl. 3.34), to je: $W_k = J_1\omega_1^2/2 + J_2\omega_2^2/2 + J_3\omega_3^2/2$, kar smo morali dokazati.



Slika 4.9

Poglejmo še, kako napišemo **kinetično energijo kotalečega se telesa** Težišče telesa se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}_c$, obenem se telo še vrti okrog osi skozi težišče s kotno hitrostjo ω, ki je pravokotna na ravnino lista (gl. sliko 3.54). Hitrost $\mathbf{v}$ masnega elementa dm, ki je oddaljen od vrtilne osi (težišča) za r, je vektorska vsota hitrosti $\mathbf{v}_c$ zaradi gibanja težišča in obodne hitrosti $\mathbf{v}'$ zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče ($v' = r\omega$): $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}'$. V izrazu za kinetično energijo nastopa kvadrat hitrosti: $v^2 = (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}')^2 = v_c^2 + v'^2 + 2\mathbf{v}_c\cdot\mathbf{v}' = v_c^2 + r^2\omega^2 + 2v_c\omega r\cos\delta$, kjer je δ kót med smerjo $\mathbf{v}_c$ in $\mathbf{v}'$ (gl. sliko 4.10). Dobimo:

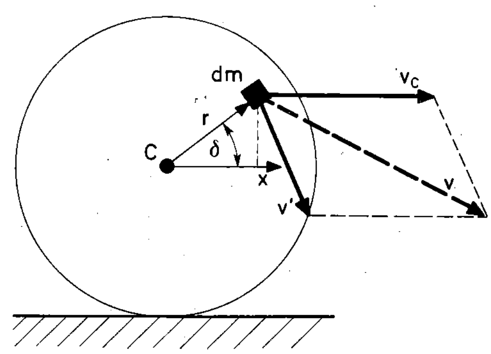
$$W_k = (1/2)\int(v_c^2 + r^2\omega^2 + 2v_c\omega x)dm$$

kjer je $x = r\cos\delta$ koordinata masnega elementa dm, merjena iz težišča telesa. Integral tretjega člena je v zvezi s koordinato x_c težišča telesa, ki je nič, ker je koordinatno izhodišče v težišču (glej podoben sklep pri izpeljavi Steinerjevega stavka, str. 68). Sledi:

$$\boxed{W_k = mv_c^2/2 + J_c\omega^2/2}$$ **kinetična energija kotalečega se telesa** (4.13)

Kinetična energija kotalečega se telesa je vsota kinetične energije zaradi gibanja težišča in kinetične energije zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče.

Ker lahko kotaljenje predstavimo kot čisto rotacijo okrog trenutne osi skozi dotikališče (gl. str. 74), lahko tudi kinetično energijo kotalečega se telesa pišemo kot



Slika 4.10

Moč sile pri premem gibanju je skalarni produkt sile in hitrosti. To velja ne glede na vrsto gibanja (pospešeno ali pojemajoče) in ne glede na smer sile.

Primera:

1. Na telo m učinkuje sila F. Kako se hitrost telesa spreminja s časom, če je moč sile stalna in če je telo v začetku mirovalo?

Ker imata sila in hitrost enako smer, lahko vektorske znake opustimo:

$$P = F \cdot v = v \cdot ma = v \cdot m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t \quad \text{ali}$$
$$v\mathrm{d}v = (P/m)\mathrm{d}t$$

Po integraciji (upoštevaje začetni pogoj: $v = 0$ za $t = 0$) dobimo:

$$v^2 = (2P/m)t \quad \text{ali}$$
$$v = (2Pt/m)^{1/2}$$

Pri stalni moči se hitrost povečuje s korenom časa.

Do enakega rezultata pridemo hitreje, če se spomnimo, da delo $A = Pt$ poveča kinetično energijo telesa (od 0 do $mv^2/2$), tako da je: $Pt = mv^2/2$.

Kako se mora sila F spreminjati s časom, da je njena moč med gibanjem stalna? $F = P/v = (mP/2t)^{1/2}$.

Kako se spreminja s časom moč pri gibanju, če je sila F stalna?

2. Kolikšna moč je potrebna, da vlečemo hlod z maso m = 200 kg po vodoravnih, zamrznjenih tleh s stalno hitrostjo v = 2 m/s? Drsni torni koeficient med hlodom in tlemi je k_t = 0,1.

Ker je hitrost stalna, mora biti vlečna sila F enaka torni sili $F_t = k_tN = k_tmg$ (gl. str. 38). Sledi:

$$P = Fv = k_tmgv = 400\ \mathrm{kgm^2/s^3} = 400\ \mathrm{J/s} = 400\ \mathrm{W}$$

Moč pri vrtenju. Pri vrtenju opravlja delo navor M. Ko se telo zasuče za kót $\mathrm{d}\varphi$, opravi navor $\mathbf{M}$ (ki ima smer osi zasuka) delo $\mathrm{d}A = \mathbf{M}\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$. Moč navora zato znaša:

$$P = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\varphi}/dt = \mathbf{M}\boldsymbol{\omega}$$

$$\boxed{P = \mathbf{M}\boldsymbol{\omega}} \tag{4.10}$$

Moč pri vrtenju je produkt navora in kotne hitrosti vrtenja

Moč vrteče se gredi enostavno izmerimo s t. i. **Pronyjevo zavoro** (slika 4.8). Gred objamemo z jarmom (zavoro), ki se podaljšuje v ročico, na kateri se pomika znana utež. Vrteča se gred skuša prek torne sile zavrteti jarem z navorom M navzgor; ta navor uravnovesimo s protinavorom uteži, tako da ročica ostane vodoravna (kljub vrtenju gredi). S tem določimo navor M gredi, njeno kotno hitrost ω pa izmerimo npr. s stroboskopsko metodo (glej srednješolsko fiziko). Iskana moč gredi je: $P = M\omega$.

Primer:

Moč vrtenja prenašamo z ene gredi na drugo s prestavami, npr. z jermenom (slika 4.9). Gonilna gred se vrti z močjo P_1 in s kotno hitrostjo ω_1; na njej je pritrjena jermenica s polmerom R_1. Prek nje vodi jermen do jermenice (polmer R_2) na drugi (vzporedni) gredi. Jermen vrti gnano gred z navorom M_2 in s kotno hitrostjo ω_2, tako da ta prejema moč $P_2 = M_2\omega_2$. Dokaži, da je moč gonilne gredi enaka moči gnane gredi ($P_2 = P_1$).

Jermen se giblje s hitrostjo v, ki je obenem obodna hitrost obeh gredi, zato velja: $v = R_1\omega_1 = R_2\omega_2$ ali

$$\omega_2/\omega_1 = R_1/R_2$$

Gred z večjo jermenico se vrti počasneje od gredi z manjšo. V napetem delu jermena učinkuje sila F, ki jo povzroča gonilna jermenica (silo v ohlapnem delu zanemarimo, gl. str. 40). Ta napenja jermen z navorom $M_1 = P_1/\omega_1 = FR_1$, tako da je $F = P_1/R_1 = P_1/\omega$. Jermen pa poganja gnano jermenico z navorom $M_2 = FR_2$, zato gnana gred prejema moč $P_2 = M_2\omega_2 = F \cdot R_2\omega_2 = Fv = P_1$. Vidimo, da se moč gonilne gredi ($M_1\omega_1$) prenaša prek jermena ($= Fv$) na gnano gred ($= M_2\omega_2$). Pri dani gonilni moči P_1 se gnana gred vrti s tem večjim navorom, čim večji je polmer njene jermenice (in čim počasneje se vrti). Pri vožnji z avtomobilom v klanec moramo zato prestaviti v nižjo prestavo (to je vključiti večje zobato kolo na gnani osi), da ima gnana os s kolesi večji navor, ki je potreben za premagovanje dinamične komponente teže.

Kinetična energija

Točkasto telo z maso m, ki se giblje s hitrostjo v, ima kinetično energijo $W_k = mv^2/2$ (gl. 4.2). Ta izraz lahko uporabimo tudi za večje telo, če se telo giblje translatorno, torej če ima vsak del telesa enako hitrost:

$$\boxed{W_k = mv^2/2} \quad \textbf{kinetična energija translatorno gibajočega se telesa} \tag{4.11}$$

Hitrost $\mathbf{v}$ translatorno gibajočega se telesa v splošnem predstavimo z vektorsko vsoto hitrosti telesa vzdolž posameznih koordinatnih osi: $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$ (gl. 1.3). Kvadrat hitrosti je vsota kvadratov projekcij hitrosti na koordinatne osi (gl. 1.5): $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, zato je **kinetična energija translatorno gibajočega se telesa v splošnem vsota kinetičnih energij zaradi gibanja telesa vzdolž posameznih koordinatnih osi:**

$$W_k = mv^2/2 = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + mv_z^2/2 \tag{4.11a}$$

Kinetično energijo togega telesa, ki se vrti s kotno hitrostjo ω okrog stalne osi, pa izpeljemo takole: Telo v mislih razdelimo na diferencialne masne elemente $\mathrm{d}m$. Ti krožijo okrog izbrane vrtilne osi z enako kotno hitrostjo ω (gl. sliko 3.27). Element $\mathrm{d}m$ z oddaljenosti r od osi kroži z obodno hitrostjo $v = r\omega$ in ima zato kinetično energijo $\mathrm{d}W_k = dm \cdot v^2/2 = dm \cdot r^2\omega^2/2$. Kinetična energija W_k celotnega rotirajočega telesa je vsota (integral) kinetičnih energij posameznih diferencialnih masnih elementov:

$$W_k = \int dW_k = \int dm \cdot r^2\omega^2/2 = (\omega^2/2)\int r^2 dm$$

$\boxed{W_k = J\omega^2/2}$ **kinetična energija rotirajočega telesa** (4.12)

kjer je J vztrajnostni moment telesa glede na izbrano vrtilno os (gl. 3.26). Zgornji izraz velja ne glede na lego vrtilne osi; lahko je os tudi izven telesa (odvisnost od lege vrtilne osi je zajeta v vztrajnostnem momentu J telesa).

Kakor lahko kinetično energijo translacijsko gibajočega se telesa izrazimo kot vsoto kinetičnih energij zaradi gibanja vzdolž posameznih koordinatnih osi (4.11a), tako lahko tudi kinetično energijo togega telesa, ki se vrti s kotno hitrostjo ω okrog poljubne osi predstavimo kot vsoto kinetičnih energij zaradi vrtenja telesa okrog posameznih glavnih osi:

$$W_k = J_1\omega_1^2/2 + J_2\omega_2^2/2 + J_3\omega_3^2/2 \qquad (4.12a)$$

kjer so J_1, J_2 in J_3 glavni vztrajnostni momenti togega telesa, ω_1, ω_2 in ω_3 pa kotne hitrosti vrtenja telesa okrog ustreznih glavnih osi (glej podobno izvajanje vrtilne količine togega telesa, str. 80): $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_x + \omega_2\mathbf{e}_y + \omega_3\mathbf{e}_z$.

Dokaz: $W_k = (1/2)\int v^2 dm$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (gl. 1.53c), $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (y^2 + z^2)\omega_1^2 + (z^2 + x^2)\omega_2^2 + (x^2 + y^2)\omega_3^2 -$ členi z mešanimi produkti xy, yz, zx (gl. 3.56a). Če koordinatne osi x,y in z sovpadajo z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa, izpadejo iz integrala vsi dodatni členi z mešanimi produkti xy, yz in zx (izpadejo centrifugalni vztrajnostni momenti, gl. 3.35) in ostanejo le prvi trije členi, v katerih nastopajo glavni vztrajnostni momenti J_1, J_2 in J_3 (gl. 3.34), to je: $W_k = J_1\omega_1^2/2 + J_2\omega_2^2/2 + J_3\omega_3^2/2$, kar smo morali dokazati.

Poglejmo še, kako napišemo **kinetično energijo kotalečega se telesa** Težišče telesa se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}_c$, obenem se telo še vrti okrog osi skozi težišče s kotno hitrostjo ω, ki je pravokotna na ravnino lista (gl. sliko 3.54). Hitrost $\mathbf{v}$ masnega elementa dm, ki je oddaljen od vrtilne osi (težišča) za r, je vektorska vsota hitrosti $\mathbf{v}_c$ zaradi gibanja težišča in obodne hitrosti $\mathbf{v}'$ zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče ($v' = r\omega$): $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}'$. V izrazu za kinetično energijo nastopa kvadrat hitrosti: $v^2 = (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}')^2 = v_c^2 + v'^2 + 2\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}' = v_c^2 + r^2\omega^2 + 2v_c\omega r\cos\delta$, kjer je δ kót med smerjo $\mathbf{v}_c$ in $\mathbf{v}'$ (gl. sliko 4.10). Dobimo:

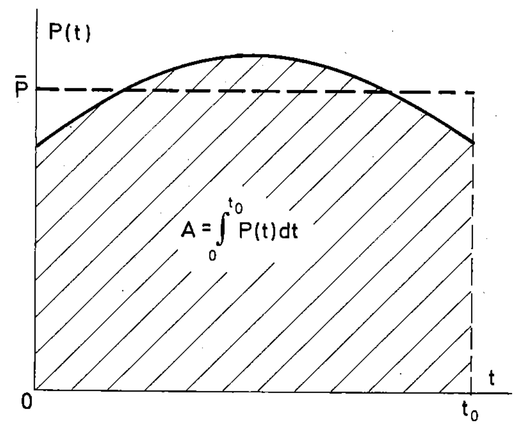
$$W_k = (1/2)\int (v_c^2 + r^2\omega^2 + 2v_c\omega x)dm$$

kjer je $x = r\cos\delta$ koordinata masnega elementa dm, merjena iz težišča telesa. Integral tretjega člena je v zvezi s koordinato x_c težišča telesa, ki je nič, ker je koordinatno izhodišče v težišču (glej podoben sklep pri izpeljavi Steinerjevega stavka, str. 68). Sledi:

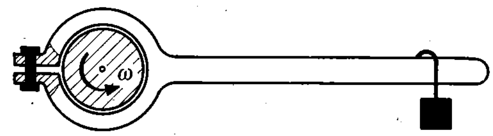
$\boxed{W_k = mv_c^2/2 + J_c\omega^2/2}$ **kinetična energija kotalečega se telesa** (4.13)

Kinetična energija kotalečega se telesa je vsota kinetične energije zaradi gibanja težišča in kinetične energije zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče.

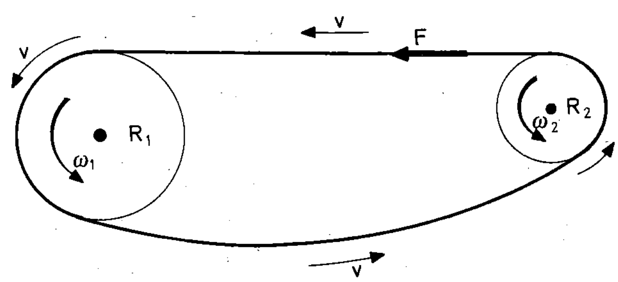
Ker lahko kotaljenje predstavimo kot čisto rotacijo okrog trenutne osi skozi dotikališče (gl. str. 74), lahko tudi kinetično energijo kotalečega se telesa pišemo kot



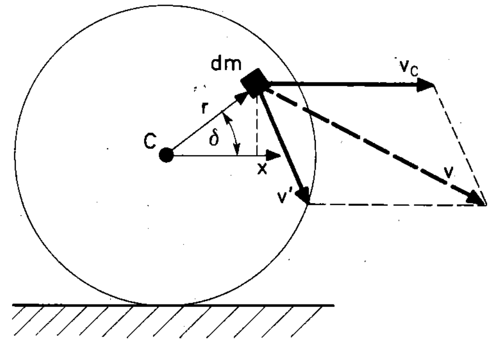
Slika 4.7



Slika 4.8



Slika 4.9



Slika 4.10

kinetično energijo kroženja okrog trenutne osi, to je: $W_k = J\omega^2/2$, kjer je J vztrajnostni moment telesa glede na trenutno os skozi dotikališče.

Izrek o kinetični energiji

Kinetična energija togega telesa se spremeni, če sile opravijo delo (gl. 4.1). **Sprememba kinetične energije je enaka delu (A) vseh sil, ki učinkujejo na telo:**

$$\boxed{\Delta W_k = A} \tag{4.14}$$

Tu je ΔW_k sprememba kinetične energije, to je razlika med končno kinetično energijo (W_{k2}) in začetno (W_{k1}).

Kinetična energija telesa na koncu poti (W_{k2}) je enaka vsoti kinetične energije na začetku (W_{k1}) in dela A, ki ga sile spotoma opravijo na telesu:

$$W_{k2} = W_{k1} + A \tag{4.14a}$$

Če sile opravijo pozitivno delo ($A > 0$, če pospeševalne sile opravijo več dela kot zaviralne), je končna kinetična energija večja od začetne ($W_{k2} > W_{k1}$). Tedaj imamo pospešeno gibanje. Nasprotno velja za $A < 0$; kinetična energija telesa se zmanjšuje, gibanje je pojemajoče.

V posebnem primeru, da je $A = 0$, se **kinetična energija telesa ohranja,** končna kinetična energija je enaka začetni:

$$\Delta W_k = 0 \quad \text{in} \quad W_{k2} = W_{k1} \quad \text{za} \quad A = 0 \tag{4.14b}$$

kar ustreza enakomernemu gibanju.

Mirujoče telo nima kinetične energije. Takšno telo se lahko premakne le, če učinkuje zunanja sila, ki opravi delo, potrebno za povečanje kinetične energije. Vemo, da se telo tedaj pospeši v smeri zunanje sile.

Drugače je, če se telo že giblje, če ima kinetično energijo, npr. W_{ko} = začetno kinetično energijo, ko začno delovati zunanje sile. Tedaj se telo lahko giblje tudi v nasprotni smeri, kot učinkujejo sile, kar pomeni, da telo lahko »premaguje« sile, ki nasprotujejo njegovemu gibanju. Pri tem te sile opravljajo negativno delo, ki zmanjšuje kinetično energijo telesa. **Telo premaguje zunanje sile na račun manjšanja lastne kinetične energije,** kar pomeni, da se upočasnjuje. Pravimo, da lahko **telo z manjšanjem lastne kinetične energije oddaja delo** (premagujoč zunanje zaviralne sile). Čim več kinetične energije ima, tem več dela lahko odda. Torej **je kinetična energija** telesa nekakšna **zaloga dela,** shranjenega v telesu.

Kinetična energija ima enako mersko enoto kot delo sile, to je J = Nm = kgm²/s² (preizkusi enote).

Primeri:

1. **Kroglico** z maso m = 5 g izstrelimo s hitrostjo v_1 = = 300 m/s skozi desko z debelino x = 5 cm; na drugi strani izstopi s hitrostjo v_2 = 200 m/s. S kolikšno povprečno silo F se deska upira prodiranju kroglice skoznjo?

$$A = \Delta W_k = W_{k2} - W_{k1}$$
$$-Fx = (mv_2^2 - mv_1^2)/2 \quad \text{ali}$$
$$F = (m/2x)(v_1^2 - v_2^2) = 2500\ \text{N} = 2{,}5\ \text{kN}$$

2. **Zavorna pot avtomobila** (glej 1. primer na strani 40). Tokrat bomo problem rešili s pomočjo izreka o kinetični energiji. Delo zavorne torne sile $F_t = k_t mg$ na zavorni poti x je enako spremembi kinetične energije:

$$A = \Delta W_k = W_k - W_{k0}$$
$$-F_t x = 0 - mv_0^2/2 \quad \text{ali}$$
$$x = mv_0^2/2F_t = v_0^2/2k_t g \tag{gl. 2.19}$$

3. Z vrha **klanca** spustimo telo, da začne drseti navzdol; drsni torni koeficient je k_t = 0,2, nagib klanca glede na vodoravno smer je φ = 25°. S kolikšno hitrostjo (v) pridrsi telo do dna klanca, ki je dolg s = 5 m?

Pospešek drsenja po klancu smo računali na strani 41 (gl. 2.22): $a = g\,(\sin\varphi - k_t\cos\varphi)$. Poglejmo še, kako se tega problema lotimo z energijskim izrekom. Na drseče telo učinkujejo teža mg, pravokotna sila podlage (N) in drsna torna sila $F_t = k_t N = k_t mg\cos\varphi$. Prva opravi pozitivno delo mgh (h = višinska razlika spusta = = $s \cdot \sin\varphi$, glej 1. primer na str. 85), delo druge sile je nič (ker je pravokotna na smer gibanja), tretja pa opravi negativno delo $-F_t s$. V celoti prejme telo delo $A = mgh - sk_t mg\cos\varphi$, ki poveča njegovo kinetično energijo od 0 (na vrhu klanca) na $mv^2/2$ (na dnu):

$$mv^2/2 = A = mgs\sin\varphi - sk_t mg\cos\varphi \quad \text{ali}$$
$$v = \sqrt{2gs(\sin\varphi - k_t\cos\varphi)} = \sqrt{2as} = 4{,}9\ \text{m/s} \tag{4.15}$$

4. **Vztrajnik** je rotacijsko simetrično telo z velikim vztrajnostnim momentom, prirejen za velike kotne hitrosti vrtenja. Priključen je na gonilno gred pogonskih motorjev. Ko se gred z vztrajnikom zavrti, prejme vztrajnik precejšnjo kinetično energijo ($J\omega^2/2$). Ta izravnava neenakomerno dovajanje kinetične energije gredi (npr. pri batnih motorjih) ter tako omogoča enakomerno uporabo, predvsem v trenutkih, ko zunanje gonilne sile odnehajo (t. i. mrtvih točkah).

Posebno prirejeni vztrajniki se uporabljajo za skladiščenje (akumuliranje) kinetične energije. Več ton težki vztrajniki (iz jekla ali iz ojačene plastike z vgrajenimi steklenimi vlakni) se vrtijo z veliko frekvenco (npr. 6–8000 obr./min) in lahko shranijo več sto kWh kinetične energije. Problem so seveda dobri in odporni ležaji, da izgube kinetične energije zaradi trenja niso prevelike.

Ljudje so si celo izmislili avtobus (t. i. **girobus**), ki izkorišča kinetično energijo, shranjeno v vztrajniku. Na začetni postaji zavrtimo vztrajnik in naložimo vanj zalogo kinetične energije. Med vožnjo se kinetična energija s prestavami prenaša s vztrajnika na pogonska kolesa vozila.

Kako hitro (v_0) moramo zavrteti vztrajnik z vztrajnostnim momentom J = 80 kgm², da bo zaloga kinetične energije zadoščala do x = 4 km oddaljenega kraja, če se pričakuje povprečna sila odpora F (zaradi trenja, upora zraka in dinamične komponente teže na klancih) okrog 15kN?

$$Fx = J\omega_0^2/2 = 2\pi^2 v_0^2 J \quad \text{ali}$$
$$v_0 = \sqrt{Fx/2\pi^2 J} = 195/\text{s} = 11700/\text{min}$$

5. Kroženje kroglice na vrvici. V poglavju vrtilna količina (str. 80) smo obravnavali kroženje kroglice na vrvici, ki vodi skozi luknjico na osi (slika 3.69). Zanimalo nas je, kako se kotna hitrost (ω) kroženja spreminja z radijem r vrvice, če tega zmanjšujemo tako, da vlečemo vrvico s silo F. Ugotovili smo, da se vrtilna količina krožeče kroglice ohranja.

$$\Gamma = J\omega = mr^2\omega = \text{konst.} = mr_1^2\omega_1$$

Zaradi tega se kotna hitrost kroženja povečuje, če se polmer r zmanjšuje, kar pomeni, da se povečuje tudi kinetična energija kroglice:

$$W_k = J\omega^2/2 = \Gamma^2/2J = \Gamma^2/2mr^2$$

Ko se polmer r spremeni za dr, se kinetična energija kroglice spremeni za:

$$\mathrm{d}W_k = (\Gamma^2/2m)\mathrm{d}(1/r^2) = -(\Gamma^2/mr^3)\mathrm{d}r$$

Če se polmer r zmanjšuje (dr negativen), se kinetična energija povečuje (dW_k pozitiven), in obratno. Kinetično energijo krožeče kroglice povečuje vlečna sila F, ki opravlja potrebno delo. Pri spremembi polmera r za dr opravi vlečna sila delo d$A = -F$dr (predznak – zato, ker je d$A > 0$ pri d$r < 0$, in obratno).

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}W_k$$
$$-F\mathrm{d}r = -(\Gamma^2/mr^3)\mathrm{d}r$$
$$F = \Gamma^2/mr^3 = mr_1^4\omega_1^2/r^3 = mr\omega^2 \text{ (= radialna sila)}$$

Vlečna sila je obratno sorazmerna s tretjo potenco polmera kroženja.

Poglejmo še soroden primer, le da vrvica ne vodi skozi luknjico na osi, ampak se med kroženjem navija na palico (polmer R), ki je v osi kroženja (slika 4.11, palica je pravokotna na ravnino lista). Tokrat lahko delo sile F v vrvici med kroženjem zanemarimo in vzamemo, da je kinetična energija krožeče kroglice stalna:

$$W_k = J\omega^2/2 = \text{konst.}$$
$$J_1\omega_1^2 = J_2\omega_2^2$$
$$mr_1^2\omega_1^2 = mr_2^2\omega_2^2$$
$$\omega_2 = \omega_1(r_1/r_2)$$

Tudi tu se kotna hitrost povečuje z zmanjševanjem polmera r, le da ne tako močo kot prej (le obratno sorazmerno s polmerom).

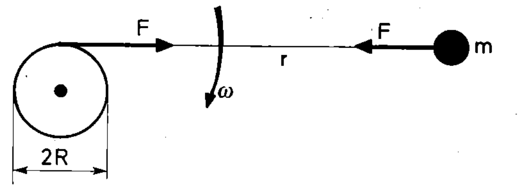
Kako se spreminja vrtilna količina kroglice?

$$\Gamma = J\omega = \sqrt{2JW_k} = r\sqrt{2mW_k}$$

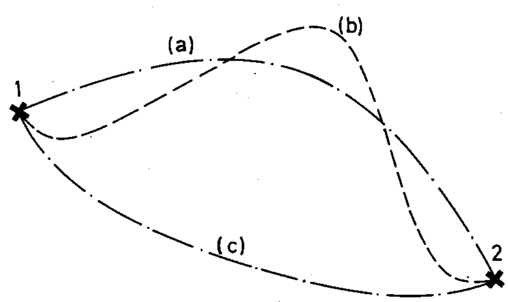
Vrtilna količina je premo sorazmerna s polmerom r, torej se zmanjšuje, če se ta zmanjšuje. Zmanjšuje jo navor M sile F v vrvici: $M = RF$. S pomočjo enačbe $M =$ $= \mathrm{d}\Gamma/dt$ pokaži, da je $F = mr\omega^2$ (= radialna sila, ki daje kroglici radialni pospešek $r\omega^2$).

6. Kotaljenje valja po klancu smo obravnavali na strani 78 (slika 3.64): zanima nas hitrost težišča valja (v_c) na dnu klanca. Tokrat si primer oglejmo z energijskega stališča.

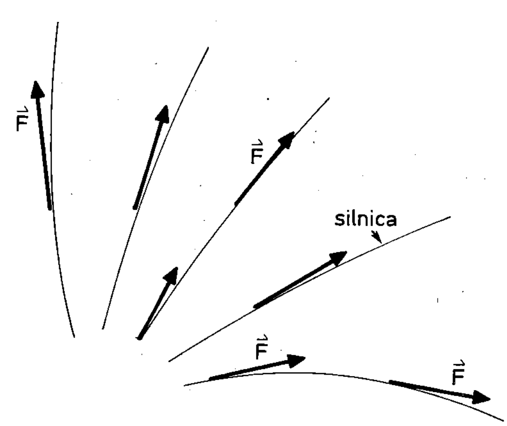
Med kotaljenjem navzdol brez podrsavanja opravlja delo le teža valja (mg), sila podlage s komponentama N in F' pa ne (ker valj ne podrsuje). Ko se težišče valja spusti za $h = s/\sin\varphi$, opravi teža delo $A = mgh$, ki



Slika 4.11



Slika 4.12



Slika 4.13

poveča kinetično energijo valja z nič (na vrhu klanca) na $mv_c^2/2 + J\omega^2/2$ (na dnu) $= 3mv_c^2/4$ (ker je $J = mR^2/2$ in $v_c = R\omega$).

$$mgh = 3mv_c^2/4$$
$$v_c = \sqrt{(4/3)gh}$$

Če bi valj drsel navzdol translatorno po gladki podlagi (brez trenja), bi pridrsel do dna klanca s hitrostjo $\sqrt{2gh}$, zaradi kotaljenja pa je hitrost težišča valja manjša. Drugače je, če je treba upoštevati trenje med drsenjem. Običajno je trenje dovolj močno, da je hitrost na dnu klanca po drsenju manjša kot po kotaljenju. Torej je varneje, če po strmini navzdol drsimo, kot če se kotalimo. (Kaj pa po ledeni strmini?)

Polje sile – konservativne sile

Telesa učinkujejo drugo na drugega z različnimi silami, odvisno od vrste, stanja in medsebojne oddaljenosti teles. Nekatere sile učinkujejo na daljavo – imajo **velik doseg** (npr. gravitacijska, električna in magnetna sila), druge učinkujejo zaznatno le v neposredni okolici teles – imajo **kratek doseg** (npr. jedrske, atomske, kohezijske, kemijske sile).

Območje v okolici telesa, na katerem telo učinkuje na druga podobna telesa, se imenuje **polje sile.** Pravimo, da telo ustvarja v svoji okolici polje sile. S tem želimo povedati, da učinkuje s silo na vsako drugo telo, ki se znajde v tem polju. Namesto da opazujemo gibanje telesa pod vplivom sil, s katerimi druga telesa učinkujejo nanj, raje opazujemo gibanje telesa v polju sile, ki ga ustvarjajo druga telesa. Vsaki sili lahko pripišemo ustrezno polje. Polje gravitacijske sile se imenuje **gravitacijsko polje** (učinkuje na vsako telo z maso, ne glede na njegovo notranje stanje). Polje električne sile je **električno polje** (učinkuje le na naelektrena telesa). Poznamo še magnetno polje ter polja jedrskih sil. Poznati polje sile, se pravi, poznati silo na izbrano telo v vsaki točki polja.

V polju sile nas zanima predvsem delo, ki ga opravi sila, če se telo v polju premakne, npr. od mesta 1 do mesta 2 (slika 4.12). Recimo, da se telo premakne po tirnici (a). Ko se premakne za **ds**, opravi sila **F** delo $dA = \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$. Celotno delo na poti od začetnega mesta 1 do končnega 2 ($A_{1\to 2}$) je potem enako:

$$A_{1\to 2} = \int dA = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}\,(a) \qquad (4.16)$$

Oznaka (a) na koncu integrala pomeni, da integriramo vzdolž krivulje (a).

V splošnem je opravljeno delo $A_{1\to 2}$ odvisno od oblike (in dolžine) krivulje (a), vzdolž katere računamo delo. Če se npr. premaknemo od mesta 1 do mesta 2 po kakšni drugi krivulji (npr. po krivulji b), opravi sila v splošnem drugačno delo. V nekaterih poljih (to je za nekatere sile) pa velja, da opravljeno delo ni odvisno od oblike krivulje (premika), ampak le od začetne in končne lege v polju, to je:

$$A_{1\to 2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}\,(a) = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}\,(b)$$

Takšno polje se imenuje **potencialno polje**, sila pa **konservativna sila**.

Delo konservativne sile je odvisno le od začetne in končne lege, ne pa od oblike poti. Pri prehodu od mesta 1 do mesta 2 opravi konservativna sila enako veliko dela, ne glede na to, po kakšni poti se premikamo. To velja za sile, ki so odvisne le od lege teles v prostoru, nič pa od hitrosti oziroma načina gibanja teles, npr. za **gravitacijske** in **električne sile** (ki so dane z Newtonovim gravitacijskim in Coulombovim zakonom). Konservativna je tudi **sila prožnosti** (to je sila, ki učinkuje na telo, privezano na prožno vzmet); ta je odvisna le od velikosti raztezka, nič pa od hitrosti raztezanja, ali raztezamo v enem koraku ali v več korakih itd. Na drugi strani pa sta **upor zraka, torna sila nekonservativna**; njuno delo je odvisno od oblike in velikosti poti ter od načina prehoda. Torna sila npr. nasprotuje premiku, njeno delo je zato vedno negativno, in to tem bolj negativno, čim daljša je pot. Upor zraka je odvisen tudi od hitrosti gibanja, torej njegovo delo gotovo ni odvisno le od začetne in končne lege telesa v prostoru, temveč tudi od načina (hitrosti) prehoda.

Recimo, da napravimo v potencialnem polju **zaključeno pot.** Z mesta 1 se premaknemo po krivulji (a) do mesta 2 (pri čemer konservativna sila opravi delo $A_{1\to 2}$), nato pa po kakšni drugi poti (npr. po krivulji c) nazaj do izhodnega mesta 1. Na povratni poti opravi konservativna sila delo $A_{2\to 1}$, ki je po velikosti enako delu $A_{1\to 2}$ na prvem delu poti, le da ima nasproten predznak:

$$A_{2\to 1} = -A_{1\to 2}$$

(to razumemo, če si mislimo, da se vračamo po isti krivulji a; ker se spremeni smer premika, se spremeni predznak dela). V celoti opravi konservativna sila na zaključeni poti delo:

$$A = A_{1\to 2} + A_{2\to 1} = A_{1\to 2} - A_{1\to 2} = 0 \qquad (4.17)$$

Delo konservativne sile na zaključeni poti je nič. Kolikor pozitivnega dela opravi na enem delu poti, toliko negativnega opravi na drugem delu, tako da je celotno delo po povratku na izhodno mesto nič.

Delo nekonservativnih sil na zaključeni poti je različno od nič. Delo torne sile je npr. vedno negativno (manjše od nič).

Za vsako silo posebej moramo ugotoviti, ali je konservativna ali ne, ali je torej njeno delo odvisno od oblike poti ali ne.

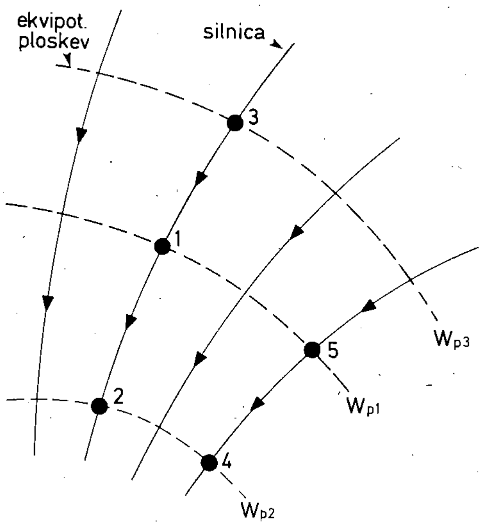
Potencialno polje (polje konservativne sile) običajno predstavimo s **silnicami.** To so matematične črte, katerih tangente kažejo smer sile v vsaki točki polja (slika 4.13). V splošnem je sila v različnih točkah polja različna: v bližini teles (ki ustvarjajo polje) je običajno velika, proč od njih pa majhna; spreminja se tudi smer sile. Zato so silnice v splošnem ukrivljene in različno goste. Kjer je polje močnejše (sila večja), so silnice gostejše, kjer je šibkejše, pa redkejše. V posebnem primeru, da je sila v vsaki točki polja enaka (tako v velikosti kot smeri), imamo t. i. **homogeno polje**: silnice so ravne in vzporedne.

Potencialna energija – izrek o ohranitvi energije

Med premikom telesa v potencialnem polju od mesta 1 do mesta 2 v smeri silnic opravi konservativna sila (ki ustvarja to polje) pozitivno delo $A_{1\to2}$. To delo prejme telo, katerega kinetična energija se zato poveča. Povečanje kinetične energije telesa ($\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1}$) je enako delu, ki ga opravi konservativna sila med prehodom. Namesto da omenjamo delo konservativne sile, lahko tudi vzamemo, da ima telo v potencialnem polju t. i. **potencialno energijo** (W_p), in rečemo, da se kinetična energija telesa poveča zato, ker se zmanjša njegova potencialna energija. Pri prehodu od mesta 1 do mesta 2 se torej potencialna energija telesa zmanjša (od W_{p1} na W_{p2}) za toliko, kolikor pozitivnega dela konservativna sila med tem prehodom opravi, to je:

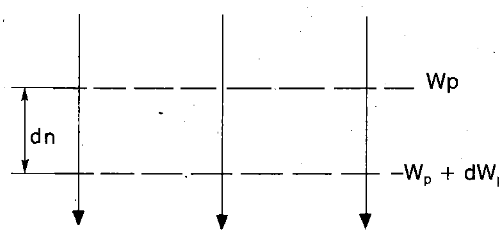
$$W_{p1} - W_{p2} = A_{1\to2} = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\Delta W_p \qquad (4.18)$$

Sledi, da se **potencialna energija telesa v smeri silnic zmanjšuje** (je manj pozitivna), **proti smeri silnic pa povečuje** (je bolj pozitivna). Poznamo le spremembo potencialne energije (enaka je delu konservativne sile), o njeni absolutni vrednosti na danem mestu pa se moramo dogovoriti posebej. Če se npr. domenimo, da je potencialna energija telesa na mestu 1 (slika 4.14) nič ($W_{p1} = 0$), je potencialna energija na mestu 2, ki je nižje v smeri silnic, negativna (in to tem bolj, čim nižje pod mestom 1 je mesto 2), na mestu 3, ki je »nad« mestom 1 (to je proti smeri silnic), pa pozitivna (in to tem bolj, čim višje je mesto 3 nad mestom 1). Dogovor o tem, kje je potencialna energija telesa nič, je povsem poljuben in ga po potrebi spremenimo.



Slika 4.14

Povprek čez silnice, to je **v smeri pravokotno na silnice**, konservativna sila ne opravlja dela, zato **se** v tej smeri **potencialna energija telesa ne spreminja**. Sosednje točke, v katerih je potencialna energija telesa enaka, povežemo v t. i. **ekvipotencialno ploskev.** V prostoru lahko narišemo več ekvipotencialnih ploskev, vsaki ustreza določena vrednost potencialne energije. Na sliki (4.14) so s črtkanimi črtami označeni preseki z ravnino lista ekvipotencialnh ploskev, ki gredo skozi mesta 1,2 in 3. Na vsaki točki spodnje ekvipotencialne ploskve ima telo enako potencialno energijo W_{p2}, na srednji W_{p1} (= 0 glede na naš dogovor) in na zgornji W_{p3}. Če se pomikamo vzdolž ekvipotencialne ploskve, je potencialna energija enaka, npr. $W_{p4} = W_{p2}$, $W_{p5} = W_{p1}$ itd. Najmočneje pa se spremeni v smeri normale na ekvipotencialno ploskev, to je v smeri silnic.



Slika 4.15

Silnice so v vsaki točki pravokotne na ekvipotencialne ploskve (zvlečene črte na sliki 4.14), **kažejo smer, v kateri se potencialna energija telesa najmočneje spreminja s krajem.**

Mislimo si sosednji ekvipotencialni ploskvi s potencialnima energijama W_p in $W_p + dW_p$, ki sta v smeri normale (silnic) razmaknjeni za dn (slika 4.15). Če so silnice usmerjene navzdol, je potencialna energija spodnje plodnje ploskve manjša od zgornje, dW_p je torej negativen. Med prehodom od zgornje do spodnje ekvipotencialne ploskve opravi konservativna sila delo $F \cdot dn$, ki je enako spremembi potencialne energije:

$$F \cdot dn = W_p - (W_p + dW_p) \quad \text{ali}$$
$$F = -dW_p/dn \qquad (4.19)$$

Sila je enaka negativnemu odvodu potencialne energije v smeri normale na ekvipotencialno ploskev.

Zgornjo enačbo napišemo v vektorski obliki takole:

$$\mathbf{F} = -(\mathrm{d}W_p/\mathrm{d}n)\mathbf{e}_n = -\nabla W_p \tag{4.19a}$$

pri čemer ima enotin vektor $\mathbf{e}_n$ normale na ekvipotencialno ploskev smer večanja potencialne energije, to je nasprotno smeri silnic. Odvod skalarne funkcije (v našem primeru W_p) po krajevni koordinati v smeri normale na ekvipotencialno ploskev, to je v smeri največjega naraščanja njene vrednosti, matematično označimo z operatorjem ∇ (**nabla**):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(\ldots)\mathbf{e}_n = \nabla(\ldots) \tag{4.20}$$

Operacija nabla (∇) pomeni odvajanje po krajevni koordinati in se izvaja nad skalarno funkcijo. Dobimo vektor, ki ima smer največjega naraščanja prvotne skalarne funkcije, po velikosti pa je enak odvodu funkcije po krajevni koordinati v tej smeri (to je enak je spremembi funkcije na enoto dolžine v tej smeri). Dobljeni vektor se imenuje tudi **gradient funkcije** in ga označimo z **grad**(...). Velik gradient pomeni, da se funkcija močno spreminja s krajem.

Enačba (4.19) omogoča izračun sile **F** v poljubni točki potencialnega polja, če je znano, kako se potencialna energija telesa spreminja s krajem. Ta postopek je torej ravno obraten kot pri enačbi (4.18), s katero računamo potencialno energijo v vsaki točki polja, če je znano krajevno spreminjanje konservativne sile.

Izrek o ohranitvi kinetične in potencialne energije

Izrek o spremembi kinetične energije (gl. 4.14) pravi, da je sprememba kinetične energije enaka delu A vseh sil, ki učinkujejo na telo:

$$\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} = A$$

Celotno delo A razdelimo na delo konservativnih sil ($A_{konserv}$) in na delo nekonservativnih sil ($A_{nekonserv}$):

$$A = A_{konserv} + A_{nekonserv} \tag{4.21}$$

Prvega nadomestimo s spremembo ustreznih potencialnih energij (gl. 4.18):

$$A_{konserv} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p \tag{4.22}$$

Vsaki konservativni sili pripišemo ustrezno potencialno energijo, tako da je ΔW_p sprememba vseh nastopajočih potencialnih energij. Izrek o spremembi kinetične energije se tako prelevi v:

$$\boxed{\Delta W_k + \Delta W_p = A_{nekonserv}} \tag{4.23}$$

Vsota sprememb kinetične in potencialne energije je enaka delu nekonservativnih sil, ki učinkujejo na telo. Ker je to delo večinoma negativno, se **vsota kinetične in potencialne energije s časom zmanjšuje.** Če zanemarimo vpliv nekonservativnih sil, to je za $\mathbf{A_{nekonserv}} = \mathbf{0}$, je:

$$\Delta(W_k + W_p) = 0 \quad \text{ali}$$
$$W_k + W_p = konst. \tag{4.24}$$

Če ni nekonservativnih sil, **se vsota kinetične in potencialne energije telesa ohranja.** Konservativne sile s svojim delom spreminjajo potencialno energijo v kinetično ali obratno, ne morejo pa spremeniti njune vsote, ta se spremeni le, če učinkujejo nekonservativne sile.

Gravitacijsko (težnostno) potencialno polje

Kar smo zgoraj povedali na splošno, si bomo zdaj ogledali na primeru gravitacijske sile.

Zanima nas potencialno polje gravitacijske sile, s katero Zemlja učinkuje na telesa iz svoje okolice. To silo računamo z Newtonovim gravitacijskim zakonom (2.8 in 2.11a). Zemlja (masa M) privlačuje telo (masa m), ki je oddaljeno od središča Zemlje za r, s silo $F = GMm/r^2 = mg_0R^2/r^2$ ali v vektorski obliki:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}_0R^2/r^2 \tag{4.25}$$

Tu je $\mathbf{g}_0$ težni pospešek na površju Zemlje ($r = R$); usmerjen je k središču Zemlje. Silnice zemeljskega gravitacijskega polja so radialni žarki, usmerjeni navznoter – k središču Zemlje (slika 4.16). Ekvipotencialne ploskve so koncentrične kroglaste ploskve s središčem v zemeljskem središču.

Da je gravitacijska sila (gl. 4.25) zares konservativna, se prepričamo, če izračunamo delo te sile pri prehodu od mesta 1 ($r = r_1$) do mesta 2 ($r = r_2$):

$$A_{1\to2} = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}\ (a)$$

Poljubno krivuljo (a), vzdolž katere integriramo, lahko nadomestimo z drobno stopničasto krivuljo (glej sliko 4.16), katere stopničke leže v ekvipotencialnih ploskvah, padajo pa vzdolž silnic. Integral po vodoravnem delu stopničk je nič, po navpičnem delu vsake stopničke pa je enako velik, kot če integriramo po začetni silnici od 1 do 3 (3 leži na isti ekvipotencialni ploskvi kot končno mesto 2). Torej je integral $A_{1\to2}$ po poljubni krivulji (a) enak integralu $A_{1\to3}$ vzdolž začetne silnice. V tej smeri imata **F** in **ds** enako smer, zato lahko pišemo:

$$A_{1\to2} = A_{1\to3} = \int_{r_2}^{r_1} F\mathrm{d}r = mg_0R^2\int_{r_2}^{r_1} r^{-2}\mathrm{d}r$$
$$= mg_0R^2(1/r_2 - 1/r_1)$$

Sledi:

$$W_{p1} = W_{p2} + mg_0R^2(1/r_2 - 1/r_1) \tag{4.26}$$

Točko 2 postavimo **na zemeljsko površje** ($r_2 = R$) in se domenimo, da je tam **potencialna energija nič:** $W_{p2} = 0$. Potencialno energijo W_{p1} telesa v poljubni točki 1, npr. za $r_1 = r$, označimo z $W_p(r)$:

$$W_p(r) = mg_0R^2(1/R - 1/r) \qquad r \geqslant R \tag{4.27}$$

Zgornji izraz velja za mesta nad zemeljskim površjem, to je za $r \geqslant R$. Pod površjem pa se gravitacijska sila

Zemlje zmanjšuje linearno z oddaljenostjo od središča (gl. 2.9). Če vzamemo Zemljo kot homogeno telo, velja:

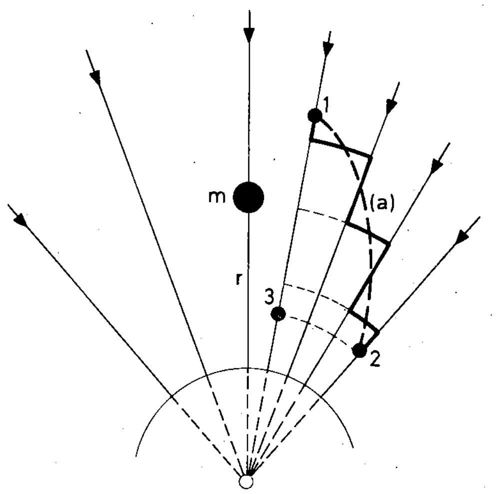
$$F(r) = mg_0 r/R \quad \text{za} \quad r \leqslant R$$

Med prehodom od zemeljskega površja do globine r se potencialna energija telesa zmanjša z $W_p(R) = 0$ na $W_p(r)$:

$$W_p(R) - W_p(r) = \int_r^R F(r)dr = (mg_0/R)\int_r^R r dr$$

$$W_p(r) = mg_0(r^2 - R^2)/2R \quad \text{za} \quad r \leqslant R \qquad (4.27a)$$

Graf gravitacijske potencialne energije $W_p(r)$ je podan na sliki (4.17). Če se oddaljujemo od Zemlje, se gravitacijska potencialna energija povečuje in se asimptotično približuje največji vrednosti mg_0R, ki jo doseže v neskončnosti (seveda, ker zanemarimo gravitacijski vpliv drugih nebesnih teles). Na zemeljskem površju ($r = R$) je glede na naš odgovor enaka nič, pod površjem ($r < R$) pa je negativna in se parabolično približuje najnižji vrednosti $-mg_0R/2$, ki jo doseže v središču ($r = 0$).



Slika 4.16

Primer:

Drugo kozmično hitrost smo računali na strani 36 tako, da smo integrirali Newtonov zakon dinamike. Račun je bil dokaj težak. Videli bomo, da lahko dobimo rezultat tudi po enostavni poti, če uporabimo izrek o ohranitvi energije (gl. 4.24).

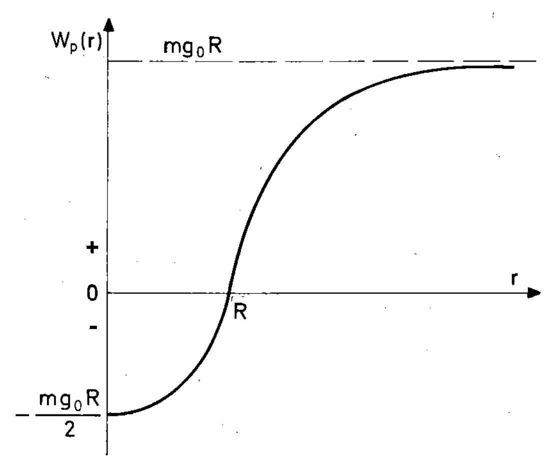
Da se raketa dvigne z zemeljskega površja in zapusti območje zemeljske privlačnosti, se mora njena potencialna energija povečati z nič na mg_0R. To povečanje lahko priskrbi potisna reakcijska sila izpušnih raketnih plinov, ki spotoma opravi potrebno delo, ali pa damo raketi ob startu zalogo energije v obliki začetne kinetične energije $mv_2^2/2$.

Če zanemarimo vpliv nekonservativnih sil (npr. zračnega upora), je vsota kinetične in potencialne energije energije rakete stalna: na površju Zemlje ima raketa potencialno energijo nič in kinetično $mv_2^2/2$, v neskončni oddaljenosti pa se raketa ustavi in njena potencialna energija znaša mg_0R. Sledi:

$$mv_2^2/2 + 0 = 0 + mg_0R \quad \text{ali}$$

$$v_2 = (2g_0R)^{1/2} \quad \text{(gl. 2.16)}$$

S kolikšno hitrostjo bi morali izstreliti raketo iz središča Zemlje, da bi zapustila območje zemeljske privlačnosti?



Slika 4.17

Gravitacijska (težnostna) potencialna energija v bližini zemeljskega površja

Običajno se zadržujemo v neposredni bližini površine Zemlje, npr. do nekaj km nad njim. Lego telesa merimo z višinsko koordinato z nad tlemi, tako da je $r = R + z$. Ker je $z \ll R$, se izraz (4.27) za gravitacijsko potencialno energijo telesa na višini z, če uporabimo geometrijsko vrsto $1/(1 + z/R) = 1 - z/R + z^2/2R^2 - \ldots$, poenostavi v:

$$W_p = mg_0R^2[1/R - (1/R)\,(1 - z/R + z^2/2R^2 - \ldots)] =$$
$$= mg_0R(z/R - z^2/2R^2 + \ldots) =$$
$$= mg_0z\,(1 - z/2R + \ldots)$$

Pri nenatančnosti enega promila lahko za $z < 12$ km zanemarimo dodatne člene v oklepaju in obdržimo le:

$$\boxed{W_p \approx mg_0z} \quad z \ll R \qquad (4.28)$$

kar že poznamo iz srednje šole. V bližini zemeljskega površja je **gravitacijska potencialna energija premo sorazmerna z višino nad tlemi.** Silnice so ravne, vzporedne in usmerjene navzdol.

Pri računanju gravitacijske potencialne energije telesa v homogenem polju je pomembna lega njegovega **težišča**. Pri dani legi težišča je potencialna energija telesa enaka, ne glede na to, kako je telo zasukano okrog osi skozi težišče (slika 4.18). Pri zasuku telesa okrog te osi namreč teža telesa (to je gravitacijska sila) ne opravlja dela (gl. str. 70), torej se gravitacijska potencialna energija ne spremeni. Potencialna energija telesa je neodvisna od orientacije telesa v prostoru, spremeni se le, če se spremeni lega težišča.

Primeri:

1. Betonski kvader s stranicami $a = 40$ cm, $b = 30$ cm in $c = 20$ cm leži na največji ploskvi. Najmanj koliko dela (A) je potrebno, da ga zavrtimo okrog njegovega najdaljšega roba? Gostota betona je $\varrho = 2{,}0$ g/cm^3.

Težišče kvadra je v začetku na višini $z_1 = c/2 = 10$ cm nad tlemi. Ko je najvišje (tik nad robom, okrog katerega kvader zavrtimo), je na višini $z_2 = \sqrt{b^2 + c^2}\,/2 = 18$cm. Torej se težišče dvigne za $\Delta z = z_2 - z_1 = 8$ cm, čemur ustreza povečanje potencialnega energije za $\Delta W_p = mg_0\Delta z = \varrho abcg_0\Delta z = 38$ J $= A$.

---

2. Pokončna posoda z osnovno ploskvijo $S = 400$ cm^2 in višino $h = 60$ cm stoji na vodoravnih tleh. Najmanj koliko dela (A) je potrebno, da dvignemo vodo z višine tal in jo natočimo v posodo? Kolikšna je potencialna energija (W_p) vode v polni posodi?

Voda na višini tal ima potencialno energijo nič. Za dvig vode z maso $m = \varrho V = \varrho Sh$ za višino h je potrebno delo:

$$A = mg_0h = \varrho g_0Sh^2 = 144 \text{ J}$$

Težišče vode v polni posodi je na višini $h/2$ nad tlemi, potencialna energija vode v posodi zato znaša:

$$W_p = mg_0h/2 = A/2$$

Za napolnjenje posode z vodo je potrebno delo A, voda v posodi pa ima potencialno energijo $A/2$. V kaj se je spremenilo preostalo delo $A - A/2 = A/2$? (Premisli, kaj se dogaja, ko natakaš vodo v posodo)

3. Poševni met. Telo z maso m odvržemo s tal z začetno hitrostjo v_0, to je z začetno kinetično energijo $mv_0^2/2$. Med dviganjem se njegova potencialna energija povečuje, kinetična pa zmanjšuje. Če zanemarimo upor zraka, se vsota kinetične in potencialne energije med gibanjem (navzgor ali navzdol) ne spreminja. Na višini h ima telo potencialno energijo mgh in kinetično $mv^2/2$, tako da je:

$$mv_0^2/2 = mgh + mv^2/2 \quad \text{ali}$$
$$v^2 = v_0^2 - 2gh \quad \text{(gl. 1.42)}$$

Hitrost v telesa na višini h je neodvisna od tega, pod kakšnim kotom odvržemo telo od tal, ali gre za navpični ali za poševni met, ali se telo dviga ali spušča (gl. sliko 1.31 na strani 21).

4. Padanje palice smo obravnavali na strani 76. Med padanjem opravlja delo edinole teža palice (sila tal v podporni točki palice ne, če palica ne zdrsne), njeno delo pa upoštevamo s spremembo potencialne energije palice.

Ko palica pade od začetne pokončne lege do tal, se njena potencialna energija zmanjša za $mgb/2$, kinetična pa poveča z nič na $J\omega_1^2/2$. Sledi:

$$mgb/2 = J\omega_1^2/2 \quad \text{ali} \quad (J = mb^2/3)$$

$$\omega_1^2 = 3g/b$$

$$v_1 = b\omega_1 = \sqrt{3gb}\,,\ \textit{kar že poznamo.}$$

---

5. Kotaljenje valja po klancu (gl. str. 78) bomo tu obravnavali s pomočjo izreka o ohranitvi energije. Kolikšna je hitrost v_c težišča valja na dnu klanca?

Ko se težišče valja spusti za višinsko razliko h, se njegova potencialna energija zmanjša za mgh, kinetična pa poveča z nič (na vrhu klanca) na $mv_c^2/2 + J_c\omega^2/2 = 3mv_c^2/4$ (na dnu), tako da je:

$$mgh = 3mv_c^2/4 \quad \text{ali}$$
$$v_c = \sqrt{(4/3)gh}$$

Na strani 78 smo izpeljali pospešek težišča valja: $a_c = (2/3)g.\ \sin\varphi$, hitrost v_c pa dobimo z enačbo (1.21): $v_c^2 = 2a_cs = 2(2/3)g\sin\varphi \cdot h/\sin\varphi = (4/3)gh$, enako kot zgoraj, le da po daljši poti.

Prožnostna energija

Pogosto se zgodi, da je telo privezano na prožno vzmet (ali na kakšno drugo prožno telo). Gibajoče se telo potem nateguje ali krči vzmet s silo prožnosti, pri čemer opravlja delo.

Delo prožne sile pri deformaciji prožne vzmeti smo računali na strani 86. Ko se vzmet raztegne ali skrči za x, opravi prožna sila vzmeti delo (gl. 4.4): $kx^2/2$. Opravljeno delo je neodvisno od načina deformacije vzmeti, ali jo deformiramo hitro ali počasi, v enem koraku ali v več korakih itd. Torej je prožna sila vzmeti konservativna in lahko njeno delo $kx^2/2$ obravnavamo kot potencialno energijo telesa. Ta je enaka energiji deformirane prožne vzmeti; tej energiji pravimo **prožnostna energija** (W_{pr}) vzmeti:

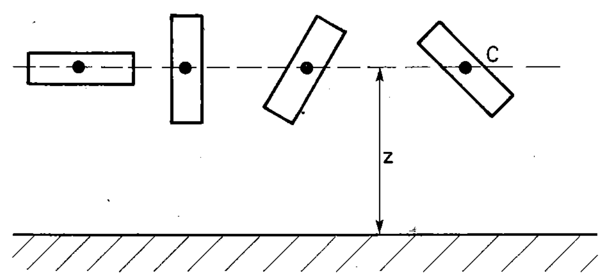
$$\boxed{W_{pr} = kx^2/2} \qquad (4.29)$$

Graf prožnostne energije v odvisnosti od raztezka ali skrčka x je na sliki (4.19). Vidimo, da je ta energija najmanjša (= 0) za $x = 0$, torej če vzmet ni ne raztegnjena ne skrčena.

Telo, privezano na prožno vzmet, med gibanjem oddaja vzmeti energijo (prožnostno) ali jo od nje prejema. Če na takšno telo učinkuje le še teža (druge sile, predvsem nekonservativne, pa zanemarimo), potem je vsota kinetične, gravitacijske potencialne in prožnostne energije stalna:

$$mv^2/2 + mgz + kx^2/2 = konst. \qquad (4.30)$$

Kinetična energija telesa se lahko spreminja v potencialno ali prožnostno ali obratno, vendar tako, da se vsota vseh treh ne spremeni. Za njihovo spremembo je potrebna dodatna sila (npr. sila roke), ki opravi potrebno delo.



Slika 4.18

Primeri:

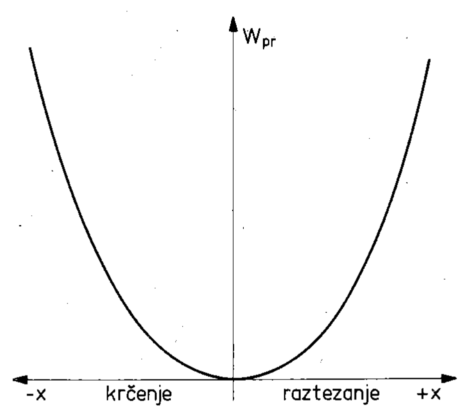
1. **Vzmetno nihalo** (gl. str. 44). Telo z maso m je privezano na prožno vzmet (s konstanto prožnosti k). Ko raztegnemo vzmet za amplitudo x_0, opravimo delo $kx_0^2/2$, ki ga prejme vzmet (in s tem tudi nanjo pritrjeno telo) v obliki prožnostne energije. Ko telo spustimo, se približuje ravnovesni legi, pri čemer se njegova prožnostna energija zmanjšuje, kinetična pa povečuje. V ravnovesni legi ($x = 0$) se prožnostna energija zmanjša na nič, kinetična pa je tedaj največja: $mv_0^2/2$. Največja kinetična energija nihajočega telesa (v ravnovesni legi) je enaka največji njegovi prožnostni energiji (v amplitudi):

$$mv_0^2/2 = kx_0^2/2 \text{ ali}$$
$$v_0 = \sqrt{k/m}\; x_0 = \omega x_0 \qquad (\text{gl. } 1.32)$$
$$\omega = \sqrt{k/m} \qquad (\text{gl. } 2.26)$$

Pri vmesnem raztezku x ima telo hitrost v, tako da je:

$$mv^2/2 + kx^2/2 = kx_0^2/2 = mv_0^2/2 \text{ ali}$$
$$v = v_0\sqrt{1 - x^2/x_0^2} \qquad (\text{gl. } 1.32)$$

Vidimo, da se pri nihanju kinetična energija spreminja v prožnostno (potencialno), ko se nihajoče telo oddaljuje od ravnovesne lege, in obratno (ko se ji približuje). To prelivanje energije se lahko dogaja le s točno določeno frekvenco (ω), ki je lastna frekvenca nihala.



Slika 4.19

2. **Telo na elastični vrvi** (gl. str. 43). Na kateri globini se ustavi telo z maso m, ki je privezano na elastično vrv (dolžina l, konstanta prožnosti k), če ga spustimo z višine pritrdišča vrvi?

Telo se ustavi ($v = 0$) na globini $l + x_2$, pri čemer je x_2 največji raztezek vrvi. Med tem prehodom se gravitacijska potencialna energija telesa zmanjša za $mg(l + x_2)$, prožnostna energija pa se poveča za $kx_2^2/2$. Ker je kinetična energija telesa na začetku in koncu enaka (= = 0), dobimo:

$$\Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_{pr} = 0$$
$$0 + (-)mg(l + x_2) + kx_2^2/2 = 0 \text{ ter}$$
$$x_2^2 - (2mgl/k)x_2 - 2mgl/k = 0$$

kar že poznamo (gl. str. 44).

Poiščimo še hitrost telesa (v) na globini x. Za $x < l$ imamo navaden prosti pad. Pri $x > l$ se začne napenjati elastična vrv in je treba upoštevati tudi prožnostno energijo vrvi. Izrek o spremembi celotne energije telesa se v tem primeru glasi:

$$mv^2/2 + (-)mg(l + x) + kx^2/2 = 0 \text{ ali}$$
$$v^2 = 2g(l + x) - (k/m)x^2$$

Na kateri globini ($l + x_1$) ima telo največjo hitrost?

$$d(v^2)/dx = 0 \text{ za } x = x_1$$
$$2g - (k/m \cdot 2x_1) = 0$$
$$x_1 = mg/k$$

3. Telesi $m_1 = 2$ kg in $m_2 = 4$ kg sta povezani **s prožno vzmetjo**; konstanta prožnosti vzmeti je $k = 20$ N/cm. Vzmet je stisnjena za $x = 3$ cm. S kolikšno hitrostjo (v_1 in v_2) odletita telesi vsaksebi, ko vzmet sprostimo?

Stisnjena vzmet ima prožnostno energijo $W_{pr} = kx^2/2 =$ 0,9 J. Po sprožitvi se ta energija porazdeli med telesi kot kinetična energija:

$$m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 = W_{pr}$$

S kakršno gibalno količino (m_1v_1) odleti eno telo v eno smer, odleti drugo telo v drugo smer (m_2v_2), glej ohranitev gibalne količine sistema, str. 54):

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

Iz gornjih enačb izračunamo v_1 in v_2:

$$v_1 = \sqrt{m_2kx^2/m_1(m_1 + m_2)} = 0{,}77 \text{ m/s}$$
$$v_2 = (m_1/m_2)v_1 = 0{,}39 \text{ m/s}$$

Vidimo, da lažje telo odleti z večjo hitrostjo kot težje. Telesi si razdelita razpoložljivo energijo v obratnem razmerju svojih mas: $W_{k1}/W_{k2} = m_2/m_1$. Lažje telo m_1 prevzame 0,6 J, težje pa 0,3 J. Pri zračni puški je m_2 (masa puške) velika v primerjavi z m_1 (masa metka) in je zato $W_{k1} \approx kx^2/2 = W_{pr}$.

Ravnovesne lege teles

Zgoraj obravnavani primeri kažejo, da lahko gibanje teles pod vplivom **konservativnih sil** obravnavamo kot **gibanje v potencialnem polju teh sil,** s tem da ugotovimo spremembe kinetične energije in ustreznih potencialnih energij. Slika potencialnega polja (potek silnic, kako se potencialna energija spreminja s krajem) mnogo pove o gibanju teles.

Ko telo v potencialnem polju spustimo, se premakne v smeri manjšanja potencialne energije (premakne – pospeši ga konservativna sila); povečanje kinetične energije, povezano s premikom telesa, gre na račun manjšanja potencialne energije. Čim bolj se potencialna energija spreminja s krajem, tem bolj se hitrost povečuje.

V smeri, v kateri se potencialna energija veča, se telo giblje pojemajoče, njegova kinetična energija pada.

Prvotno mirujoče telo se v tej smeri premakne le, če deluje dodatna sila, ki opravi delo, potrebno za povečanje potencialne energije.

Telo obmiruje v potencialnem polju, četudi ga spustimo, če je na mestu, kjer se **potencialna energija ne spreminja s krajem,** kjer je **odvod potencialne energije po krajevni koordinati enak nič** (mesta A, B in C na sliki 4.20). Ta mesta so **ravnovesne lega telesa** v potencialnem polju. Ker ni spremembe potencialne energije, tudi ni spremembe kinetične energije.

$\boxed{dW_p/dx = 0}$ **pogoj za ravnovesno lego v potencialnem polju** **(4.31)**

Poznamo tri vrste ravnovesnih leg: **stabilne, labilne** in **indiferentne.**

Ravnovesna lega je **stabilna,** če je v njej **minimum potencialne energije** (mesto A na sliki 4.20), če je v njeni neposredni okolici večja potencialna energija kot v njej sami. Kakršenkoli premik telesa iz stabilne ravnovesne lege je združen s povečanjem potencialne energije. Ker je graf potencialne energije v okolici stabilne lege zakrivljen navzgor (lončasta oblika), je drugi **odvod potencialne energije po krajevni koordinati pozitiven:**

$d^2W_p/dz^2 > 0$ **stabilna ravnovesna lega** (4.32a)

Mirujoče telo se samo od sebe ne more premakniti iz stabilne ravnovesne lege. Za tak premik je potrebna dodatna sila, ki opravi potrebno delo. Približevanje telesa k stabilni legi je pospešeno, oddaljevanje od nje pa pojemajoče.

Telo ima lahko več stabilnih ravnovesnih leg (mesta A_1, A_2 in A_3 na sliki 4.21), ki pa v splošnem niso enako stabilne. Najbolj stabilna je tista lega, ki ustreza najnižjemu minimumu potencialne energije (A_3). Če telo »dvignemo« iz stabilne lege (če mu povečamo potencialno energijo) in ga nato spustimo, se začne gibati pospešeno proti najbližji stabilni legi (ni nujno, da se povrne v isto stabilno lego, iz katere smo ga bili dvignili). Telo v splošnem niha okrog stabilne ravnovesne lege. Energija nihanja se zaradi energijskih izgub (dušenja) sčasoma izgublja in telo niha z vedno manjšimi amplitudami. Na koncu obmiruje v stabilni ravnovesni legi.

Primer:

Telo m, ki visi na elastični vrvi (gl. 2. primer na strani 43), je v stabilni ravnovesni legi, ko je vrv raztegnjena za $x_1 = mg/k$.

Celotna potencialna energija telesa v globini $l + x$ (ko je vzmet raztegnjena za x) je sestavljena iz gravitacijske energije $- mg(l + x)$ (vzamemo, da je gravitacijska energija na višini pritrdišča vrvi enaka nič) in iz prožnostne energije $kx^2/2$:

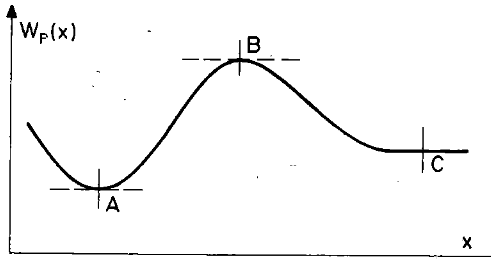
$$W_p = kx^2/2 - mg(l + x)$$
$$dW_p/dx = kx - mg = 0,\ x = mg/k = x_1$$
$$d^2W_p/dx^2 = k > 0$$

Ravnovesna lega telesa pri $x = x_1$ je torej zares stabilna.

Povsem drugačna od stabilne je **labilna ravnovesna lega** (*B* na sliki 4.20). Značilno zanjo je, da je v njej **maksimum potencialne energije; drugi odvod potencialne energije po krajevni koordinati je negativen:**

$$d^2W_p/dx^2 < 0 \quad \textbf{labilna ravnovesna lega} \qquad (4.32b)$$

Telo lahko ostane v labilni legi le, če je natančno v njej. Že najmanjši premik zadošča, da se začne pospešeno oddaljevati od nje – k najbližji stabilni legi. Telo se samo od sebe ne more vrniti v labilno lego.

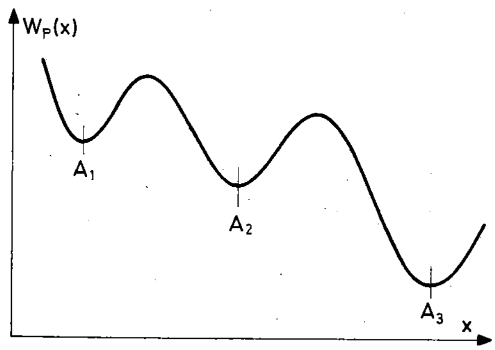


Slika 4.20

Indiferentna ravnovesna lega je tista, v okolici katere je **potencialna energija enaka,** se ne spreminja s krajem (*C* na sliki 4.20). **Drugi odvod potencialne energije po krajevni koordinati je v indiferentni legi nič:**

$$d^2W_p/dx^2 = 0 \quad \textbf{indiferentna lega} \qquad (4.32c)$$

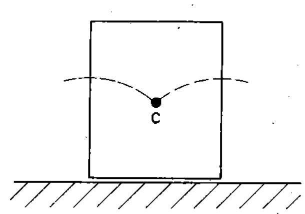
Ob kakršnemkoli premiku telesa iz indiferentne lege se potencialna energija telesa ne spremeni. Telo obmiruje v novi legi, se niti ne povrne k prvotni legi, niti se ne oddalji od nje.



Slika 4.21

Zgornje ugotovitve o značilnostih posameznih ravnovesnih leg drže le, če na telo učinkujejo edinole konservativne sile, ki ustvarjajo potencialno polje. Pogosto pa poleg teh sil nastopajo tudi druge, npr. sila podlage, sila opore, v ležaju, v vrvi itd. Te sicer med gibanjem ne opravljajo dela (ne učinkujejo direktno na kinetično energijo telesa), zato pa predpisujejo tirnico, po kateri se telo lahko giblje skozi potencialno polje. Npr. telo se giblje po vodoravni podlagi, navzdol po klancu ali po dnu kotanje, čez hribček, kroži po loku, niha okrog fiksne osi ipd. Tudi v teh primerih nam slika potencialnega polja marsikaj pove o gibanju telesa vzdolž predpisane tirnice, saj sprememba potencialne energije na tej poti določa spremembo kinetične energije telesa.

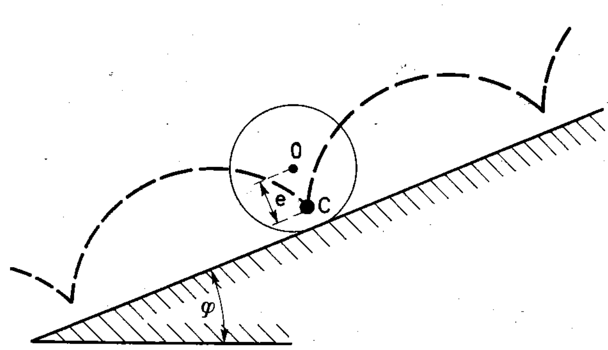
Ravnovesno lego telesa v splošnem (če so poleg konservativnih sil prisotne tudi druge) definiramo kot lego, v kateri je **vsota vseh delujočih sil nič** (gl. mehansko ravnovesje sil, str. 70). Ni nujno, da v tej legi obstaja (v matematičnem smislu) odvod potencialne energije po krajevni koordinati (gl. sliko 4.22 in 4.23). V **stabilni ravnovesni legi je potencialna energija najmanjša** (v njeni okolici je večja), vendar ni rečeno, da v tej legi obstaja minimum potencialne energije, da je $d^2W_p/dx^2 > 0$. Podobno velja za **labilno lego**: v njej je **potencialna energija največja,** a ni nujno, da obstaja maksimum potencialne energije. Edinole za **indiferentno lego** velja enako kot v čistem potencialnem polju: potencialna energija se ne spreminja s krajem, njena odvoda (prvi in drugi) po krajevni koordinati sta nič.



Slika 4.22

Primeri indiferentnih leg: kroglica na vodoravni ploskvi, ravnilo – obešeno v težišču, človek v breztežnem stanju, telo – ki potopljeno lebdi v vodi itd.

Kroglica na dnu skodelice ali kotanje je v stabilni ravnovesni legi, ravno tako telo, ki visi tako, da je njegovo težišče pod pritrdiščem. Kvader na vodoravnih tleh je v stabilni legi, če leži na eni od stranskih ploskev. Torej ima 6 stabilnih leg, ki pa niso enako stabilne. Najbolj stabilna je lega, pri kateri je težišče kvadra najnižje (če kvader leži na največji ploskvi). Če kvader zasukamo okrog njegovega spodnjega roba, se njegovo težišče dvigne (črtkana krivulja na sliki 4.22). Vidimo, da graf potencialne energije v tej stabilni legi nima vodoravne tangente, tudi drugi odvod ni poziti-



Slika 4.23

ven. Poleg teže moramo namreč upoštevati tudi normalno silo tal, ki je nasprotno enaka teži kvadra, tako da je rezultanta vseh delujočih sil nič, kar je pogoj za ravnovesno stanje.

Homogen valj se sam od sebe kotali navzdol po klancu, njegovo težišče se spušča proti najbližji stabilni legi. Drugače je, če valj ni homogen (recimo, da ima vgrajeno svinčeno palico), tako da njegovo težišče ni na osi. Med kotaljenjem po klancu se težišče takšnega ekscentričnega valja giblje po poševno nagnjeni cikloidi (črtkana črta na sliki 4.23). Če strmina klanca ni prevelika, ima valj na klancu več stabilnih ravnovesnih leg, v katerih kljub klancu miruje (zakotalitev navzgor ali navzdol pomeni dvig težišča). Teh stabilnih leg ni, če je strmina klanca (to je tangens naklonskega kota) večja od e/R, kjer je e oddaljenost težišča valja od središča (osi), R pa polmer valja.

Primeri labilnih leg: kroglica na vrhu kroglaste kapice ali na konici, kocka – ki stoji na oglu ali robu, tako da je njeno težišče tik nad podporo, stoja telovadca itd.

Trki

Med gibanjem lahko telesa trčijo drugo ob drugo, pri čemer se v splošnem spremenita hitrost in smer njihovega gibanja, obenem se tudi deformirajo. Trk teles je v splošnem zelo zapleten, saj lahko sodeluje različno število teles. Tu bomo obravnavali t. i. **binarni trk,** to je **trk dveh teles.**

Trk se prične v trenutku, ko se telesi dotakneta. Črta, ki gre skozi dotikališče teles in je pravokotna na njuno stično ravnino, je **črta trka.** Pravimo, da je trk teles **centralen,** če ležita težišči teles na črti trka, npr. trk biljardnih krogel (slika 4.24a). Večinoma pa telesa niso simetrično oblikovana in črta trka ne gre skozi njihova težišča, trk je zato **necentralen,** npr. trk jajčastih teles (slika 4.24b).

O **premem trku** govorimo, če se telesi gibljeta pred trkom in po njem v smeri črte trka (slika 4.25a), npr. trk vozičkov na ravnem tiru. Sicer je trk **poševen** (slika 4.25b), telesi se gibljeta (pred in po trku) vsako v svoji smeri, ki se ne ujema s črto trka. Necentralni trki so vedno poševni, centralni pa so lahko ali premi ali poševni, odvisno od smeri gibanja teles pred trkom

Telo z maso m se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}_1$ in zadene ob telo z maso m_2, ki ima hitrost $\mathbf{v}_2$. Pri tem prvo telo učinkuje na drugo s silo $\mathbf{F}_{12}$, drugo pa obenem učinkuje nazaj na prvo s silo $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ (po Newtonovem zakonu o medsebojnem učinkovanju teles). Zaradi teh medsebojnih sil telesi spremenita hitrost in se obenem deformirata. Možno je, da se telesi ob trku celo razbijeta ali se spojita v novo telo. Notranji sili medsebojnega učinkovanja teles opravita precejšnje delo, zaradi česar se ob trku dogajajo opazne energijske spremembe, povezane npr. s spremembo hitrosti teles, njihovo sestavo in zgradbo (možne so celo kemične reakcije). V tem poglavju nas bo zanimala le sprememba kinetične energije teles ob trku.

Ne glede na vrsto in izid trka predpostavimo, da **se skupna masa teles ob trku ne spremeni:**

$$(m_1 + m_2)\ pred\ trkom = (m_1 + m_2)\ po\ trku \qquad (4.33)$$

S trkom se masa teles niti ne poveča niti ne zmanjša. Ta predpostavka ne drži za trke izredno majhnih in hitrih atomskih delcev, katerih masa se lahko ob trku poveča ali zmanjša (na račun energijskih sprememb).

Energijske razmere pri trku

Recimo, da hitrejše telo m_1 s hitrostjo $\mathbf{v}_1$ zadene ob počasnejše telo m_2, ki se pred trkom giblje s hitrostjo $\mathbf{v}_2$. Hitrejše telo zadene ob počasnejše in ga začne potiskati pred seboj. Počasnejše telo se zaradi vztrajnosti upira in pritiska nazaj. Posledica tega medsebojnega učinkovanja je, da se hitrejše telo giblje počasneje, počasnejše pa hitreje, obenem se telesi deformirata. To poteka toliko časa, dokler se telesi ne gibljeta enako hitro, npr. s hitrostjo $\mathbf{v}_d$ (slika 4.26). Tedaj je deformacija teles največja in telesi sta nekako zlepljeni ter se gibljeta s skupno hitrostjo $\mathbf{v}_d$. V tej prvi fazi trka je hitrejše telo izgubilo nekaj kinetične energije ($m_1v_1^2/2 - m_1v_d^2/2$), ki se je delno porabila za povečanje kinetične energije počasnejšega telesa (od $m_2v_2^2/2$ na $m_2v_d^2/2$), delno pa za deformacijo teles (W_0):

$$m_1v_1^2/2 - m_1v_d^2/2 = m_2v_d^2/2 - m_2v_2^2/2 + W_0 \text{ ali}$$
$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = (m_1 + m_2)v_d^2 + 2W_0$$

Del kinetične energije hitrejšega telesa se v prvi fazi trka naloži kot deformacijska energija v notranjost teles (telesi se deformirata, notranje spremenita, njuna notranja energija se spremeni).

V drugi fazi trka se začne vložena deformacijska energija W_0 sproščati, deformacija teles se začne zmanjševati. Če je deformacija prožna (elastična), dobita telesi zopet prvotno obliko (in notranje stanje) in vsa deformacijska energija W_0 se spremeni nazaj v kinetično energijo, ki si jo telesi razdelita. Ta je **prožni** ali **elastični trk.**

V splošnem deformacija teles ni povsem prožna in telesi sta po končanem trku še nekoliko deformirani, kar pomeni, da se le del maksimalne deformacijske energije W_0 vrne v obliki kinetične energije, ostanek pa ostane v telesih kot povečana notranja (deformacijska) energija. Telesi se po trku sicer ločita in se gibljeta vsak s svojo hitrostjo ($\mathbf{v}_1'$ in $\mathbf{v}_2'$), vendar je njuna skupna kinetična energija manjša, kot je bila pred trkom. Pravimo, da je trk v splošnem **delno prožen.** Maksimalna deformacijska energija W_0 se razdeli na tri dele:

$$W_0 = (m_1v_1'^2 - m_1v_d^2)/2 + (m_2v_2'^2 - m_2v_d^2)/2 + W_d \qquad (4.34)$$

W_d je **deformacijska energija,** ki po trku ostane v obeh deformiranih telesih.

Seštejemo zgornji energijski enačbi in dobimo **energijsko enačbo delno prožnega trka:**

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 + 2W_d \qquad (4.35)$$

Vsota kinetičnih energij teles po trku je manjša kot pred trkom; razlika vsot kinetičnih energij je enaka deformacijski energiji, ki ostane v notranjosti deformiranih teles.
Skrajni primer delno prožnega trka je **popolnoma neprožni** ali **neelastični trk.** Pri tem trku se deformacija teles, do katere pride ob koncu prve faze trka, ne popravi in telesi se tudi po trku gibljeta »zlepljeno« s

skupno hitrostjo v_d, ki jo imata v trenutku največje deformacije. Celotna deformacijska energija ostane v notranjosti teles: $W_d = W_0$. Pri prožnem trku pa je $W_d = 0$.

Ohranitev gibalne količine pri trku

Med trkom učinkujeta telesi drugo na drugo s silama $\mathbf{F}_{12}$ in $\mathbf{F}_{21}$, ki sta notranji sili sistema obeh teles. Poleg njiju v splošnem učinkujejo na telesi tudi zunanje sile, npr. teža, upor, trenje. Vendar sta notranji sili v času trajanja trka večinoma mnogo močnejši od zunanjih sil in lahko vpliv zunanjih na izid trka zanemarimo. Pri trku sta pomembni le notranji sili, ki telesi deformirata in obenem spremenita njuni gibalni količini. Vemo pa, da notranje sile ne morejo spremeniti celotne gibalne količine sistema teles (gl. str. 53). Torej **se skupna gibalna količina teles pri trku ne spremeni: vektorska vsota gibalnih količin teles po trku je enaka kot pred trkom.** Čeprav smo to trditev že dokazali za splošen sistem teles, si dokaz za trk teles oglejmo še enkrat.

Prvo telo m_1 učinkuje na drugo telo m_2 s silo $\mathbf{F}_{12}$ in med trkom (ki traja Δt časa) spremeni njegovo gibalno količino z $m_2\mathbf{v}_2$ na $m_2\mathbf{v}_2'$, tako da je sunek sile $\mathbf{F}_{12}$ enak spremembi gibalne količine (gl. 2.5):

$$m_2\mathbf{v}_2' - m_2\mathbf{v}_2 = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{12}\mathrm{d}t$$

Obenem drugo telo s silo $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ spremeni gibalno količino prvega z $m_1\mathbf{v}_1$ na $m_1\mathbf{v}_1'$:

$$m_1\mathbf{v}_1' - m_1\mathbf{v}_1 = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{21}\mathrm{d}t = -\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{12}\mathrm{d}t = -(m_2\mathbf{v}_2' - m_2\mathbf{v}_2)$$

ali

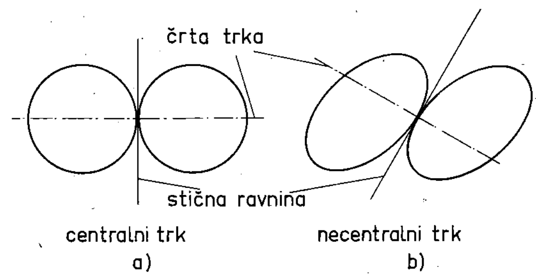
$$\boxed{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'} \tag{4.36}$$

Pri trku se gibalna količina posameznih teles spremeni, toda njuna vektorska vsota se ohranja. Ohranitev gibalne količine velja za vse trke, tako za centralne ali necentralne, preme ali poševne, kot za prožne ali neprožne.

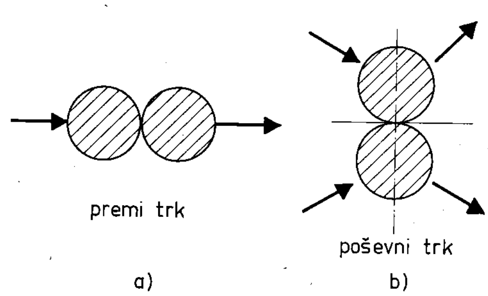
Poleg gibalne količine teles se pri trku **ohranja** tudi **hitrost masnega središča teles,** saj vemo (gl. str. 55), da notranje sile ne morejo vplivati na gibanje masnega središča sistema teles. **Masno središče teles se neodvisno od trka giblje enako hitro,** ne glede na to, ali telesi trčita ali ne, ter kako trčita.

Zakon o ohranitvi gibalne količine teles pri trku (gl. 4.36) lahko izpeljemo tudi iz zahteve, da mora energijski zakon (gl. 4.35) veljati v vsakem inercialnem koordinatnem sistemu, v katerem opazujemo trk teles in merimo njuni hitrosti pred trkom in po njem. Splošno velja, da so **fizikalni zakoni** enaki v vsakem inercialnem koordinatnem sistemu, da **so** torej **invariantni** glede **na inercialni koordinatni sistem.**

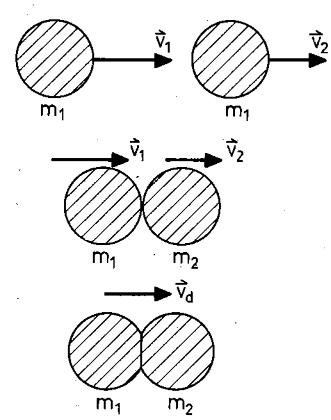
Vzemimo, da imamo inercialna koordinatna sistema, ki se drug glede na drugega gibljeta s stalno hitrostjo $\mathbf{v}_0$. Hitrosti teles pred trkom in po njem so $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2$ in $\mathbf{v}_2'$, če jih merimo v prvem sistemu, in $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_1'$, $\mathbf{w}_2$ in $\mathbf{w}_2'$ v drugem. Medsebojno so povezane z enačbo (1.54): $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$, $\mathbf{w}_1' = \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_0$ itd. Ker mora energijski zakon veljati v enaki obliki v obeh koordinatnih sisstemih, se enačba (4.35) v drugem sistemu glasi:



Slika 4.24



Slika 4.25



Slika 4.26

$$m_1w_1^2 + m_2w_2^2 = m_1w_1'^2 + m_2w_2'^2 + 2W_d \text{ ali}$$
$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)^2 + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0)^2 = m_1(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_0)^2 + m_2(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_0)^2 + 2W_d \qquad (4.35a)$$

Razumljivo je, da je deformacijska energija W_d enaka v obeh koordinatnih sistemih. Enačbo (4.35) odštejemo od enačbe (4.35a), upoštevamo enačbo (4.33) o ohranitvi mase teles pri trku in dobimo enačbo: $(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_0 = (m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2')\mathbf{v}_0$, ki mora veljati ne glede na hitrost $\mathbf{v}_0$ koordinatnega sistema. To dosežemo, če izenačimo oklepaja: $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'$, kar je enačba zakona o ohranitvi gibalne količine teles pri trku. Deformacijska energija W_d izpade iz računa, torej ta zakon velja za vse vrednosti W_d, to je ne glede na prožnost ali neprožnost trka.

Neprožni trk

Po neprožnem trku se telesi »zlepita« in se gibljeta naprej s skupno hitrostjo, npr. $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_d = \mathbf{v}$). To se zgodi pri trku lepljivih, testenih kep ali če se telesi ob trku sprimeta. Izrek o ohranitvi gibalne količine (gl. 4.36) ima v tem primeru obliko:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v} \qquad (4.36a)$$

Vidimo, da se po neprožnem trku zlepljeni telesi gibljeta v smeri začetne skupne gibalne količine. Zaradi matematične preglednosti vzemimo, da drugo telo pred trkom miruje ($v_2 = 0$). Po trku se telesi gibljeta s hitrostjo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 m_1/(m_1 + m_2) \qquad (4.36b)$$

v smeri gibanja vpadnega telesa.

Pri neprožnem trku se del kinetične energije izgublja na račun deformacijske energije W_d (= W_0), ki ostane v telesih v obliki notranje energije (telesi se npr. segreјeta). Poglejmo, kolikšen del začetne kinetične energije vpadnega telesa ($W_k = m_1v_1^2/2$) se spremeni v deformacijsko energijo:

$$W_d = W_k - W_k' = m_1v_1^2/2 - (m_1 + m_2)v^2/2$$
$$W_d = W_k m_2/(m_1 + m_2) \qquad (4.37)$$

Čim večja je masa mirujočega telesa v primerjavi z maso vpadnega, tem več začetne kinetične energije se izgubi v deformirnem telesu kot notranja energija. Če npr. telo zadene ob masiven zid ($m_2 >> m_1$), je $W_d \approx W_k$, se vsa kinetična energija porabi za deformacijo (seveda, saj telesi po trku mirujeta); telo se prilepi ob zid in obmiruje. Pač pa je deformacijska energija zanemarljivo majhna, če vpadno telo m_1 zadene ob izredno lahko telo: za $m_1 >> m_2$ je $W_d \approx 0$.

Primeri:

1. **Balistično nihalo** je nitno (matematično) nihalo, viseče na dolgih nitkah, tako da je njegov nihajni čas t_0 velik; uporabljamo ga za merjenje gibalne količine izstrelkov in drugih hitro gibajočih se teles (slika 4.27). V mirujočo klado nihala (masa M) izstrelimo kroglico, katere gibalno količino $G = mv$ želimo izmeriti. Kroglica se zarine v klado in se v njej ustavi (neprožen trk), nakar se klada s kroglico premakne s hitrostjo $v = G/(m + M)$ (gl. 4. 36b). Nihalo zaniha iz ravnovesne lege in se odkloni za amplitudo x_0, ki jo izmerimo, nakar niha naprej harmonično z nihajnim časom t_0. Največjo hitrost ima v trenutku, ko zaniha skozi prvotno ravnovesno lego: $v_0 = x_0\omega = x_0 \cdot 2\pi/t_0$ (gl. 1.32). Ta hitrost je praktično enaka hitrosti v, ki jo nihalo dobi takoj po trku, če je le čas trajanja trka majhen v primerjavi z nihajnim časom t_0 nihala, tako da je nihalo takoj po trku še v ravnovesni legi. Sledi: $v = G/(m + M) \approx v_0 = 2\pi x_0/t_0$ ali $G \approx 2\pi x_0(m + M)/t_0$. Izmerimo prvi največji odklon nihala (x_0) in s tem določimo gibalno količino G kroglice.

2. **Kroglico** (masa m = 50 g) izstrelimo s hitrostjo v_1 = 150 m/s v vodoravni smeri v lesen blok z maso M = 2 kg, ki leži na vodoravnih tleh. Kroglica se zarine v blok. Za koliko (x) se premakne blok, če je torni koeficient med blokom in tlemi k_t = 0,2?

Po strelu se blok s kroglico začne gibati s hitrostjo $v_0 = mv_1/(M + m)$, to je s kinetično energijo $W_k = (M + m)v_0^2/2$. Med drsenjem se ta energija porabi za delo torne sile na poti x: $W_k = Fx = m^2v_1^2/2(M + m) = k_t(M + m)gx$
$x = m^2v_1^2/[2gk_t(M + m)^2]$ = 0,33 m = 33 cm

3. **Mizica vzmetne tehtnice** ima maso M = 0,5 kg; konstanta prožnosti vzmeti je k = 40 N/cm. Na mizico spustimo z višine h = 20 cm svinčeno kepo z maso m = 2 kg. Za koliko (x) se pri tem stisne vzmet, če se kepa prilepi ob mizico?

Kepa prileti do mizice s hitrostjo $v_1 = \sqrt{2gh}$. Po trku se mizica in kepa gibljeta s hitrostjo $v = mv_1/(M + m)$ oziroma s kinetično energijo $W_k = m^2gh/(M + m)$, ki se nato naloži v prožnostno energijo stisnjene vzmeti. Upoštevati moramo še zmanjšanje gravitacijske potencialne energije mizice in kepe med spustom za x:

$$W_k + W_p = W_{pr}$$
$$m^2gh/(M + m) + (M + m)gx = kx^2/2$$

Dobimo kvadratno enačbo za neznanko x; upoštevamo pozitivno rešitev: x = 4,0 cm.

4. **Vesoljska ladja** se giblje premočrtno skozi vesolje, ki je enakomerno posejano z drobnim vesoljskim prahom. Ta zadeva ob ladjo (oz. ladja zadeva obenj) in se prilepIja nanjo, tako da njena masa narašča s časom; vsako časovno enoto se poveča npr. za $dm/dt = \alpha v$, kjer je α znan parameter. Kako se zaradi tega spreminjata s časom masa (m) in hitrost (v) ladje?

Trk ladje in prahu je neprožen, gibalna količina ladje se ne spreminja s časom: $G = mv = m_0v_0$, kjer sta m_0 in v_0 začetna masa ter hitrost ladje. Sledi:

$$v = m_0v_0/m \quad \text{ter}$$
$$dm/dt = \alpha m_0v_0/m \quad \text{ali}$$
$$m\,dm = \alpha m_0v_0\,dt$$

Po integraciji, upoštevaje začetni pogoj: $m = m_0$ za t = 0, dobimo:

$$m = \sqrt{m_0^2 + 2\alpha m_0v_0t} \qquad \text{ter}$$
$$v = v_0/\sqrt{1 + 2\alpha v_0t/m_0}$$

5. **Drsalca** ($m_1 = 60$ kg in $m_2 = 20$ kg) se gibljeta enako hitro ($v_0 = 2$ m/s) poševno pod kotom $2\alpha = 60°$ drug proti drugemu (slika 4.28). Ko se srečata, se sprimeta. Kolikšna je njuna skupna hitrost (v) in v kateri smeri se gibljeta (pod kotom β glede na simetralo njunih začetnih smeri)?

Trk je poševen, zato moramo enačbo (4.36) o ohranitvi gibalne količine rešiti v vektorski obliki. Najenostavneje je, če jo zadovoljimo posebej za projekcije hitrosti v smeri simetrale in posebej za projekcije v pravokotni smeri:

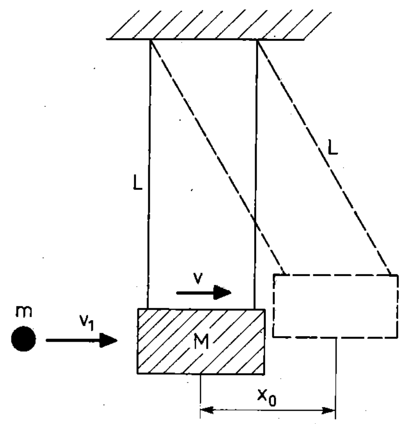
$$m_1v_0\cos\alpha + m_2v_0\cos\alpha = v(m_1 + m_2)\cos\beta$$
$$m_1v_0\sin\alpha - m_2v_0\sin\alpha = v(m_1 + m_2)\sin\beta$$

Drugo enačbo delimo s prvo:

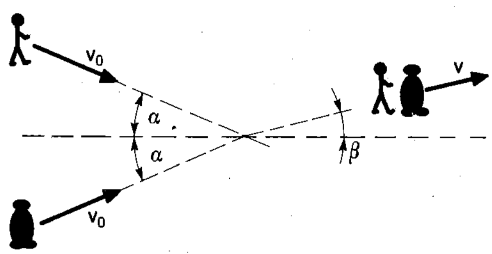
$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) \quad , \quad \beta = 16°$$

Enačbi kvadriramo in nato seštejemo:

$$v = \frac{v_0}{m_1 + m_2}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos(2\alpha)} =$$
$$v = 1{,}8 \text{ m/s}$$



Slika 4.27



Slika 4.28

Prožni trk

Prožno trčijo elastična ali prožna telesa, npr. biljardne krogle. V drugi fazi trka se deformacija (povzročena v prvi fazi) sprošča in ob koncu trka povsem izgine; telesi povrneta prvotno obliko in notranje stanje, vsa deformacijska energija se vrne v kinetično: $W_d = 0$, telesi odletita z različnima hitrostma v_1' in v_2'. Prožni trak omogoča, da se del kinetične energije prenese z enega (hitrejšega) telesa na drugo telo (počasnejše).

Poleg izreka o ohranitvi gibalne količine uporabimo tudi izrek o ohranitvi kinetične energije (4.35 z $W_d = 0$):

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' \qquad (4.36)$$
$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 \qquad (4.38)$$

Najprej si oglejmo premi trk. Pred trkom in po njem se telesi gibljeta v isti črti, zato lahko vektorsko naravo gibanja opustimo. Domenimo se le, da je hitrost pozitivna, če ima smer hitrosti $\mathbf{v}_1$ vpadnega telesa, in negativna v nasprotnem primeru.

Recimo, da se telo m_1 s hitrostjo v_1 zaleti v mirujoče telo m_2 ($v_2 = 0$). S kolikšnima hitrostma (v_1' in v_2') odletita vpadno in mirujoče telo po prožnem trku? Obe strani enačb (4.36,38) delimo z maso m_1 vpadnega telesa in vpeljemo parameter:

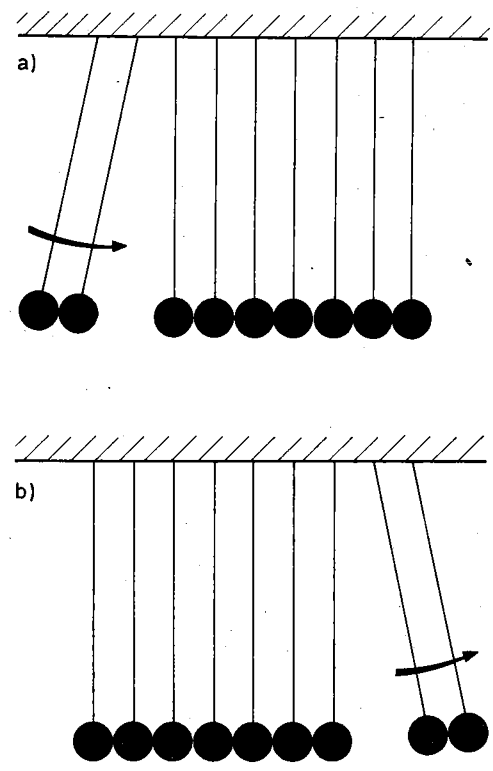
$$A = m_2/m_1$$

tako da se zgornji enačbi poenostavita v:

$$v_1 = v_1' + Av_2'$$
$$v_1^2 = v_1'^2 + Av_2'^2$$

Iskani netrivialni rešitvi sta:

$$v_1' = v_1(1 - A)/(1 + A)$$
$$v_2' = v_1 \cdot 2/(1 + A) \qquad (4.39)$$



Slika 4.29

Vpadno telo se tudi po trku giblje naprej v vpadni smeri ($v_1' > 0$), če je $A < 1$ oziroma $m_1 > m_2$ (če zadene ob lažje telo). Od težjega telesa ($A > 1$) pa se odbije nazaj ($v_1' < 0$). Če trči ob masiven zid ($m_2 \gg m_1$, $A \gg 1$), je $v_1' = -v_1$ in $v_2' = 0$, kar pomeni, da se odbije z enako hitrostjo nazaj, zid pa se ne premakne. Poseben primer dobimo za $A = 1$, če torej telo trči ob enako težko, mirujoče telo. Tedaj je $v_1' = 0$ in $v_2' = v_1$: vpadno telo se po trku ustavi, prvotno mirujoče telo pa odleti naprej s hitrostjo vpadnega telesa. **Telo torej izgubi vso svojo kinetično energijo, če elastično trči ob mirujoče enako težko telo;** izgubljeno energijo prejme prvotno mirujoče telo in jo odnese naprej v vpadni smeri (štafetna predaja energije). Ta pojav je značilen za prožni trk in lahko z njim preizkušamo prožnost trka.

Za ilustracijo si oglejmo vrsto enakih, dotikajočih se biljardnih krogel, ki vise na enako dolgih nitkah (slika 4.29). Če prvo kroglo v vrsti dvignemo in nato spustimo, da trči ob drugo, zadnja v vrsti odskoči z enako hitrostjo, kot vpade prva. Prva krogla s prožnim trkom preda kinetično energijo drugi (sama pa obmiruje), druga tretji itd., dokler ne prejme energije zadnja v vrsti in z njo odleti. Če dvignemo dve krogli in spustimo, odskočita ravno tako dve krogli – predzadnja in zadnja. S stališča ohranitve gibalne količine bi lahko odskočila le zadnja krogla (z dvojno hitrostjo), toda ohranitev kinetične energije to možnost izloča.

Primeri:

1. Kol zabijemo v zemljo tako, da spuščamo nanj pilot. Pilot z maso $m = 200$ kg spustimo z višine $h = 1{,}5$ m. Ko pade na enako težek kol, se po prožnem trku ustavi, kol pa sune navzdol. Za koliko (x) se kol premakne, če se tla upirajo prodiranju kola s povprečno silo $F = 20$ kN?

Pilot prileti s kinetično energijo mgh, ki jo s prožnim trkom preda kolu. Ta se spusti za x in izgubi prejeto kinetično energijo ter gravitacijsko energijo s premagovanjem upora tal:

$Fx = mg(h + x)$ ter $x = mgh/(F - mg) = 0{,}16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$

2. Kroglici $m_1 = 10$ g in $m_2 = 20$ g visita na enako dolgih nitkah, tako da se dotikata. Lažjo kroglico dvignemo za višinsko razliko $h_0 = 27$ cm in nato spustimo, da elastično trči ob visečo kroglico m_2 (slika 4.30). Za kolikšni višini (h_1 in h_2) se po trku dvigneta kroglici?

Kroglica m_1 trči ob kroglico m_2 s hitrostjo $v_1 = \sqrt{2gh_0}$; od nje se odbije s hitrostjo $v_1' = v_1(m_2 - m_1)/(m_2 + m_1)$ (gl. 4.39), to je s kinetično energijo $m_1 v_1'^2/2 = (m_1 v_1^2/2)(m_2 - m_1)^2/(m_2 + m_1)^2$. Ta se med dviganjem spremeni v gravitacijsko potencialno energijo $m_1 g h_1$. Dobimo:

$$h_1 = h_0(m_2 - m_1)^2/(m_2 + m_1)^2 = h_0/9 = 3 \text{ cm}$$

Mirujoča kroglica m_2 odleti s hitrostjo $v_2' = 2v_1 m_1/(m_2 + m_1)$, to je s kinetično energijo $m_2 v_2'^2/2$, in se dvigne za višino h_2, tako da je:

$$h_2 = v_2'^2/2g = h_0 \cdot 4m_1^2/(m_2 + m_1)^2 = 12 \text{ cm}$$

Preveri, da velja: $m_1 h_0 = m_1 h_1 + m_2 h_2$.

3. Kroglo zalučamo z začetno hitrostjo $v_0 = 20$ m/s navpično navzgor proti stropu na višini $h = 10$ m. Po kolikšnem času (t) in s kolikšno hitrostjo (v) prileti do tal, če se od stropa odbije elastično?

Krogla prileti do stropa s hitrostjo $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 14{,}3$ m/s po času $t_1 = (v_0 - v_1)/g = 0{,}6$ s in se od njega odbije z enako veliko hitrostjo navzdol. Tla doseže s hitrostjo $v = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = v_0$ po času t_2, ki zadošča enačbi: $v_0 = v_1 + gt_2$ ali $t_2 = (v_0 - v_1)/g = 0{,}6$ s, oziroma po skupnem času $t = t_1 + t_2 = 1{,}2$ s.

4. Elastični kroglici m_1 in m_2 skupno padata proti vodoravnim tlom (slika 4.31). Pri katerem razmerju njunih mas ($A = m_2/m_1$) se spodnja krogla m_2 po udarcu ob tla ustavi? S kolikšno hitrostjo (v_1)odskoči zgornja kroglica m_1?

Kroglici priletita do tal s skupno hitrostjo v_0 (slika a). Najprej trči ob tla spodnja kroglica m_2, ki se odbije navzgor z enako veliko hitrostjo v_0 in takoj nato trči ob še padajočo kroglico m_1 (slika b). Po trku se gibljeta navzgor s hitrostma v_1 in v_2. Če hitrosti navzgor štejemo kot pozitivne, navzdol pa negativne, se enačbi (4.36,38) glasita:

$$(A - 1)v_0 = v_1 + Av_2$$
$$(A + 1)v_0^2 = v_1^2 + Av_2^2$$

Netrivialna rešitev tega sistema enačb je:

$$v_1 = v_0(3A - 1)/(A + 1)$$
$$v_2 = v_0(A - 3)/(A + 1)$$

Torej spodnja kroglica obstane na tleh ($v_2 = 0$), če je $A = 3$. Tedaj zgornja kroglica odskoči navzgor s hitrostjo $v_1 = 2v_0$ in se zato dvigne na štirikratno višino, s katere smo kroglici spustili.

Kaj se zgodi, če sta kroglici enako težki ali celo, če je zgornja kroglica težja od spodnje?

5. Na kolikšni višini (h) mora biti **rob biljardne mize?** (Slika 4.32)

Biljardna krogla (polmer R) se prikotali do roba mize v pravokotni smeri in se odbije od njega. Želimo, da se odkotali od roba z enako translacijsko in enako rotacijsko kinetično energijo, kot vpade.

Oster rob deluje na kroglo s silo F, katere sunek ($F\Delta t$) spremeni gibalno količino težišča krogle od $-mv_c$ na $+mv_c$, to je za $\Delta G = 2mv_c$. Sunek navora te sile ($M\Delta t = Fh\Delta t$) pa spremeni njeno vrtilno količino od $-J_0\omega$ na $+J_0\omega$, to je za $\Delta\Gamma = 2J_0\omega$ (J_0 je vztrajnostni moment krogle glede na os skozi dotikališče $= 7mR^2/5$). Sledi:

$$F\Delta t = 2mv_c$$
$$M\Delta t = Fh\,\Delta t = 2J_0\omega$$

Ker se krogla kotali, je $v_c = R\omega$ (gl. 3.50), in dobimo (če drugo enačbo delimo s prvo):

$$h = J_0\omega/mv_c = (7/5)R$$

Poševni prožni trk je precej bolj zapleten kot premi. Ker se telesi pred trkom in po njem gibljeta v različnih smereh, moramo enačbo (4.36) o ohranitvi gibalne količine obravnavati kot vektorsko.

Recimo, da se telo m_1 s hitrostjo $\mathbf{v}_1$ zaleti v mirujoče telo m_2. Po prožnem trku telesi odskočita s hitrostma $\mathbf{v}_1'$ in $\mathbf{v}_2'$ v različnih smereh. Ker se njuna gibalna količina ohranja, je:

$$m_1\mathbf{v}_1 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' \quad \text{ali}$$
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + A\mathbf{v}_2' \quad , \quad A = m_2/m_1$$

Zgornjo enačbo nazorno prikažemo z vektorskim diagramom. Na sliki (4.33) sta označena dva možna izida trka, pri prvem odletita telesi z gibalnima količinama $m_1\mathbf{v}_1'$ in $m_2\mathbf{v}_2'$, pri drugem pa z $m_1\mathbf{v}_1''$ in $m_2\mathbf{v}_2''$. Gibalni količini teles po trku sta sicer poljubni, vendar mora biti njuna vektorska vsota enaka vpadni gibalni količini $m_1\mathbf{v}_1$. Izid trka je nadalje pogojen z izrekom o ohranitvi kinetične energije (gl. 4.38), ki ima v našem primeru obliko:

$$v_1^2 = v_1'^2 + Av_2'^2 = (\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2')^2 + Av_2'^2 \quad \text{ali}$$
$$(A+1)v_2'^2 - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2' = 0 \qquad (4.40)$$

Zanima nas, v kateri smeri in s kolikšno hitrostjo se po trku giblje telo m_2, ki je pred trkom mirovalo. Ravninski koordinatni sistem x–y postavimo tako, da se njegovo izhodišče pokriva s skupnim izhodiščem vektorjev $m_1\mathbf{v}_1$ in $m_2\mathbf{v}_2'$; os x ima smer prvotne gibalne količine $m_1\mathbf{v}_1$ (slika 4.34). Točka (x,y) predstavlja končno točko vektorja $m_2\mathbf{v}_2'$ v tem koordinatnem sistemu. Velja:

$$x^2 + y^2 = (m_2\mathbf{v}_2')^2 \text{ ter } \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2' = v_1v_2'x/(m_2v_2') = v_1x/m_2$$

V enačbi (4.40) nadomestimo v_2 s projekcijama x,y in dobimo:

$$(A+1)(x^2+y^2) - 2m_2v_1x = 0 \quad \text{ali}$$

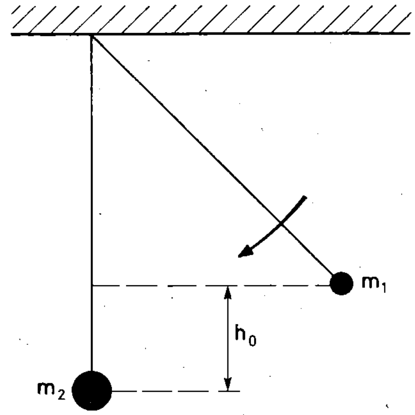
$$y^2 + (x-R)^2 = R^2 \quad , \quad R = m_2v_1/(A+1) \qquad (4.41)$$

Konice možnih vektorjev $m_2\mathbf{v}_2'$ torej ležijo na krogu s polmerom R, katerega središče je na osi x, oddaljeno od izhodišča za R.

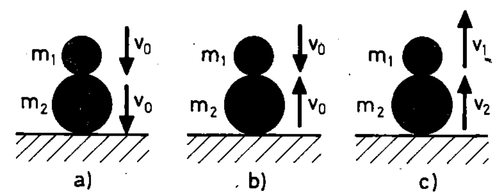
Proučimo nekaj posebnih primerov. Pri premem trku je $y = 0$ in $x = m_2v_2' = 2R$ ali $v_2' = 2v_1/(A+1)$, kar že poznamo (4.39). Če sta telesi enako težki ($A = 1$), je premer kroga enak začetni gibalni količini ($2R = m_1v_1$) in telesi odskočita pod pravim kotom (slika 4.35a). S slike (4.35b) je razvidno, da se vpadno telo odbije v smeri nazaj ($\mathbf{v}_1'$ kaže v levo), če je $2R > m_1v_1$ ali $2m_2 > m_1(A+1) = m_2 + m_1$ ali $m_2 > m_1$ (če zadene ob težje telo).

Enačba (4.41), ki smo jo izpeljali s pomočjo izrekov o ohranitvi gibalne količine in kinetične energije, pove, kakšni trki so možni, vendar ne zadošča. Da ugotovimo dejanski izid trka, potrebujemo dodatne podatke, npr. smer gibanja teles glede na črto trka, obliko teles, naravo sil ob deformaciji teles ipd.

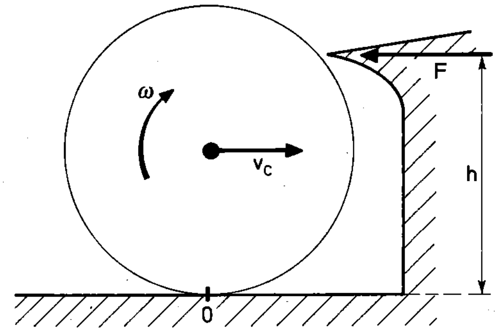
Recimo, da trčita gladki prožni kroglici. Hitrost $\mathbf{v}_1$ vpadne kroglice oklepa kót α s črto trka (slika 4.36); razstavimo jo na projekciji v_{1n} *(v smeri črte trka) in* v_{1t} (pravokotno na črto trka): $v_{1n} = v_1\cos\alpha$, $v_{1t} = v_1\sin\alpha$. Ker sta telesi gladki in kroglasti, se pri trku spremeni le normalna projekcija hitrosti v_{1n}, tangentna v_{1t} ostane enaka. Zadeto telo m_2 odleti v smeri črte trka s hitrostjo $\mathbf{v}_2'$, vpadno m_1 pa se odbije s hitrostjo $\mathbf{v}_1'$, ki oklepa kót β s črto trka. Za tangentne projekcije hitrosti velja: $v_{1t} = v_{1t}'$, za normalne pa lahko uporabimo enačbe premega trka (4.39):



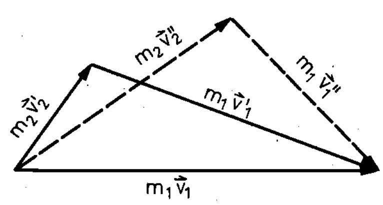
Slika 4.30

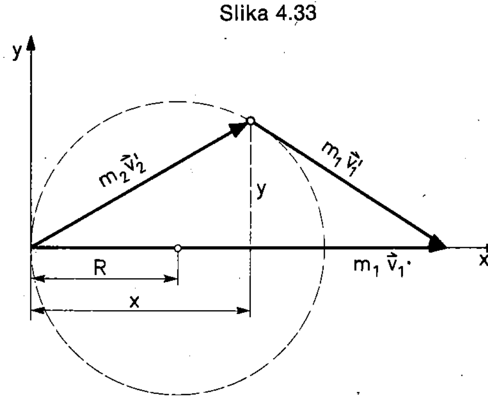


Slika 4.31



Slika 4.32


Slika 4.33



Slika 4.34

$v'_{1n} = v_{1n}(A-1)/(A+1)$, $v'_{2n} = 2v_{1n}/(A+1)$

Sledi:

$$\text{tg}\beta = v'_{1t}/v'_{1n} = (v_{1t}/v_{1n})(A+1)/(A-1)$$
$$\text{tg}\beta = \text{tg}\alpha(A+1)/(A-1)$$

Enaki kroglici ($A = 1$) po trku odskočita pod pravim kotom: $\beta = 90°$ in $v'_2 = v_{1n} = v_1\cos\alpha$. Za $A \gg 1$ dobimo $\beta \approx \alpha$, kar pomeni, da se kroglica odbije od zelo težke krogle pod enakim kotom glede na črto trka, kot vpade.

Primer:

Krogla (masa m, polmer R) se giblje translatorno s hitrostjo v in udari poševno ob ravno steno, tako da vpadna smer oklepa s steno kót α (slika 4.37). Pod kolikšnim kotom (β glede na steno) se odbije?

Najprej vzemimo, da je stena idealno gladka. Na kroglico deluje le normalna sila N, ki spremeni normalno projekcijo hitrosti z $-v\sin\alpha$ na $+v'\sin\beta$, tangentna projekcija pa se ne spremeni (ni sile v tej smeri): $v\cos\alpha = v'\cos\beta$. Izrek o ohranitvi kinetične energije v tem primeru zahteva: $v' = v$ in zato tudi $\beta = \alpha$. **Kroglica se od gladke stene odbije pod enakim kotom, kot vpade.**

Drugače je, če stena ni gladka, če poleg normalne sile N učinkuje na kroglico tudi tangentna projekcija F', ki kroglico ob trku zakotali. Sunek te sile spremeni gibalno količino kroglice v tangentni smeri:

$$mv'\cos\beta = mv\cos\alpha - F'\Delta t$$

Sunek njenega navora (glede na os skozi težišče) pa dá kroglici vrtilno količino:

$$M\Delta t = F'R\Delta t = \Delta\Gamma = \Gamma = J\omega = \omega \cdot 2mR^2/5$$
$$\omega = 2{,}5F'\Delta t/mR = (2{,}5/R)(v\cos\alpha - v'\cos\beta)$$

Izrek o ohranitvi kinetične energije napišemo v obliki (del vpadne translacijske kinetične energije se spremeni v rotacijsko kinetično energijo odbite kroglice):

$$mv^2 = mv'^2 + J\omega^2$$
$$v^2 = v'^2 + 0{,}4R^2\omega^2 = v'^2 + 2{,}5(v\cos\alpha - v'\cos\beta)^2$$

Normalna projekcija hitrosti se spremeni enako kot pri gladki steni; spremeni se le smer: $v\sin\alpha = v'\sin\beta$ ali $v' = v\sin\alpha/\sin\beta$. Dobimo transcendentno enačbo:

$$\sin^2\beta = \sin^2\alpha + 2{,}5(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)^2 \quad \text{ali}$$
$$\sin^2(\beta - \alpha) = 0{,}4(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)$$

ki jo najenostavneje rešimo z iteracijo. Za $\alpha = 45°$ npr. dobimo $\beta = 66{,}8°$, za $\alpha = 0$ je tudi $\beta = 0$ (pravokotni vpad). Vidimo, da je odbojni kót večji od vpadnega (zaradi zavrtitve kroglice ob odboju).

Delno prožni trk – koeficient prožnosti trka

V splošnem trk teles ni niti prožen niti neprožen. Telesi sicer odletita z različnima hitrostma, vendar ostaneta delno deformirani, tako da se pri trku del kinetične energije spremeni v notranjo energijo deformiranih teles. Čim bolj je trk neprožen, tem večji del vpadne kinetične energije se izgubi.

Stopnjo prožnosti trka lahko izrazimo s pomočjo **relativne hitrosti teles** ($\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$) pred trkom in po njem ($\mathbf{v}'_r = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2$). Po neprožnem trku se telesi gibljeta skupno, njuna relativna hitrost po trku je torej nič: $\mathbf{v}'_r = 0$. Pri prožnem trku pa se spremeni le predznak relativne hitrosti, velikost pa ne. To sledi iz zakonov o ohranitvi gibalne količine in kinetične energije (gl. 4.36,38), ki ju prepišemo v obliko:

$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2)$$
$$m_1(\mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_1'^2) = m_2(\mathrm{v}_2^2 - \mathrm{v}_2'^2)$$

Ker je $\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}'^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{v}')(\mathbf{v} + \mathbf{v}')$, dobimo:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2 \quad \text{ali}$$
$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1, \quad \mathbf{v}_r = -\mathbf{v}'_r$$

Koeficient prožnosti trka (e) definiramo z razmerjem absolutnih vrednosti relativnih hitrosti teles po trku in pred njim:

$$e = |\mathbf{v}'_r|/|\mathbf{v}_r| = |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2|/|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \tag{4.42}$$

Za neprožni trk je $e = 0$, za prožni pa $e = 1$. V splošnem je trk delno prožen in je $0 < e < 1$. Parameter trka e izmerimo tako, da spustimo kroglasto telo z dane višine h na vodoravno podlago. Krogla pade na tla s hitrostjo $v_1 = \sqrt{2gh}$ in se odbije navzgor s hitrostjo $v'_1 = ev_1$ ($v_2 = v'_2 = 0$) ter doseže višino $h' = v_1'^2/2g = e^2h$ ali

$$e = \sqrt{h'/h}$$

Nekaj vrednosti: aluminij- aluminij 0,2, bron-bron 0,4, jeklo 0,7, polistirol-jeklo 0,95, slonovina (biljard) 1,00.

Deformacijsko energijo W_d, ki ostane v telesih po delno prožnem trku, izrazimo s koeficientom prožnosti trka. Enačbi (4.35,36) prepišemo v obliko:

$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1') = m_2(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2)$$
$$m_1(\mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_1'^2) = m_2(\mathrm{v}_2'^2 - \mathrm{v}_2^2) + 2W_d$$

od koder izračunamo:

$$2W_d = m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2) =$$
$$= m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(1 + e) \quad \text{ali}$$
$$2W_d = m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(1 + e)$$

Zadnjo enačbo pomnožimo z m_2, predzadnjo pa z m_1 in nato enačbi seštejemo. Končni rezultat je:

$$W_d = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2(1 - e^2) \tag{4.43}$$

Primera:

1. Kroglica m_1 se s hitrostjo v zaleti v mirujočo kroglico m_2. Trk je premi in delno prožen; koeficient prožnosti trka je e. Pri katerem razmerju mas kroglic ($A = m_2/m_1$) se vpadna kroglica po trku ustavi? Kolikšen del ($p\%$) vpadne kinetične energije se porabi za deformacijo kroglic?

Vpadna kroglica se po trku giblje s hitrostjo v_1' v vpadni smeri, zadeta kroglica pa s hitrostjo v_2' ($v_2' > v_1'$).

$$v = v_1' + Av_2'$$
$$e = (v_2' - v_1')/v \quad \text{ali} \quad v_2' = ev + v_1'$$

Rešitvi sta:

$$v_1' = v(1 - eA)/(A + 1)$$
$$v_2' = v(1 + e)/(A + 1)$$

Vpadna kroglica se po trku ustavi ($v_1' = 0$), če je $e = 1/A$ ali $m_2 = m_1/e$.

$$W_d = m_1 m_2 v^2 (1 - e^2)/2(m_1 + m_2) \qquad \text{(gl. 4.43)}$$
$$= W_k(1 - e^2)/(A + 1) \quad W_k = m_1 v^2/2$$
$$p = W_d/W_k = (1 - e^2)/(A + 1) = e(1 - e)$$

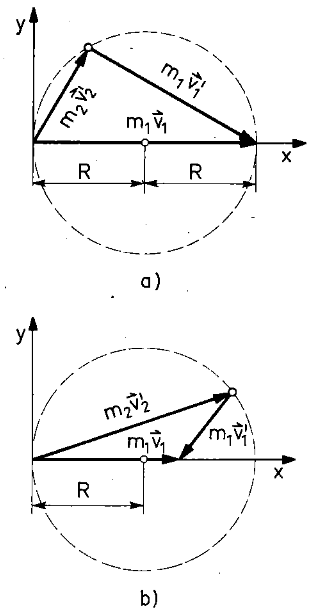
2. Enaki jekleni kroglici sta povezani z lahko palico (dolžina b = 50 cm). Vodoravno položeno palico spustimo z višine h = 40 cm nad tlemi. Leva kroglica zadene ob medeninasto podlago in se od nje delno prožno odbije (e_1 = 0,4), desna zadene ob jekleno podlago in se ravno tako delno prožno odbije (e_2 = = 0,7). Kolikšna je hitrost težišča kroglic (v_c) takoj po trku in s kolikšno kotno hitrostjo (ω) se zavrti vezna palica? (Slika 4.38)

Kroglici padeta na tla s hitrostjo $v_0 = \sqrt{2gh}$. Leva kroglica se odbije navzgor s hitrostjo $v_1 = e_1 v_0$, desna pa s $v_2 = e_2 v_0$. Ti hitrosti sta sestavljeni iz hitrosti težišča in iz obodne hitrosti zaradi zavrtitve palice (gl. str. 76):

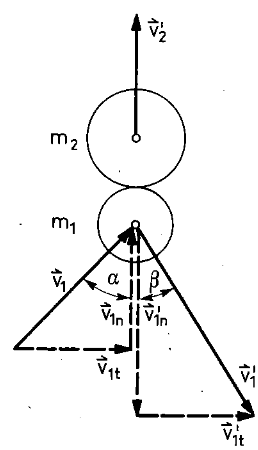
$$v_1 = v_c - (b/2)\omega, \quad v_2 = v_c + (b/2)\omega$$

Odtod izračunamo:

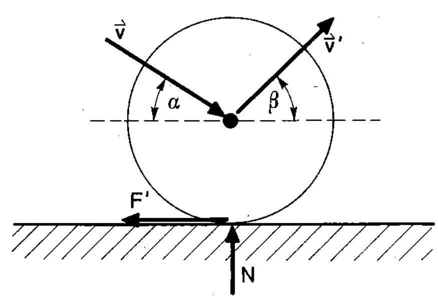
$$v_c = (v_1 + v_2)/2 = 1{,}4 \text{ m/s}$$
$$\omega = (v_2 - v_1)/b = 1{,}0/\text{s}$$



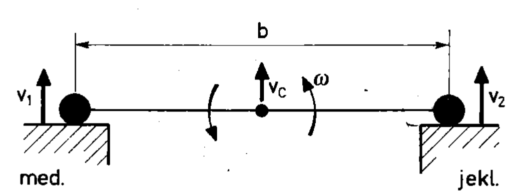
Slika 4.35



Slika 4.36



Slika 4.37



Slika 4.38