2.

SILA (DINAMIKA)

Pospešek telesa v danem inercialnem koordinatnem sistemu nastane zaradi učinkovanja drugih teles iz okolice. Kakršnokoli spremembo hitrosti telesa vedno povzroča kako drugo telo. Tovrstno učinkovanje enega telesa na drugo telo predstavimo s fizikalno količino **sila** (**F**). Pravimo, da na telo učinkuje sila. Povzroča jo kako drugo telo. Posledica učinkovanja sile na telo je **pospešek** (**a**), ki ima smer delujoče sile (slika 2.1). Velikost pospeška je premo sorazmerna s silo F, odvisna pa je še od mase (m) telesa. Čim masivnejše je telo (čim večja je njegova masa), tem manjši pospešek dobi pri dani sili, oziroma tem večja sila je potrebna za dan pospešek.

Pospešek (a) telesa je premo sorazmeren s silo (F), ki učinkuje na telo, in obratno sorazmeren z njegovo maso (m):

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m \quad \text{ali} \quad \boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \tag{2.1}$$

Sila je enaka produktu mase in pospeška. Ta enačba je znana z imenom **Newtonov zakon dinamike.**

Pospešek telesa je pri dani sili tem manjši, čim večja je masa; torej je masa merilo za vztrajnost telesa proti spremembi hitrosti. Čim večja je masa, tem bolj telo vztraja pri prvotni hitrosti, tem bolj se upira spremembi hitrosti, to je tem večja sila je potrebna, da se hitrost spremeni.

V mednarodnem sistemu merskih enot (SI) je masa izbrana kot osnovna fizikalna količina, njena enota **kg (kilogram)** je osnovna merska enota. Poleg nje uporabljamo še enote: g (gram) = 10^{-3} kg, mg (miligram) = = 10^{-3} g = 10^{-6} kg, μg (mikrogram) = 10^{-6} g = 10^{-9} kg in druge.

Mersko enoto sile – 1 **N (newton)** – izpeljemo iz Newtonovega zakona dinamike: to **je sila, ki da telesu z maso 1 kg pospešek 1 m/s²**:

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Večji enoti sile sta 1 kN = 10^3N (sila, ki da telesu z maso 1 kg pospešek 1 km/s², ali telesu z maso 1 t pospešek 1 m/s²) ter 1 MN = 10^6N. Stara enota sile je 1 **kp (kilopond)**; pri tej sili dobi telo z maso 1 kg pospešek prostega pada (g = 9,8 m/s²):

$$1\ \text{kp} = 1\ \text{kg} \cdot g = 9{,}8\ \text{N}$$

Šibke sile so včasih izražali z mersko enoto **dina** = = **1 gcm/s²**, 1 dina = 10^{-5}N = 10 μN.

Če na telo hkrati učinkuje več drugih teles, pomeni, da na telo deluje več sil, npr. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$,... (slika 2.2). Celoten učinek vseh teles na izbrano telo je odvisen od rezultante **F** vseh delujočih sil:

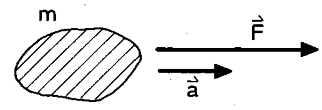
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots$$

Pospešek (**a**) telesa ima smer rezultante **F**; telo se pospeši v smeri rezultante vseh sil, ki učinkujejo na telo.

Iz Newtonovega zakona dinamike sledi, da je

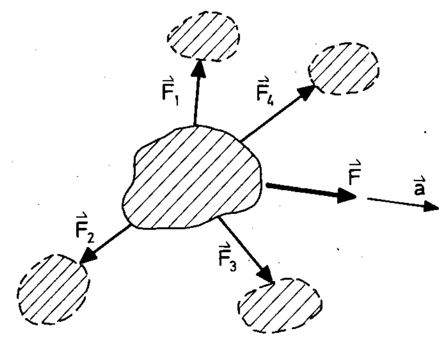
za **F** = 0 tudi **a** = 0 oziroma **v** = **konst.**

Če na telo ne deluje sila ali če je rezultanta vseh sil, ki učinkujejo na telo, enaka nič, se telo giblje enakomerno (premočrtno s stalno hitrostjo). Telo se giblje enakomerno s hitrostjo, ki jo je imelo v trenutku, ko so sile odnehale. Če je telo tedaj mirovalo, miruje tudi naprej, saj ni sile, ki bi spremenila hitrost. Za vsako spremembo hitrosti je potrebna sila. Če se hitrost telesa spreminja s časom (če se telo giblje pospešeno, ali pojemajoče, ali po zakrivljeni tirnici), pomeni, da na telo deluje sila.



Slika 2.1

Učinkovanje enega telesa na drugo telo s silo je medsebojno. Če prvo telo deluje na drugo s silo $\mathbf{F}_{12}$, deluje istočasno drugo telo nazaj na prvo z nasprotno enako silo $\mathbf{F}_{21}$. Ni mogoče, da bi eno telo delovalo na drugo, ne da bi obenem tudi drugo telo delovalo nazaj na prvo.



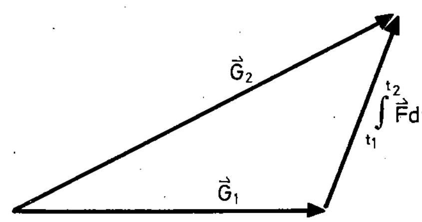
Slika 2.2

Sili medsebojnega učinkovanja teles sta enako veliki, a nasprotno usmerjeni: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ali $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$.

Ti sili sta sicer enako veliki, vendar učinkujeta na različni telesi, zato povzročata različna pospeška. Prvo telo npr. dobi pospešek $\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}/m_1$, drugo telo pa pospešek $\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}/m_2 = -\mathbf{F}_{12}/m_2 = -\mathbf{a}_1(m_1/m_2)$. Telesi se pospešita drug k drugemu; težje telo dobi manjši pospešek kot lažje telo.

Newtonov zakon dinamike (2.1) lahko izrazimo nekoliko drugače, če vpeljemo **gibalno količino G**; ta je po definiciji produkt mase telesa in njegove hitrosti:

$$\boxed{\mathbf{G} = m\mathbf{v}} \quad \text{merska enota: kgm/s} \qquad (2.2)$$



Slika 2.3

Gibalna količina telesa ima smer hitrosti. Če se hitrost spremeni, se spremeni tudi gibalna količina. Sprememba hitrosti (to je pospešek) je dana z Newtonovim zakonom dinamike:

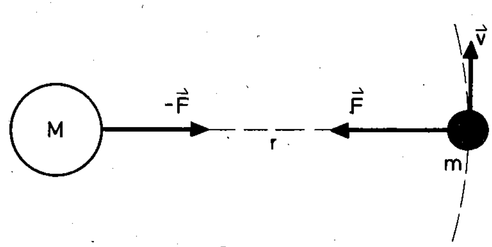
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\mathbf{v})/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathbf{G}/\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{G}/\mathrm{d}t} \qquad (2.3)$$

Sila je enaka odvodu gibalne količine po času; je kvocient spremembe gibalne količine ($\mathrm{d}\mathbf{G}$) in časovnega intervala ($\mathrm{d}t$), v katerem se sprememba pripeti; pove spremembo gibalne količine v časovni enoti.

Iz enačbe (2.3) sledi, da je:

$$\mathrm{d}\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathrm{d}t$$

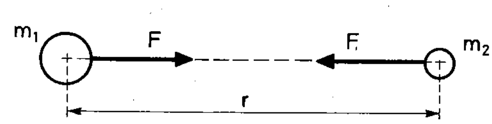


Slika 2.4

Produkt sile in časovnega intervala, v katerem sila učinkuje, se imenuje **sunek sile**. V kratkem časovnem intervalu dt je sunek sile **F** enak $\mathbf{F}\mathrm{d}t$. Vidimo, da je **sunek sile enak spremembi gibalne količine**; $\mathbf{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathbf{G}$.

Recimo, da je gibalna količina telesa v trenutku t_1 enaka $\mathbf{G}_1$, v kasnejšem trenutku t_2 pa $\mathbf{G}_2$. V časovnem intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ se torej gibalna količina spremeni za $\Delta\mathbf{G} = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1$, kar je vsota (integral) diferencialnih sprememb $\mathrm{d}\mathbf{G}$, ki nastanejo v vmesnih kratkih časovnih intervalih $\mathrm{d}t$:

$$\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \Delta\mathbf{G} = \int \mathrm{d}\mathbf{G} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathrm{d}t \quad \text{kjer je} \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathrm{d}t = \textbf{sunek sile v časovnem intervalu } \mathbf{t_2 - t_1} \qquad (2.4)$$



Slika 2.5

Celotna sprememba gibalne količine je enaka celotnemu sunku sile ali drugače; **končna gibalna količina je vektorska vsota začetne gibalne količine in sunka sile** (slika 2.3):

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \qquad (2.5)$$

Gravitacijska sila – teža

Vsa telesa se medsebojno privlačujejo z gravitacijsko silo. Ta učinkuje tudi na daljavo in skozi brezzračni prostor. Gravitacijska privlačnost teles je odvisna od njihove mase in od njihove medsebojne oddaljenosti. Čim masivnejša so telesa in čim bliže so drugo drugemu, tem močnejša je gravitacijska privlačna sila med njimi.

Odvisnost gravitacijske sile od mase teles in njihove razmaknjenosti (t. i. **gravitacijski zakon**) je prvi izpeljal **Isaac Newton,** ko je pojasnil kroženje planetov okrog Sonca.

Zemlja kroži okrog Sonca po eliptičnem tiru, ki ga v prvem približku aproksimiramo s krožnico; njena povprečna odaljenost (r) od Sonca je $149{,}5 \cdot 10^6$ km (pozimi 147,0 milj. km, poleti 152,0 milj. km); ta razdalja se v astronomiji uporablja kot enota dolžine (UA):

$$1 \text{ UA} = 149{,}5 \cdot 10^6 \text{ km} = 1{,}495 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Obhodni čas (t_o) Zemljinega letnega kroženja je 1 leto, to je 365,25 dni. Tudi drugi planeti krožijo okrog Sonca po bolj ali manj krožnih tirnicah. Njihove povprečne oddaljenosti in obhodni časi so v tabeli. Bolj ko je planet oddaljen od Sonca, daljši je njegov obhodni čas (daljše je leto na planetu). Zanimivo je, da je količnik med kubom povprečne oddaljenosti planeta od Sonca (r^3) in kvadratom njegovega obhodnega časa (t_o^2) za vse planete našega osončja enak (tretji stolpec v tabeli):

Planet	r (UA)	t_o (leto)	r^3/t_o^2 (UA^3/leto^2)
Merkur	0,387	0,241	0,998
Venera	0,723	0,616	0,996
Zemlja	1,000	1,000	1,000
Mars	1,524	1,88	1,001
Saturn	5,20	11,86	1,000
Jupiter	9,54	29,46	1,000
Uran	19,18	84,0	1,001
Neptun	30,06	164,8	1,001
Pluton	39,5	247,7	1,001

$$r^3/t_o^2 = K = 1 \text{ UA}^3/\text{leto}^2 = 3{,}36 \cdot 10^{18} \text{ m}^3/\text{s}^2 \qquad (2.6)$$

To odvisnost je iz merskih podatkov izluščil astronom J. Kepler, zato se njemu v čast imenuje **Keplerjev zakon**. S pomočjo tega zakona je I. Newton odkril gravitacijski zakon.

Kroženje planetov okrog Sonca omogoča gravitacijska sila F, s katero Sonce privlačuje planete in jim vsiljuje radialni pospešek (gl. 1.47) $a_r = r\omega^2 = r(2\pi/t_o)^2$. Newtonov zakon dinamike lahko uporabimo za kroženje planetov, zato dobimo:

$$F = ma_r = m \cdot 4\pi^2 r/t_o^2 = m \cdot 4\pi^2 K/r^2 \text{ (slika 2.4)} \qquad (2.7)$$

pri čemer smo še uporabili Keplerjev zakon (2.6): $t_o^2 = r^3/K$.

Vidimo, da je gravitacijska sila Sonca premo sorazmerna z maso planeta. To velja splošno: **gravitacijska sila je premo sorazmerna z maso telesa, na katerega učinkuje.**

Naprej razmišljamo takole: s kolikršno silo privlačuje Sonce planet, s tolikšno silo privlačuje tudi planet Sonce. Sila F iz enačbe (2.7) je torej tudi gravitacijska sila, s katero planet vleče k sebi Sonce. Torej mora biti ta sila premo sorazmerna tudi z maso Sonca (M). Ta je lahko skrita edinole v Keplerjevi konstanti K, ki je skupna za vse planete in zato karakteristična za naše osončje. Zato pišemo Keplerjevo konstanto K v obliki $K = M . G/4\pi^2$, pri čemer smo vpeljali novo konstanto G, ki je univerzalna (neodvisna od snovi) in se imenuje **gravitacijska konstanta**. Sledi:

$$F = G\, Mm/r^2$$

Gravitacijsko konstanto G lahko neposredno izračunamo, če poznamo maso Sonca M ($= 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg):

$$G = 4\pi^2 K/M = 4\pi^2 \cdot 3{,}36 \cdot 10^{18} \text{ m}^3\text{s}^{-2}/2{,}0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$
$$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$$

Izraz za gravitacijsko silo med Soncem in planeti je Newton posplošil v **gravitacijski zakon,** ki velja za vsa telesa, tudi za telesa na zemeljskem površju.

Telo z maso m_1 in telo z maso m_2, ki sta razmaknjeni za r, se medsebojno privlačujeta z **gravitacijsko silo**:

$$\boxed{F = Gm_1m_2/r^2} \qquad (2.8)$$

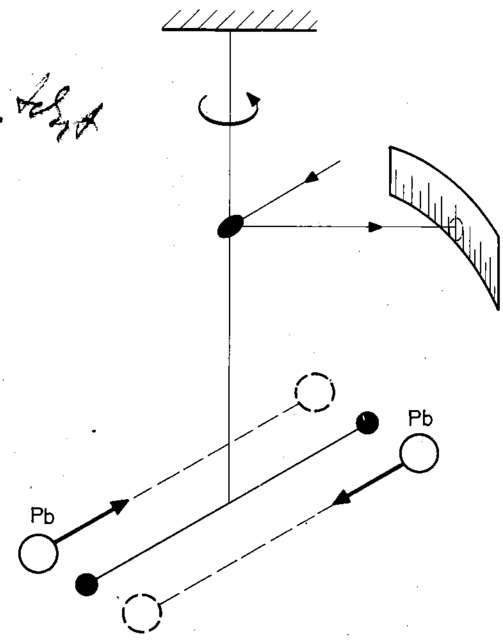
ki **je premo sorazmerna s produktom mas obeh teles in obratno sorazmerna s kvadratom njune oddaljenosti.** Sila deluje v smeri veznice obeh teles (slika 2.5).

Da Newtonov gravitacijski zakon zares velja tudi za telesa na zemeljskem površju, je potrjeno z meritvijo gravitacijske konstante G; dobimo namreč enako vrednost kot iz opazovanja gibanja planetov.

Gravitacijsko konstanto izmerimo s Cavendishovo tehtnico (slika 2.6). Na koncu viseče tenke žičke je v sredini pritrjena vodoravna lesena palica (dolžina 1,8 m); na konceh palice sta svinčeni kroglici (premer 5 cm). Ob vsaki kroglici je postavljena velika svinčena krogla (premer 30 cm, Pb na sliki 2.6). Če krogli nenadoma premaknemo od ene kroglice do druge, se viseča žička zasuče. Zasuk žičke izmerimo s svetlobnim žarkom, ki se odbije od zrcalca na žički do prosojnega zaslona. Tovrstna tehtnica je dovolj občutljiva, da lahko izmeri šibko gravitacijsko silo med veliko in malo svinčeno kroglo.

Gravitacijska sila med telesi na zemeljskem površju je zelo šibka (le neznatno vpliva na gibanje teles) in jo večinoma zanemarimo v primerjavi z drugimi silami. Ta sila je pomembna le, če je vsaj eno telo astronomsko, npr. Zemlja.

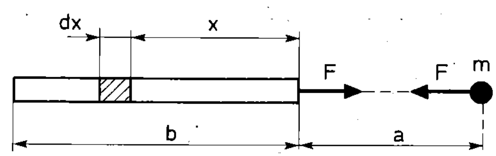
Newtonov gravitacijski zakon (2.8) lahko brez zadržkov uporabimo za planete in Sonce. Njihova velikost je namreč majhna v primerjavi z oddaljenostjo in je zato vseeno, od kod do kod merimo razdaljo r, ki nastopa v zakonu. Pri telesih na zemeljskem površju pa je vprašanje, katera razdalja je r. Če telesa niso majhna v primerjavi z njihovo medsebojno oddaljenostjo (če torej niso točkasta telesa), je gravitacijska sila med njimi odvisna tudi od oblike, velikosti in usmerjenosti teles v prostoru. Za takšna telesa gravitacijski zakon v obliki enačbe (2.8) ne velja. Pomagamo si tako, da telesa v mislih razdelimo na diferencialno majhne dele, za katere lahko uporabimo gravitacijski zakon (2.8). Izračunamo delne gravitacijske sile med posameznimi pari točkastih delov obeh teles in poiščemo njihovo rezultanto, ki je gravitacijska sila med celotnima telesoma.



Slika 2.6

Primeri:

1. Točkasto telo in palica. Točkasto telo z maso m leži v smeri palice, za a oddaljeno od njenega bližnjega konca (slika 2.7). Palica je homogena, njena masa je M, dolžina pa b. S kolikšno gravitacijsko silo se privlačujeta palica in točkasto telo?

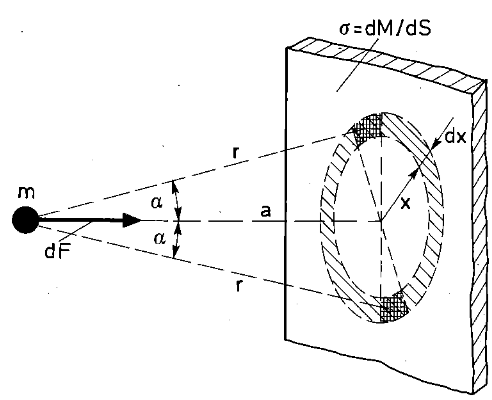


Slika 2.7

Palico v mislih razrežemo na koščke; vsak od njih je dolg dx in ima maso dM = (M/b)dx. Košček dM z oddaljenosti x od desnega konca palice (gl. sliko 2.7) privlačuje točkasto telo m s silo $dF = GmdM/(a+x)^2 =$ $= (GmM/b)(a+x)^{-2}dx$. Celotna sila F je vsota (integral) prispevkov posameznih koščkov:

$$F = \int dF = (GmM/b)\int_0^b (a+x)^{-2}dx = \frac{GmM}{a(a+b)}$$

2. Točkasto telo in velika plošča. Točkasto telo m je za a oddaljeno od velike ravne plošče. Plošča je homogena s ploskovno gostoto mase $\sigma = dM/dS$ (to je masa na enoto površine, kg/m^2). Določi gravitacijsko silo med točkastim telesom in ploščo!



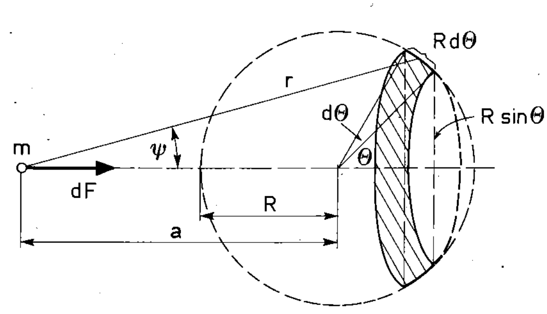
Slika 2.8

Ploščo v mislih razrežemo na koncentrične kolobarjaste trakove s središčem v vznožju točkastega telesa (slika 2.8). Kolobar s polmerom x in širino dx ima površino $dS = 2\pi x dx$ in maso $dM = \sigma dS = 2\pi\sigma x dx$. Točkasta telesa s tega kolobarja privlačujejo točkasto telo m s silo dF, ki je zaradi simetrije pravokotna na ploščo in znaša: $dF = GmdM \cdot r^{-2}\cos\alpha = 2\pi\sigma Gm \cdot r^{-2}$ $\cos\alpha x dx$, kjer je $r = a/\cos\alpha$ in $x = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Celotna sila F je integral prispevkov dF posameznih kolobarjev:

$$F = 2\pi\sigma Gm \int_0^\infty r^{-2}\cos x dx = 2\pi\sigma Gm \int_0^{\pi/2}\sin\alpha d\alpha = $$
$$= 2\pi\sigma Gm$$

Dobimo presenetljiv rezultat: gravitacijska privlačna sila med točkastim telesom in veliko ploščo je neodvisna od oddaljenosti telesa od plošče (a); ne glede na to, ali je telo blizu plošče ali daleč proč od nje, čuti enak gravitacijski privlak.

3. Točkasto telo in kroglasta lupina. Točkasto telo z maso m je za a oddaljeno od središča tanke kroglaste lupine, ki ima polmer R in maso M (slika 2.9). Snov lupine je enakomerno razporejena po površini $4\pi R^2$, tako da na enoto površine odpade masa $\sigma = dM/dS =$ $= M/4\pi R^2$.



Slika 2.9

Lupino v mislih razdelimo na ozke kolobarjaste trakove, katerih skupna os je vzdolž veznice točkasto telo – središče lupine. En tak kolobar (s kotom ob vrhu med θ in $\theta + d\theta$) ima površino $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ in maso $dM = \sigma dS$. Celotno lupino zajamemo s θ od 0 do π.

Kolobarjast trak je sestavljen iz točkastih delov, ki so približno enako oddaljeni (r) od telesa m. Rezultanta vseh sil, s katerimi ti deli privlačujejo telo m, ima smer veznice središče lupine – točkasto telo in znaša: $dF = GmdM \cdot r^{-2}\cos\psi = Gm\sigma \cdot 2\pi R^2 r^{-2} \sin\theta\cos\psi d\theta$, kjer je $r^2 = a^2 + R^2 + 2aR\cos\theta$ in $\cos\psi = (a + R\cos\theta)/r$. Celotna sila F, s katero vsi kolobarjasti trakovi kroglaste lupine privlačujejo točkasto telo m, je dana z integralom prispevkov dF, pri čemer gre θ od 0 do π:

$$F = 2\pi R^2\sigma mG \int_0^\pi (a + R\cos\theta)(a^2 + R^2 + 2aR\cos\theta)^{-3/2}\sin\theta d\theta$$

Vrednost integrala je $2/a^2$, če je $a > R$, in je nič za $a < R$. Če je torej točkasto telo m zunaj kroglaste lupine ($a > R$), jo privlačuje (ona pa njega) s silo:

$$F = 2\pi R^2\sigma mG \cdot 2/a^2 = GmM/a^2$$

ki je tolikšna, kot da bi bila kroglasta lupina točkasto telo v srediušču, kot da bi bila njena snov zbrana v središču.

Zanimivo je, da **kroglasta lupina ne učinkuje z gravitacijsko silo na telo, če je telo znotraj nje;** za $a < R$ je namreč $F = 0$. Rezultanta gravitacijskih sil, s katerimi posamezni deli kroglaste lupine učinkujejo na telo v notranjosti, se izniči, ne glede na to, kje v notranjosti lupine je telo. Lupina ne učinkuje na telesa v svoji notranjosti; deluje le na telesa iz okolice, na te pa tako, kot da bi sama bila točkasto telo v lastnem središču.

4. Točkasto telo in polna krogla. Polna homogena krogla ima maso M in polmer R; njeno središče je za a oddaljeno od točkastega telesa m.

Kroglo v mislih olupimo na tanke kroglaste lupine; vsaka od njih je debela dr, polmer r pa gre od 0 do R. Celotna masa M krogle je enakomerno razporejena po notranjosti; na enoto prostornine zato odpade masa $3M/4\pi R^3$. Masa lupine s polmerom r zato znaša $dM = (3M/4\pi R^3)dV = (3M/4\pi R^3) \cdot 4\pi r^2 dr = (3M/R^3)r^2 dr$.

Vsaka lupina učinkuje le na telesa iz okolice, in to kot da bi sama bila točkasto telo. Za $a \geqslant R$ zato dobimo, da celotna krogla deluje na točkasto telo m s silo:

$$F = GmM/a^2 \quad \text{za} \quad a \geqslant R$$

Na telo v notranjosti krogle ($a < R$) učinkujejo le lupine z $r \leqslant a$. Njihova celotna masa je $(3M/4\pi R^3) \cdot 4\pi a^3/3 = M(a^3/R^3)$, zato dobimo:

$$F = Gm(Ma^3/R^3)/a^2 = G(mM/R^3)a \quad \text{za} \quad a \leqslant R$$

Če označimo silo F za $a = R$ (telo na površini krogle) z $F(R) = GmM/R^2$, lahko gravitacijsko silo med točkastim telesom m in polno kroglo napišemo v obliki:

$$F = \begin{cases} F(R)R^2/a^2 & \text{za} \quad a \geqslant R \\ F(R)a/R & \text{za} \quad a \leqslant R \end{cases} \tag{2.9}$$

Dokler je telo v notranjosti polne homogene krogle ($a < R$), narašča gravitacijska sila med njim in kroglo premo sorazmerno z oddaljenostjo od središča. Sila je največja, kadar je telo na površini krogle ($a = R$). V okolici krogle ($a > R$) pa sila pojema s kvadratom oddaljenosti od središča. Črtkana krivulja na sliki (2.10) predstavlja odvisnost gravitacijske sile F med točkastim telesom m in kroglasto lupino (z maso M in polmerom R) od oddaljenosti (a) telesa od središča lupine. Pri $a = R$ je ta krivulja nezvezna, nenadoma se spremeni s $F(R)$ na 0. Zvlečena krivulja se nanaša na polno homogeno kroglo (z enako maso M in polmerom R). Za $a > R$ se krivulji ne razlikujeta (zakaj ne?), razlikujeta pa se za $a < R$: pri lupini je $F = 0$, pri krogli pa se linearno zmanjšuje k nič v središču ($a = 0$).

Teža – težni pospešek

Na vsako telo na zemeljskem površju in bližnji okolici deluje gravitacijska privlačna sila Zemlje. Privlačnost Lune in drugih nebesnih teles (tudi Sonca) zaradi velike oddaljenosti zanemarimo. Ravno tako ne upoštevamo medsebojne privlačnosti teles.

Gravitacijska sila, s katero Zemlja vleče telo navzdol, se imenuje **teža telesa** (**T**). Telo tehta (ima težo), ker ga Zemlja vleče navzdol z gravitacijsko silo. Ako bi Zemlja bila popolna krogla, bi imela teža telesa smer natančno k središču Zemlje. Zaradi dnevnega vrtenja Zemlje je Zemlja nekoliko sploščena, je skoraj okrogel elipsoid s krajšo (polarno) polosjo 6357 km in z daljšo (ekvatorialno) polosjo 6378 km. Povprečni polmer Zemlje (to je polmer nadomestne krogle z enako prostornino kot dejanski elipsoid) je 6371 km. Natančnejša merjenja s sateliti so celo pokazala, da je južna polobla za spoznanje debelejša od severne, tako da ima Zemlja hruškasto obliko.

Prosto telo zaradi teže pospešeno pada s **težnim pospeškom** (**g**). Iz Newtonovega zakona dinamike (2.1) potem sledi:

$$\mathbf{T} = m\mathbf{g} \tag{2.10}$$

Ne pozabimo, da Newtonov zakon dinamike velja le za inercialne koordinatne sisteme. Zemlja pa je neinercialni sistem, saj se vrti okrog svoje osi, obenem pa še kroži okrog Sonca. Radialni pospešek zaradi dnevnega vrtenja je največji na ekvatorju in znaša $R\omega^2 = R(2\pi/\text{dan})^2 = 3{,}4\ \text{cm/s}^2$, radialni pospešek pa je zaradi letnega kroženja okrog Sonca približno $0{,}6\ \text{cm/s}^2$. Glede na to, da je težni pospešek okrog $980\ \text{cm/s}^2$, lahko radialna pospeška Zemlje v prvem približku zanemarimo in Zemljo obravnavamo kot inercialni koordinatni sistem. Le če je natančna vrednost težnega pospeška pomembna, moramo upoštevati tudi vrtenje oziroma kroženje Zemlje, to je upoštevati moramo razliko med relativnim in absolutnim pospeškom.

Teža telesa ($\mathbf{T} = m\mathbf{g}$) je gravitacijska sila med telesom in Zemljo, torej je dana z Newtonovim gravitacijskim zakonom (2.8). Zemlja z maso M_z privlačuje telo z maso m, ki je na višini z nad zemeljskim površjem, to je na oddaljenosti $r = R + z$ od središča Zemlje, z gravitacijsko silo:

$$T = GmM_z/r^2 = mg \quad \text{ali}$$
$$g = GM_z/r^2 \qquad M_z = 6{,}0 \cdot 10^{24}\text{kg}$$

Vidimo, da je težni pospešek g neodvisen od mase telesa. Parametra G in M_z raje izrazimo s pospeškom g_0 telesa na površju Zemlje:

$$g(r = R) = g_0 = GM_z/R^2$$
$$g = g_0R^2/r^2 = g_0(1 + z/R)^{-2} \qquad (2.11)$$

Težni pospešek se z višino zmanjšuje; in sicer s kvadratom oddaljenosti od središča Zemlje. Največji je v neposredni bližini zemeljskega površja. Za $z \ll R = 6370$ km lahko vzamemo: $g \approx g_0$, da se težni pospešek ne spreminja z višino.

Težni pospešek merimo z **gravimetrom,** to je občutljiva vzmetna tehtnica za merjenje gravitacijske sile. Z natančnim merjenjem so določili njegovo spreminjanje s krajem, predvsem z geografsko širino (φ). Spreminjanje z geografsko širino je posledica vrtenja Zemlje in sploščenosti njene oble. Mednarodno sprejeta **gravitacijska enačba** podaja odvisnost pospeška g_0 od geografske širine (ta se nanaša na zemeljska tla):

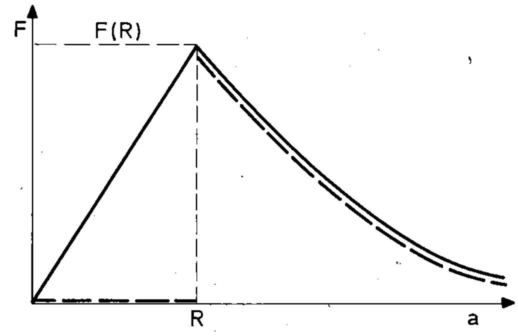
$$g_0 = 9{,}7805\,(1 + 0{,}005288\,\sin^2\varphi - 0{,}000006\,\sin^2 2\varphi)\ \mathrm{m/s^2}$$

Težni pospešek je največji na polu – 9,8322 m/s² in najmanjši na ekvatorju – 9,7805 m/s². Razlika med polarno in ekvatorialno vrednostjo težnega pospeška je okrog 0,5%, od tega 0,33% zaradi vrtenja Zemlje in 0,17% zaradi sploščenosti oble.

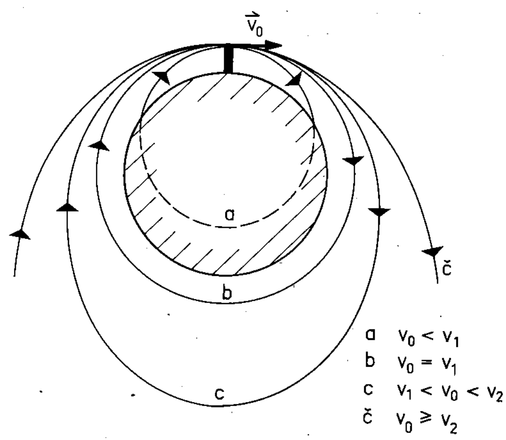
Težni pospešek na površju drugih planetov je odvisen predvsem od mase in velikosti planetov. V tabeli so pospeški g_0 za posamezna nebesna telesa (upoštevan je le gravitacijski vpliv samega nebesnega telesa). Na Luni je težni pospešek kar 6 krat manjši kot na Zemlji. 60-kilogramski človek, ki na zemeljska tla pritiska s silo 60 kp = 600 N, pritiska na Lunina tla le s silo 100 N. Tudi na Marsu je pospešek precej (5 krat) manjši kot na Zemlji. Zelo velik težni pospešek vlada na površini Jupitra in seveda na Soncu.

Težni pospešek na površju nebesnih teles

	g (m/s²)	g/g_z
Sonce	275	28
Merkur	2,5	0,26
Venera	8,8	0,90
Zemlja	9,8	1,00
Luna	1,6	0,16
Mars	2,0	0,20
Jupiter	26	2,65
Saturn	11	1,12
Uran	9,4	0,96
Neptun	9,8	1,00



Slika 2.10



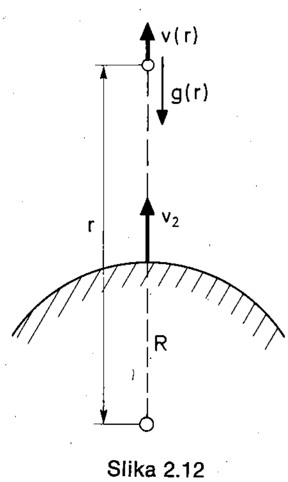
Slika 2.11

Gibanje satelitov

Pri obravnavi gibanja satelitov ali raket v bližnji okolici Zemlje (nekaj sto km nad površjem) lahko gravitacijsko privlačnost Lune in Sonca zanemarimo v primerjavi s privlačno silo Zemlje. Sonce vsiljuje zemeljskim predmetom pospešek 0,6 cm/s², Luna pa 0,0033 cm/s², kar je oboje malo v primerjavi s težnim pospeškom 980 cm/s². Upoštevamo le gravitacijsko silo Zemlje, to je težo satelita:

$$\mathbf{T} = m\mathbf{g}(r) = -GM_zm\mathbf{r}/r^3 = m\mathbf{g}_0R^2/r^2 \qquad (2.11a)$$

Krajevni vektor **r** satelita izhaja iz središča Zemlje; predznak minus je zato, ker ima teža **T** nasprotno smer kot krajevni vektor **r**.



Slika 2.12

Recimo, da z vrha visokega stolpa odvržemo telo z začetno hitrostjo v_0 v vodoravni smeri. Ta primer smo na strani 20 obravnavali kot vodoravni met, le da smo predpostavljali vodoravna tla in stalen težni pospešek. Tokrat vzamemo, da je težni pospešek usmerjen k središču Zemlje in da z višino pojema po enačbi (2.11). Telo pade na tla tem dlje od stolpa, s čim večjo hitrostjo v_0 ga odvržemo. Zemlja vpliva z gravitacijsko silo na gibanje telesa tako, kot da bi bila njena snov zbrana v središču, kot da bi gravitacijska sila učinkovala iz središča (t. i. **centralna sila**). Računanje gibanja telesa v polju takšne centralne sile žal presega okvir te knjige, zato bomo navedli le rezultat.

Telo se v splošnem giblje po eliptični tirnici, katere eno gorišče je v središču Zemlje. Če bi se lahko gibalo skozi notranjost Zemlje, bi se gibalo npr. po tiru a na sliki (2.11) in bi se vrnilo iz nasprotne smeri do izhodnega mesta na stolpu. Velikost in sploščenost eliptične tirnice sta odvisni od začetne hitrosti. v_0. Večja kot je ta, bolj je tirnica zakrožena. Pri $v_0 = v_1$ se tirnica zaokroži v krog (krivulja b na sliki 2.11): telo se kot satelit giblje po krogu (s polmerom r) okrog Zemlje, kar pomeni, da se giblje z radialnim pospeškom $a_r = v_1^2/r$, ki ga vsiljuje teža satelita:

$$T = ma_r$$
$$mg = mv_1^2/r = mg_0R^2/r^2$$
$$v_1^2(r) = g_0R^2/r \qquad (2.12)$$

Vidimo, da je hitrost kroženja satelita tem manjša, čim bolj je satelit oddaljen od Zemlje. Satelit se giblje najhitreje tik nad zemeljskim površjem, to je za $r = R$:

$$\boxed{v_1 = \sqrt{g_0R} = 7{,}9 \text{ km/s}} \qquad \textbf{prva kozmična hitrost} \qquad \textbf{(2.13)}$$

Če želimo, da satelit kroži tik nad zemeljskim površjem, ga moramo izstreliti v vodoravni smeri s hitrostjo v_1 = 7,9 km/s; tej hitrosti pravimo **prva kozmična hitrost.** Običajno izstrelijo satelite v krožne oz. elipsne tirnice na višini 200–300 km, kjer je zahtevana hitrost manjša od v_1, pa tudi zračni upor ne moti.

Na višini z nad zemeljskim površjem kroži satelit s hitrostjo $v_1(z) = v_1\,(1 + z/R)^{-1/2}$ in z obhodnim časom:

$$t_0 = 2\pi r/v_1(z) = (2\pi R/v_1)\,(1 + z/R)^{3/2}$$
$$t_0 = t_0(0)\,(1 + z/R)^{3/2},\; t_0(0) = 2\pi R/v_1 = 1{,}41 \text{ h} \qquad (2.14)$$

Obhodni čas satelita se z višino povečuje. Satelit je ves čas nad istim mestom zemeljskega površja (npr. komunikacijski satelit), če kroži enako hitro kot Zemlja, če je torej tako visoko, da je njegov obhodni čas 24 ur:

$$z = R\,[(24\text{ h}/1{,}41\text{ h})^{2/3} - 1] = 35800 \text{ km}$$

Vzemimo, da je začetna vodoravna hitrost v_0 satelita večja od prve kozmične hitrosti. Tirnica gibanja je spet eliptična, le da je zdaj središče Zemlje v drugem gorišču elipse (krivulja c na sliki 2.11). Če začetno hitrost še večamo, se eliptična tirnica tudi veča, napihuje in oddaljuje od Zemlje. Pri $v_0 = v_2$ se zaključena eliptična tirnica pretrga in odpre (elipsa se spremeni v parabolo, krivulja č na sliki 2.11). Začetna hitrost je dovolj velika, da telo premaga gravitacijsko privlačnost Zemlje in odleti proč. Začetna hitrost v_2, pri kateri se to zgodi, se imenuje **druga kozmična hitrost.**

Kolikšna je druga kozmična hitrost, najlaže ugotovimo, če satelit z zemeljskega površja izstrelimo v navpični smeri. S kolikšno začetno hitrostjo (v_2) ga moramo izstreliti, da zapusti območje zemeljske privlačnosti, da se ustavi šele v neskončni oddaljenosti (in se več ne vrne)? Primer je pravzaprav navpični met (gl. str. 14), le da tu upoštevamo, da se težni pospešek z višino zmanjšuje (slika 2.12).

Na oddaljenosti r od središča Zemlje ima satelit hitrost $v = dr/dt$. Pospešek na tej višini je $g(r) = g_0R^2/r^2 = -dv/dt$ (negativni predznak zato, ker pozitivnemu dt ustreza negativni dv, hitrost se med dviganjem zmanjšuje). Sledi:

$$g_0R^2r^{-2} = -\frac{dv}{dt} = -\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = -v\frac{dv}{dr} \qquad \text{ali}$$
$$v\,dv = -g_0R^2r^{-2}dr$$

Levo stran enačbe integriramo po v od v_2 do $v(r)$, desno stran pa po r od R do r. Dobimo:

$$v^2(r) - v_2^2 = 2g_0R^2(1/R - 1/r) \qquad \text{ali}$$
$$v^2(r) = v_2^2 - 2g_0R^2(1/R - 1/r) \qquad (2.15)$$

Ta enačba je posplošitev enačbe (1.22c), ki smo jo izpeljali za navaden navpični met. Lahko vzamemo, da je v bližini zemeljskega površja pospešek g konstanten ($= g_0$), torej velja $z \ll R$ in zato $r^{-1} = (R + z)^{-1} = R^{-1}(1 + z/R)^{-1} \approx R^{-1}(1 - z/R) = R^{-1} - z/R^2 + \ldots$ ter $v^2 = v_2^2 - 2g_0R^2(R^{-1} - R^{-1} + zR^{-2} - \ldots) \approx v_2^2 - 2g_0z$, kar že poznamo.

Druga kozmična hitrost v_2 je določena z zahtevo, da se satelit ves čas oddaljuje od Zemlje, da se ustavi kvečjemu v neskončnosti: $v(\infty) = 0$. Sledi:

$$0 = v_2^2 - 2g_0R^2(1/R - 1/\infty) \qquad \text{ali}$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2g_0R} = 11{,}2 \text{ km/s}} \qquad \textbf{druga kozmična hitrost} \qquad (2.16)$$

Če želimo, da satelit (raketa, vesoljska ladja) zapusti območje zemeljske privlačnosti, ga moramo izstreliti z zemeljskega površja najmanj z drugo kozmično hitrostjo v_2 = 11,2 km/s.

Primer:

Satelit kroži okrog Zemlje po krožnem tiru na višini h = 250 km nad ekvatorjem. Kolikšna je njegova hitrost? Koliko časa potrebuje za en obhod okrog Zemlje? Težni pospešek na površju Zemlje je g_0 = 9,78 m/s², polmer je R = 6378 km

$$v^2 = rg(r) = g_0R^2/r = g_0R^2/(R + h)$$
$$v = \sqrt{g_0R^2/(R + h)} = 7{,}75 \text{ km/s}$$
$$t_0 = 2\pi r/v = (2\pi R/v_1)(1 + h/R)^{3/2} \qquad (\text{gl. } 2.14)$$
$$t_0 = 1{,}41 \text{ h}\,(1 + 250/6378)^{3/2} = 1{,}49 \text{ h}$$

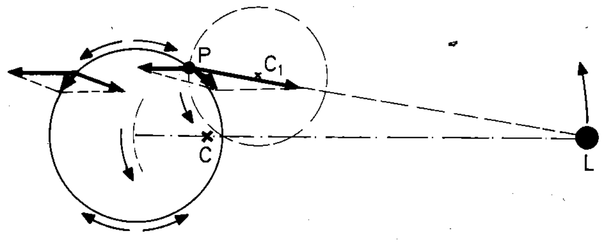
Plima in oseka

Gladina morij se periodično dviga (plima) in spušča (oseka). Vsak dan nastopita dve plimi in dve oseki; zaporedni plimi oziroma oseki se ponavljata s periodo 12^h25^{min}, kar je polovica Luninega dneva (časa, ko Luna ponovno prekorači dan meridian). Ko bi bila perioda plimovanja natanko 12 h, bi se plima in oseka ponavljali vsak dan ob enakem času, tako pa sta vsak naslednji dan zakasnjeni za 25 minut. Ker zaporedje plim in osek sledi Luninemu in ne Sončnemu dnevu, pomeni, da Luna močneje vpliva na plimovanje kot Sonce. Račun pokaže, da je vpliv nebesnega telesa na plimovanje zemeljskih voda premo sorazmeren z maso telesa in obratno sorazmeren s kubom njegove oddaljenosti. Kljub velikanski masi je vpliv Sonca na plimovanje zaradi precejšnje oddaljenosti le približno pol tolikšen kot vpliv Lune; razmerje med obema je $(M_S/M_L)(r_L/r_S)^3 = 0{,}45$. Kadar so Sonce, Luna in Zemlja v isti črti (ob ščipu ali mlaju), se gravitacijska vpliva Lune in Sonca seštejeta in plimovanje je tedaj najmočnejše. Ob prvem in zadnjem luninem krajcu pa sta plima in oseka najmanj izraziti.

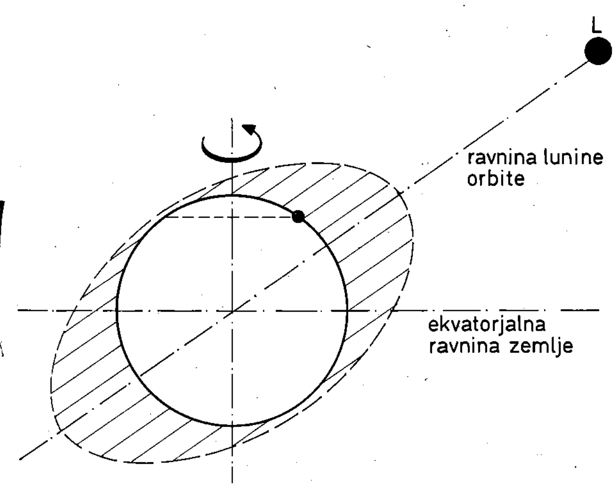
Periodično ponavljanje plime in oseke je posledica gravitacijske privlačnosti Lune (in nekoliko Sonca), mesečnega vrtenja Zemlje in Lune okrog njunega skupnega središča (C na sliki 2.13) ter dnevnega vrtenja Zemlje okrog polarne osi.

Pravimo, da Luna kroži okrog Zemlje, vendar to ne drži popolnoma. Dejansko se tudi Zemlja in Luna vrtita okrog skupnega masnega središča C, ki je za 3/4 Zemljinega polmera (R) oddaljeno od središča Zemlje. Okrog tega središča se Luna in Zemlja vrtita z obhodnim časom 27,3 dni. Zemlja pri tem kroži translatorno, tako da vsaka njena točka opisuje krog z enakim polmerom $(3/4)R$, le središča kroženja so za različne točke različna. Središče Zemlje kroži po krogu s središčem v skupnem masnem središču C, ki je na veznici Luna-Zemlja. Točka P na sliki (2.13) pa kroži po črtkanem krogu s središčem C_1.

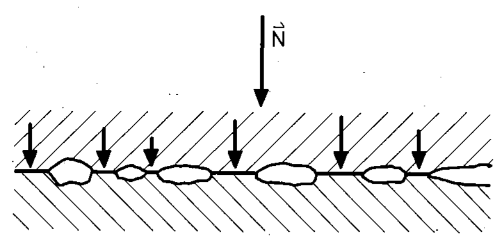
Opazujemo gibanje oceanskih voda na zemeljskem površju, torej gibanje v neinercialnem koordinatnem sistemu, ki kroži. Gibanje v takšnem koordinatnem sistemu pravilno opišemo (gl. str. 50) le, če poleg dejanskih sil upoštevamo še centrifugalno silo, ki je usmerjena proč od centra kroženja. Sledi, da na vsako točko Zemlje »deluje« poleg gravitacijske privlačne sile Lune še centrifugalna sila, ki je paralelna trenutni veznici Zemlja-Luna in usmerjena proč od centra C_1 (to je proč od Lune). V središču Zemlje sta gravitacijska privlačna sila Lune in centrifugalna sila nasprotno enaki ter se tako kompenzirata. Ker gravitacijska sila Lune pojema s kvadratom oddaljenosti od Lune, centrifugalna pa je za vse kraje enaka, je gravitacijska sila Lune na Lunini strani Zemlje močnejša od centrifugalne sile, na nasprotni strani Zemlje pa šibkejša. Rezultanta Lunine gravitacijske in centrifugalne sile je na različnih mestih zemeljskega površja (gl. sliko 2.13) usmerjena tako, da voda odteka s krajev, ki so pravokotni na veznico Luna-Zemlja (tam je oseka), in se gomili (plima) ob krajih, ki so najbliže Luni oziroma najbolj oddaljeni od nje. Dnevno vrtenje Zemlje okrog polarne osi povzroči, da zemeljske morske vode izmenoma prehajajo iz območja plime v območja oseke in obratno.



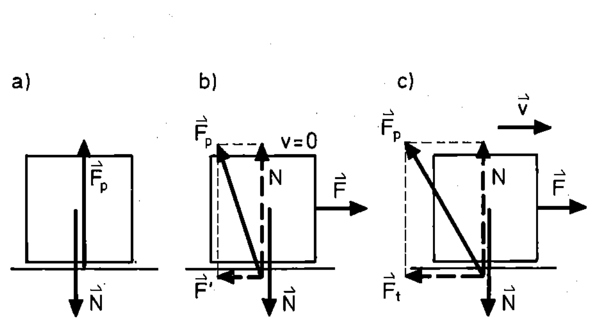
Slika 2.13



Slika 2.14



Slika 2.15



Slika 2.16

Zaporedni plimi običajno nista enako visoki; močni plimi sledi šibka, tej zopet močna itd. Vzrok temu je nagnjenost Lunine orbite glede na ekvatorialno ravnino Zemlje (slika 2.14). Ker nastane najmočnejša plima v smeri proti Luni, ima kraj na severni geografski širini na Lunini strani Zemlje visoko plimo, na nasprotni strani (to je 12 ur kasneje) pa nizko plimo.

Torna sila (sila trenja)

Telo običajno ni prosto; vezano je na podlago, na kateri leži oziroma se giblje po njej. Poleg drugih sil, ki nanj učinkujejo, moramo upoštevati tudi **silo podlage** ($\mathbf{F}_p$). Ta omogoča, da telo na podlagi miruje, vendar tudi nasprotuje premikanju telesa na podlagi.

Površina trdnega telesa nikoli ni povsem gladka. Še tako dobro polirana in očiščena površina kovine je videti hrapava, če jo gledamo pod mikroskopom. Staknjeni telesi se zaradi hrapavosti dotikata le na nekaterih mestih (slika 2.15). Na teh sta dovolj blizu drugo drugemu, da že učinkujejo močne sile med atomi sosednjih teles, ki telesi povežejo (t. i. površinska adhezija). Čim večja je skupna stična površina obeh teles, tem trdneje sta telesi povezani. Stična površina teles se poveča, če pritisnemo na telo v smeri pravokotno na podlago, npr. s silo N. Ta se osredotoči na majhne odseke stične površine, kjer se tlak zelo poveča. Zaradi povečanega tlaka se telo in podlaga na stičnih mestih plastično deformirata in stična površina se tako poveča. Obenem se telo in podlaga nekako plastično zvarita, kar dodatno ojači povezavo telesa na podlago. Ako bi se stična mesta razširila po celotni skupni ploskvi, bi se telesi povsem (trdno) spojili. Običajno zavzemajo stična mesta le 10 do 100 milijonink celotne površine, ki jo telesi skupno pokrivata.

Da se telo premakne vzdolž podlage (zdrsne), se morajo potrgati vezi med telesom in podlago. Zato je za premik telesa po podlagi potrebna sila v smeri podlage ali drugače; podlaga nasprotuje premiku telesa.

Značilnosti **sile podlage** ($\mathbf{F}_p$) si oglejmo s poskusom. Telo leži na ravni podlagi. Nanj lahko poleg teže $m\mathbf{g}$ učinkujejo še dodatne sile, ki ga pritiskajo ob podlago ali ga vlečejo proč. Celotno silo, ki učinkuje na telo v smeri pravokotno na podlago, označimo z N; s to silo telo pritiska na podlago, in sicer v smeri pravokotno na stično površino. Če telo leži prosto na vodoravni podlagi, je $\mathbf{N} = m\mathbf{g}$. Z dodatno pravokotno silo $\mathbf{F}$ povečamo pritisk telesa na podlago: $\mathbf{N} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}$. Če s silo $\mathbf{F}$ vlečemo telo proč od podlage, se pritisk telesa na podlago manjša. Pri $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}$ (dvižna sila enaka teži telesa) je $N = 0$, telo ne pritiska na podlago.

Podlaga se pod vplivom pravokotne sile $\mathbf{N}$, s katero telo pritiska nanjo, deformira in reagira s silo podlage $\mathbf{F}_p$, ki je nasprotno enaka sili, s katero telo pritiska nanjo. V tem primeru torej: $\mathbf{F}_p = -\mathbf{N}$. Na telo tako učinkujeta pravokotna sila $\mathbf{N}$ navzdol in nasprotno enaka sila podlage $\mathbf{F}_p$, tako da je telo v ravnovesju: $\mathbf{F}_p + \mathbf{N} = 0$ (slika 2.16a).

Mirujoče telo na podlagi začnemo vleči vzdolž podlage s silo $\mathbf{F}$, katere velikost postopoma povečujemo. Opazimo, da telo kljub vlečni sili vzdolž podlage še naprej miruje. Torej je rezultanta sil, ki učinkujejo na telo v smeri podlage, še vedno nič. To je možno le, če se sila podlage $\mathbf{F}_p$ nagne nazaj (nasprotno smeri vleka oziroma premika), tako da dobi projekcijo $\mathbf{F}'$ na smer podlage, ki nasprotuje vlečni sili: $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$ (slika 2.16b). Pravokotna projekcija sile podlage je še naprej nasprotno enaka pravokotni sili $\mathbf{N}$, s katero telo pritiska pravokotno na podlago. Če vlečno silo $\mathbf{F}$ povečujemo, se povečuje tudi projekcija $\mathbf{F}'$ sile podlage (sila podlage $\mathbf{F}_p$ se nagiba nazaj in povečuje). Toda ta projekcija se lahko povečuje le do zgornje meje $\mathbf{F}'_{max} = \mathbf{F}_s$, ki se imenuje **statična torna sila** (drugo ime zanjo je **sila lepenja**). Ko vlečna sila doseže vrednost F_s, se telo premakne. Statična torna sila je merilo za trdnost povezanosti telesa s podlago. Čim večji je F_s, tem večja vlečna sila je potrebna, da se telo premakne na podlagi.

Z merjenjem vlečne sile, pri kateri se telo na podlagi premakne, ugotovimo, da je v okviru natančnosti meritev **statična torna sila premo sorazmerna s pravokotno silo N, s katero telo pritiska na podlago:**

$$\boxed{F_s = k_s N} \tag{2.17}$$

Sorazmernostni faktor k_s (čisto število) se imenuje **statični torni koeficient**. Odvisen je od vrste in stanja obeh staknjenih teles, predvsem od njune hrapavosti. Grobe in hrapave površine imajo k_s okrog 1 (npr. avtomobilska guma na asfaltu), gladke površine pa okrog 0,1 – 0,2. Najmanjši k_s (okrog 0,02) imata dobro očiščeni, spolirani in naoljeni kovinski površini ter npr. moker led na mokrem ledu. Čiste, neoksidirane kovinske površine imajo sicer velik k_s (od 0,5 do 1), vendar na zraku kmalu oksidirajo, prevlečejo se z 1–10 nm debelo plastjo oksida, ki močno zmanjša k_s.

Zanimivo je, da je statični torni koeficient v okviru natančnosti merjenja neodvisen od velikosti stične površine teles. Če je ta (pri enaki pravokotni sili N) manjša, se sicer zmanjša površina stika telesa s podlago (čemur ustreza manjša sila povezanosti telesa s podlago), toda obenem se poveča tlak sile N, kar poveča deformacijo stičnih mest in s tem tudi celotno stično površino. Efekta si nasprotujeta in v prvem približku kompenzirata.

Brž ko vlečna sila $\mathbf{F}$ na sliki (2.16) preseže statično torno silo: $F > F_s = k_s N$, se telo premakne in začne drseti v smeri vlečne sile. Sila podlage $\mathbf{F}_p$ je tudi med gibanjem telesa nagnjena nazaj (slika 2.16c), le da ne tako močno kot ob začetnem premiku telesa. Projekcija sile podlage $\mathbf{F}_p$ na podlago med drsenjem telesa se imenuje **drsna torna sila** F_t ali kar **sila trenja**. Tudi ta je v prvem približku (podobno kot statična torna sila F_s) premo sorazmerna s silo N, s katero telo med gibanjem pritiska pravokotno na podlago:

$$\boxed{F_t = k_t N} \tag{2.18}$$

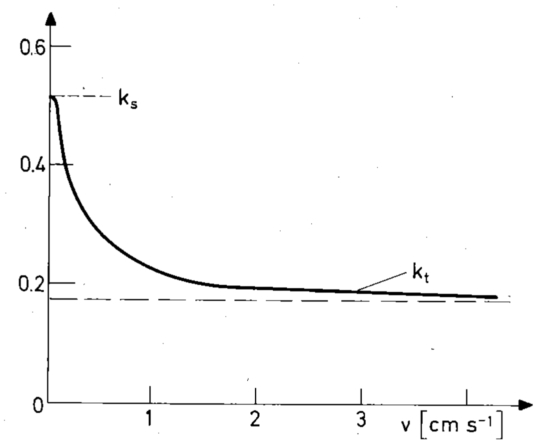
Sorazmernostni faktor k_t je **drsni torni koeficient**; je nekoliko manjši od statičnega tornega koeficienta k_s, obadva sta podobno odvisna od vrste snovi. Približna odvisnost drsnega tornega koeficienta od hitrosti drsenjua je skicirana na sliki (2.17). Opazno je nenadno zmanjšanje tornega koeficienta takoj ob premiku telesa (od k_s na k_t); med gibanjem se k_t v splošnem nekoliko zmanjšuje z naraščanjem hitrosti, vendar lahko v prvem približku vzamemo, da je neodvisen od hitrosti.

Pri mirujočem telesu na podlagi je projekcija sile podlage na smer podlage (F') nedoločena, lahko ima vrednosti med 0 in $F_s = k_s N$ (odvisno od vlečne sile):

$$0 \leqslant F' \leqslant F_s$$

Med gibanjem (drsenjem) pa je projekcija F' sile podlage enaka drsni torni sili $F_t = k_t N$. Tako **statična kot drsna torna sila vedno nasprotujeta premiku oziroma drsenju telesa po podlagi.** Če se smer gibanja (hitrosti) obrne, se obrne tudi smer torne sile.

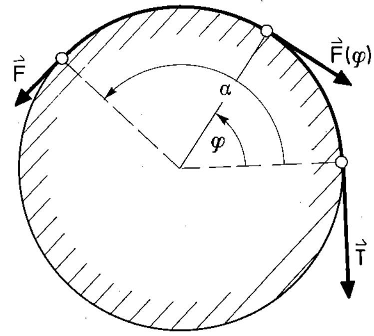
Statično trenje je potrebno in koristno, kjerkoli želimo preprečiti drsenje enega telesa ob drugem. Če z roko primemo vrv in jo potegnemo, roka ne zdrsne zaradi statične torne sile med roko in vrvjo. Da je ta dovolj velika, je vrv hrapava, roka pa ne sme biti vlažna ali mastna. Poleg tega vrv močno objamemo in sisnemo, s čimer povečamo pravokotno silo N. Vrv, ki jo večkrat ovijemo okrog droga, ne drsi okrog droga, četudi prosti konec vrvi vlečemo s precejšnjo silo. Tu sama vlečna sila povzroča pravokotno silo, s katero vrv pritiska na drog.



Slika 2.17

Primer:

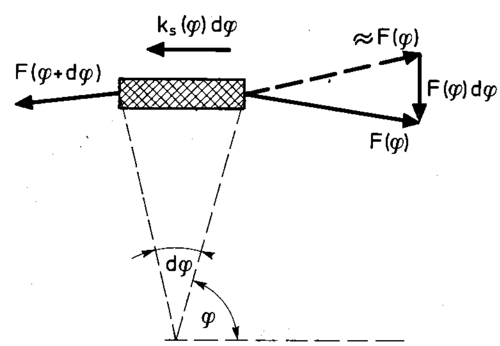
Vrv je ovita okrog fiksnega vodoravnega droga, tako da objema na krožnem loku kót α (slika 2.18). Desni konec vrvi vlečemo navzdol s silo **T** (npr. s težo obešene uteži). Najmanj s kolikšno silo **F** moramo vleči drugi konec vrvi v narisani smeri, da vrv zaradi tovora **T** ne zdrsne po obodu valja?



Slika 2.18

Zaradi torne sile med vrvjo in obodom gredi se sila v vrvi **F**(φ) spreminja vzdolž oboda (to je s kotom φ). V začetku ($\varphi = 0$) je **F**(0) = **T**, na drugem koncu, kjer se vrv odlepi od gredi ($\varphi = \alpha$), pa **F**(α). Vlečna sila **F** mora biti enaka – **F**(α).

Poglejmo, za koliko se sila v vrvi spremeni na majhnem odseku vrvi med kotoma φ in $\varphi + d\varphi$ (slika 2.19). Na ta odsek deluje ostala vrv z obeh strani s silama **F**(φ) in **F**($\varphi + d\varphi$), ki zaradi ukrivljenosti vrvi nista natanko v nasprotnih smereh; sila **F**(φ) je npr. zasukana za kót $d\varphi$ glede na silo **F**($\varphi + d\varphi$). Njuna rezultanta je velika $F(\varphi)d\varphi$ in ima smer k središču oboda. Izbrani odsek vrvi pritiska na obod droga s pravokotno silo $F(\varphi)d\varphi$, zato čuti torno silo $k_s F(\varphi)d\varphi$, ki nasprotuje zdrsu, ima nasprotno smer kot vlečna sila **F**(φ). Ker vrv ne sme zdrsniti, mora veljati:



Slika 2.19

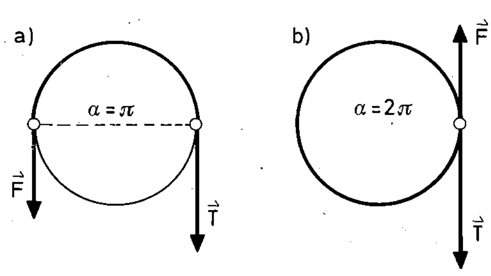
$$F(\varphi + d\varphi) + k_s F(\varphi)d\varphi = F(\varphi) \quad \text{ali}$$
$$dF = F(\varphi + d\varphi) - F(\varphi) = -k_s F(\varphi)d\varphi \quad \text{ali}$$

$$\frac{dF}{F} = -k_s d\varphi$$

Dobljeno enačbo integriramo: levo stran od T do F, desno pa od 0 do α. Dobimo:

$$\ln F - \ln T = -k_s\alpha \quad \text{ali}$$
$$F = T\exp(-k_s\alpha)$$

Vidimo, da je vlečna sila F, ki preprečuje zdrs vrvi po obodu fiksne gredi, manjša od tovora T za eksponentni faktor $\exp(-k_s\alpha)$; ta zelo hitro (eksponentno) pada z naraščanjem kota α, ki ga vrv objema na obodu gredi.



Slika 2.20

Če vlečna sila F vleče navzdol (slika 2.20a), je $\alpha = \pi$ in $F = T\exp(-k_s\pi)$; za $k_s = 0{,}5$ dobimo $F = T\exp(-0{,}5\pi) = 0{,}21\ T$ (vlečna sila je enaka le petini teže visečega tovora). Če vrv ovijemo enkrat okrog valja (slika 2.20b), je $\alpha = 2\pi$ in $F = T\exp(-\pi) = 0{,}043\ T$. Kolikokrat moramo oviti vrv okrog gredi, da je vlečna sila tisočkrat manjša od teže obešenega tovora? $F = 0{,}001\ T = T\exp(-k_s 2\pi n)$ ali $n = (1/2\pi k_s)\ln 1000 = 2{,}2$. Vrv moramo oviti nekaj več kot dvakrat.

Če je vlečna sila F močnejša od $T\exp(-k_s\alpha)$, skuša vrv zdrsniti v drugo smer – v smer vlečne sile. Tedaj se smer torne sile obrne, torni koeficient k_s v zgornjih enačbah spremeni predznak. Dokler je vlečna sila manjša od $T\exp(k_s\alpha)$, vrv še ne zdrsne v levo. Torej vrv ne zdrsne ne v levo ne v desno, če je:

$$T\exp(-k_s\alpha) \leqslant F \leqslant T\exp(+k_s\alpha)$$

Za hojo po tleh potrebujemo silo v smeri gibanja (npr. za premagovanje zračnega upora, ki nasprotuje gibanju). Zato se z nogama odrivamo od tal in izkoriščamo statično torno silo med podplati in tlemi. Ker hoče noga zdrsniti po tleh v smeri nazaj, ima torna sila smer naprej, v smer gibanja. Vsakdo ve, kako težko je hoditi, če je poledica; posebno težko je pospeševati, zavirati ali zavijati v stran. Transport z vozili na vrteča se kolesa omogoča prav statično trenje med kolesi in cestiščem. Vrteče se kolo skuša zdrseti po cestišču nazaj. Temu nasprotuje sila podlage, ki z vodoravno projekcijo F' vleče kolo naprej in tako omogoča pospešek (slika 2.21). Večji hitrosti vrtenja koles ustreza večja projekcija sile podlage (F') v smeri vožnje. Ko F' doseže zgornjo mejo $F_s = k_sN$, začne kolo na cestišču podrsavati. Statična torna sila potemtakem določa največji pospešek, ki ga na cestišču lahko dosežemo. Če se vprašamo, katera sila je neposredno odgovorna, da avto lahko vozi po cesti, je torej odgovor preprost: torna sila. Če ni trenja, npr. na gladkem, poledenelem cestišču, se lahko motor še tako zaganja in kolesa še tako hitro vrtijo, vendar se avto ne premakne.

O pomenu statične torne sile zgovorno priča tale primer: Fin pesek je sipek in tekoč, ker je trenje med sosednjimi kamenčki prešibko, da bi oviralo njihovo medsebojno premikanje. Če pa pesek damo v gumijasto vrečo, iz katere nato izsesamo zrak, tako da zunanji zračni tlak močno stisne vrečo s peskom, se statično trenje med kamenčki močno poveča in pesek učinkuje kot togo telo; z njim npr. lahko zabijamo žeblje.

Torno silo izkoriščamo, da ustavimo gibajoče se telo. Med zaviranjem z zavoro blokiramo kolesa, da prično drseti. Pojavi se torna sila $F_t = k_tN$, ki zavira drsenje. Zavorno silo povečamo, če zavoro nekoliko popustimo, da se kolo malo zakotali in se s tem stakne s cestiščem, tako da se zopet pojavi statična torna sila, ki je nekoliko večja od drsne F_t.

Primeri:

1. Zavorna pot. Avto vozi po vodoravni cesti s hitrostjo $v_0 = 20$ m/s, ko voznik nenadoma s pritiskom na zavoro blokira kolesa, da prično drseti. Na kolikšni razdalji in po kolikšnem času se avto ustavi, če je drsni torni koeficient med gumami in cestiščem enak $k_t = 0{,}8$?

Avto drsi enakomerno pojemajoče s pojemkom $a = -F_t/m = -k_tg$. Uporabimo zvezo (1.21) med hitrostjo in potjo za enakomerno pospešeno (pojemajoče) gibanje:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2ax \\ 0 &= v_0^2 - 2k_tgx \quad \text{ali} \\ x &= v_0^2/2k_tg = 25\ \text{m} \\ t &= v_0/k_tg = 2{,}5\ \text{s} \end{aligned} \tag{2.19}$$

2. Drsenje pod vplivom poševne sile. Telo z maso m leži na vodoravni podlagi. S kolikšnim pospeškom in v kateri smeri se giblje, če ga vlečemo s silo F, ki z vodoravno smerjo oklepa kót φ? (Slika 2.22)

Obstajata dve možnosti:

$F\sin\varphi > mg$ (navpična projekcija dvižne sile večja od teže telesa): telo se dvigne in pospešuje v smeri rezultante $\mathbf{mg} + \mathbf{F}$ s pospeškom $\mathbf{a} = \mathbf{g} + \mathbf{F}/m$.

$F\sin\varphi < mg$: telo leži na podlagi ali drsi po njej.

V drugem primeru telo pritiska na podlago s pravokotno silo $mg - F\sin\varphi$, zato poleg teže $\mathbf{mg}$ in vlečne sile $\mathbf{F}$ deluje nanj še sila podlage $\mathbf{F}_p$. Navpična projekcija N zadnje je nasprotno enaka sili $mg - F\sin\varphi$, s katero telo pritiska na podlago:

$$N = mg - F\sin\varphi$$

Vodoravna projekcija sile podlage pa je nasprotno enaka vodoravni projekciji vlečne sile: $F' = F\cos\varphi$ (gl. str. 38). Če je ta manjša od statične torne sile $F_s = k_sN$, telo na podlagi miruje (kljub vlečni sili). Pri $F\cos\varphi > k_sN$ pa telo zdrsi in se nato giblje vzdolž podlage enakomerno pospešeno s pospeškom:

$$\begin{aligned} a &= (F\cos\varphi - F_t)/m = (F\cos\varphi - k_tN)/m = \\ a &= F(\cos\varphi + k_t\sin\varphi)/m - gk_t \end{aligned}$$

3. Ravnovesje na klancu. Kvadrasto telo z maso m leži na klancu, katerega strmina je podana z naklonskim kotom φ. Na telo učinkujeta teža mg in sila podlage F_p. Prvo razstavimo na **dinamično komponento** $mg\sin\varphi$, ki pospešuje telo navzdol po klancu, in na **statično komponento** $mg\cos\varphi$, s katero telo pritiska pravokotno na podlago. Silo podlage F_p razstavimo, enako kot v prejšnjem primeru, na pravokotno komponento N in na komponento F' vzdolž podlage. Komponenta N je enaka sili, s katero telo pritiska pravokotno na podlago:

$$N = mg\cos\varphi$$

Recimo, da je klanec v začetku zelo položen in da njegovo strmino postopoma povečujemo. V začetku telo še miruje na klancu in je $mg\sin\varphi = F'$. Z naraščanjem strmine se F' povečuje, obenem pa se zmanjšuje pravokotni pritisk telesa na podlago in s tem tudi zgornja meja za F' (gl. str. 38). Ko F' doseže zgornjo mejo $F'_{max} = F_s = k_sN = k_s mg\cos\varphi$, telo zdrsne po klancu navzdol. To se zgodi pri kotu $\varphi = \varphi_s$, za katerega velja:

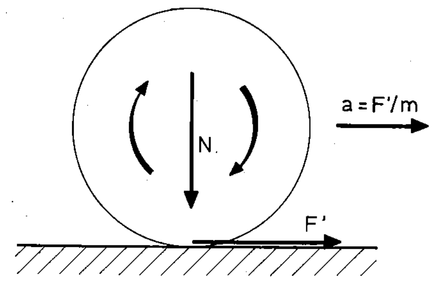
$$\begin{aligned} mg\sin\varphi_s &= k_s mg\cos\varphi_s \quad \text{ali} \\ \mathrm{tg}\varphi_s &= k_s \end{aligned} \tag{2.20a}$$

Statični torni koeficient je enak tangensu naklonskega kota strmine, pri kateri mirujoče telo na klancu zdrsne.

Ko telo zdrsne, naravnamo (nekoliko zmanjšamo) strmino klanca ($\varphi = \varphi_t$), tako da telo drsi navzdol po klancu enakomerno s stalno hitrostjo, kar pomeni, da je dinamična komponentna teža enaka drsni torni sili:

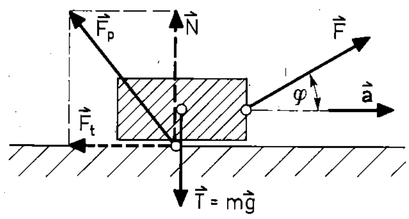
$$mg \sin\varphi_t = k_t mg \cos\varphi_t \quad \text{ali}$$
$$k_t = \mathrm{tg}\varphi_t \qquad (2.20b)$$

Drsni torni koeficient je enak tangensu naklonskega kota strmine, po kateri telo drsi enakomerno.



Slika 2.21

Telo miruje na klancu, če je naklonski kót strmine manjši od φ_s. Pri $\varphi > \varphi_s$ pa telo drsi pospešeno navzdol. Če kljub preveliki strmini želimo, da telo na klancu miruje, moramo z dodatno silo F pritiskati na telo poševno, npr. pod kotom α glede na klanec (slika 2.23). Potisna sila F potrebna za ravnovesje telesa na klancu, lahko pri danem kotu α zavzame različne vrednosti med F_{min} in F_{max}. Spodnja meja F_{min} je najmanjša zahtevana sila F; pri tej telo začne drseti navzdol, komponenta sile podlage F' je usmerjena navzgor in enaka F_s. Za ta mejni primer velja:



Slika 2.22

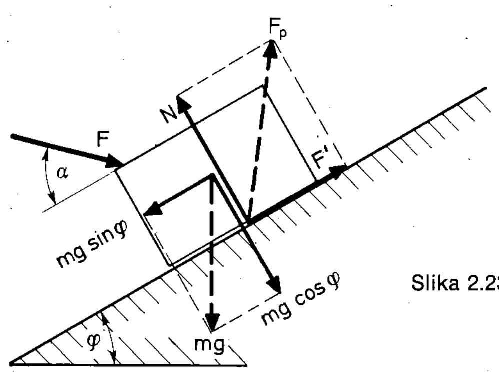
$$F_{min}\cos\alpha - mg\sin\varphi + F_s = 0,\ F_s = k_s N$$

Pravokotna sila N je nasprotno enaka sili, s katero telo pritiska pravokotno na podlago, to je:

$$N = mg\cos\varphi + F_{min}\sin\alpha$$

Sledi:

$$F_{min} = mg(\sin\varphi - k_s\cos\varphi)/(\cos\alpha + k_s\sin\alpha) \qquad (2.21a)$$

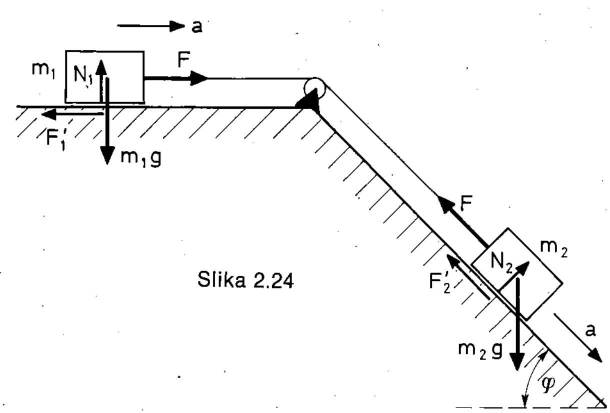


Slika 2.23

Zgornja meja potisne sile, F_{max}, pa je sila, pri kateri telo zdrsi navzgor po klancu, komponenta sile podlage F' je enaka F_s in usmerjena navzdol. Izraz za F_{max} lahko dobimo neposredno iz enačbe (2.21a), če statičnemu tornemu koeficientu k_s spremenimo predznak:

$$F_{max} = mg(\sin\varphi + k_s\cos\varphi)/(\cos\alpha - k_s\sin\alpha) \qquad (2.21b)$$

Recimo, da večamo naklonski kót α potisne sile F, tako da sila F bolj in bolj pritiská pravokotno na podlago. Ko α doseže φ_s in je $\cos\alpha - k_s\sin\alpha = \cos\varphi_s - k_s\sin\varphi_s = 0$, je $F_{max} = \infty$. Torej za $\alpha \geqslant \varphi_s$ drsenje telesa navzgor po klancu ni več možno, ne glede na velikost potisne sile F. Za $\alpha = 90°$ (potisna sila pravokotna na podlago) računamo le F_{min}, saj telo lahko drsi le navzdol.



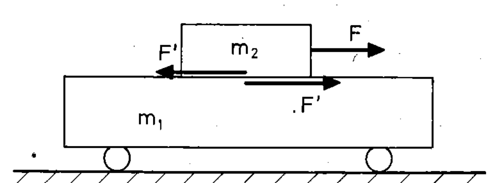
Slika 2.24

Drsenje prostega telesa po strmem klancu navzdol (za $F = 0$) pospešuje dinamična komponenta teže ($mg \sin\varphi$), zavira pa drsna torna sila $F_t = k_t mg \cos\varphi$. Torej telo drsi navzdol po klancu s pospeškom:

$$\boxed{a = g(\sin\varphi - k_t\cos\varphi)} \quad \textbf{pospešek drsenja po klancu} \qquad (2.22)$$

Na poledenelem naletu skakalnice, na bob stezi, sankališču in drugih gladkih strminah lahko vpliv trenja na drsenje teles zanemarimo ($k_t \approx 0$). Telo drsi navzdol s pospeškom:

$$\boxed{a = g \sin\varphi} \quad \textbf{pospešek drsenja po klancu brez trenja} \qquad (2.22a)$$



Slika 2.25

ki je tem večji, čim strmejši je klanec. Ob navpičnem zidu ($\varphi = 90°$) telo prosto pada: $a = g$, na kar ne vpliva niti trenje, saj telo ne pritiska na podlago (statična komponenta teže je tu nič).

4. Drsenje povezanih teles. Telo z maso $m_1 = 5$ kg in telo z $m_2 = 10$ kg sta povezani z vrvjo, ki vodi prek vrtljivega škripca na vrhu klanca (slika 2.24). Najmanj kolikšen (φ_s) mora biti naklon klanca, da telesi drsita? Statični torni koeficient med podlago in telesoma je $k_s = 0{,}5$, drsni pa $k_t = 0{,}4$. S kolikšnim pospeškom drsita telesi, če je naklon klanca $\varphi = 50°$. Kolikšna je tedaj sila v vrvi?

Na telo m_2 deluje v smeri po klancu navzdol dinamična komponenta teže $m_2 g \sin\varphi$, zaradi katere bi drselo navzdol. Ker je privezano na vrv, se ta raztegne in v njej se pojavi sila F, ki zadržuje telo. V celoti torej deluje na telo m_2 sila $m_2 g \sin\varphi - F$ v smeri po klancu navzdol. Tej sili nasprotuje komponenta sile podlage v smeri po strmini navzgor, ki preprečuje zdrs telesa in lahko naraste le do statične torne sile $k_s m_2 g \cos\varphi$. Recimo, da telo zdrsi pri $\varphi = \varphi_s$. Ta kót torej zadošča enačbi:

$$m_2 g \sin\varphi_s - F = k_s m_2 g \cos\varphi_s \text{ ali}$$
$$F = m_2 g(\sin\varphi_s - k_s \cos\varphi_s)$$

Sila F se prek vrvi prenese na telo m_1, ki ga vleče v desno. Škripec je vrtljiv in lahek (njegovo maso zanemarimo), zato zlahka sledi potegu vrvi in je sila v vrvi na obeh straneh škripca enaka. Telo m_1 na ravni podlagi zdrsne, če je vlečna sila vrvi (F) enaka statični torni sili $k_s m_1 g$. Izenačimo oba izraza za silo F in dobimo enačbo za kót φ_s, pri katerem telesi zdrsneta:

$$m_2 g(\sin\varphi_s - k_s\cos\varphi_s) = k_s m_1 g \text{ ali}$$
$$\sin\varphi_s - k_s\cos\varphi_s = k_s m_1/m_2$$

Dobljeno trigonometrično enačbo za neznanko φ_s prevedemo v kvadratno enačbo za $\cos\varphi_s$ (vstavimo $\sin^2\varphi_s = 1 - \cos^2\varphi_s$). V našem primeru dobimo $\cos\varphi_s = 0{,}77$ ter $\varphi_s = 40°$.

Pri naklonu $\varphi > \varphi_s$ *drsita telesi* (m_1 vodoravno v desno, m_2 pa poševno navzdol po klancu) z enakim pospeškom a (ker je vrv med njima napeta). Newtonov zakon dinamike za vsako telo posebej dá enačbi:

$$m_2 g \sin\varphi - k_t m_2 g \cos\varphi - F = m_2 a$$
$$F - k_t m_1 g = m_1 a$$

iz katerih izračunamo neznani količini a in F:

$$a = g(m_2\sin\varphi - k_t m_2\cos\varphi - k_t m_1)/(m_1 + m_2) = 2{,}1 \text{ m/s}^2.$$
$$F = m_1 m_2 g(\sin\varphi - k_t\cos\varphi + k_t)/(m_1 + m_2) = 30 \text{ N}$$

5. Voz z maso m_1 je na vodoravnih tleh, po katerih se lahko giblje brez trenja. Na vozu je tovor z maso m_2. Tovor vlečemo v vodoravni smeri s stalno silo F. S kolikšnima pospeškoma se gibljeta voz (a_1) in tovor (a_2)? (Slika 2.25)

Najprej vzemimo, da je vlečna sila F premajhna, da bi tovor zdrsnil po vozu. Tovor in voz se torej gibljeta kot eno telo – z enakim pospeškom a ($a_1 = a_2 = a$), ki ga določa vlečna sila: $F = (m_1 + m_2)a$ ali $a = F/(m_1 + m_2)$.

Zaradi vlečne sile F skuša tovor zdrsniti po vozu, zato se med vozom in tovorom pojavi vodoravna komponenta sile podlage F'. Voz zadržuje tovor s silo F', obenem pa tudi tovor deluje na voz z nasprotno enako silo, to je s silo F' v desno. Na tovor torej deluje rezultanta $F - F' = m_1 a$, voz pa čuti silo F', ki ga vleče v smeri vlečne sile:

$$F' = m_2 a = F m_2/(m_1 + m_2)$$

Če se vlečna sila F povečuje, se povečuje tudi komponenta F' sile podlage med tovorom in vozom. Ko ta doseže zgornjo mejo $F_s = k_s m_2 g$, tovor po vozu zdrsne. To se zgodi pri vlečni sili:

$$F = k_s(m_1 + m_2)g$$

oziroma pri pospešku: $a = k_s g$. Sledi, da se tovor in voz lahko gibljeta skupno (ne da bi tovor zdrsnil po vozu) največ s pospeškom $k_s g$.

Če je vlečna sila večja od $k_s(m_1 + m_2)g$, tovor drsi po vozu, tako da se gibljeta z različnima pospeškoma, komponenta sile podlage (F') med njima pa je enaka drsni torni sili $F_t = k_t m_2 g$. Tedaj velja:

$$F - k_t m_2 g = m_2 a_2 \text{ ali } a_2 = F/m_2 - k_t g \text{ in}$$
$$k_t m_2 g = m_1 a_1 \text{ ali } a_1 = k_t g m_2/m_1$$

Vlečna sila F učinkuje na voz le posredno prek trenja. Če med tovorom in vozom ne bi bilo trenja ($k_s = 0$), bi se voz ne premaknil: $a_1 = 0$ in $a_2 = F/m_2$. Torej v tem primeru omogoča pospešek voza ravno trenje, ki večinoma zavira gibanje.

6. Ploščica z maso m je prislonjena ob veliko navpično ploščo. Najmanj s kolikšnim pospeškom (a) se mora gibati plošča s ploščico v vodoravni smeri (translatorno), da ploščica ne zdrsi po plošči navzdol? (Slika 2.26)

Ploščica se giblje v vodoravni smeri s pospeškom a, torej deluje nanjo v tej smeri sila ma. To silo povzroča plošča, ki odriva ploščico pred seboj s pravokotno silo podlage $N = ma$. Komponenta F' sile podlage med ploščico in ploščo je usmerjena navzgor in vzdržuje ravnovesje s težo ploščice. Dokler ploščica ne zdrsi, je $F' = mg$. Če je ploščica pretežka, tako da F' doseže zgornjo mejo $F_s = k_s N = k_s ma$, ploščica zdrsne navzdol. To se torej zgodi za $mg = F_s = k_s ma$ ali za $a = g/k_s$.

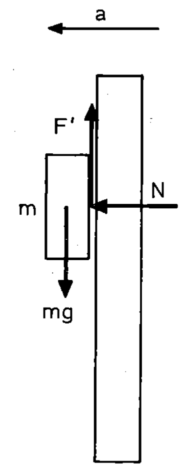
Sila prožnosti

Zgodi se, da je gibajoče se telo vezano na prožno vzmet ali elastično vrv ali na kakšno drugo prožno telo. Med gibanjem telesa se priključena vzmet deformira – razteza ali krči, pri čemer se v njej pojavlja **sila prožnosti**. Nastala sila nasprotuje deformaciji in učinkuje na telo, ki to deformacijo povzroča. Poleg drugih sil, učinkujočih na telo, moramo v teh primerih upoštevati tudi silo prožnosti.

Recimo, da je telo privezano na en konec prožne vzmeti, katere drugi konec je pritrjen na zid (slika 2.27a). Če se telo premakne v desno za x, razteguje vzmet s silo F (desna črtkana sila F na sliki 2.27b). Raztegnjena vzmet nasprotuje pomiku telesa z nasprotno enako silo F (desna polna sila F na sliki 2.27b), obenem pa vleče zid v desno s silo F. Zid se temu upira in vleče levi konec vzmeti s silo F v levo (leva črtkana sila F na sliki 2.27b). Telo torej čuti silo prožnosti F, ki ga vleče v levo (nasprotno smeri premika), na raztegnjeno vzmet pa deluje dvoje nasprotno enakih sil F (črtkani sili F na sliki 2.27b), ki vzmet raztegujeta. V mejah prožnega raztezanja (če velja Hookov zakon, gl. str. 137) je sila F premo sorazmerna z raztezkom x:

$$\boxed{F = kx} \tag{2.23}$$

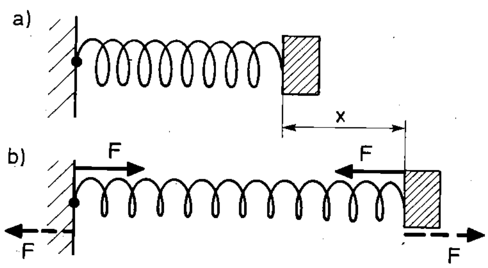
V zgornji enačbi je F ena od sil dvojice, ki raztegujeta vzmet. Sorazmernostna konstanta k je **konstanta prožnosti vzmeti** (merska enota N/m). Čim močnejša je vzmet, tem večja je njena konstanta prožnosti, tem večja sila je potrebna, da raztegnemo vzmet za dan raztezek. Šibka vzmet ima majhen k; že majhna sila povzroči velik raztezek; takšna vzmet se mora zelo raztegniti (veliki x), da nastane velika sila prožnosti.



Slika 2.26

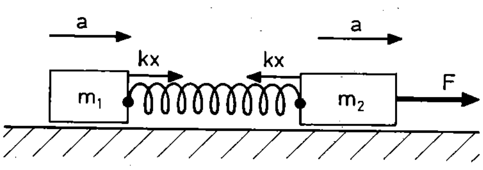
Primeri:

1. Telesi $m_1 = 4$ kg in $m_2 = 10$ kg sta povezani s prožno vzmetjo ($k = 1{,}5$ kN/m) in ležita na gladkih, vodoravnih tleh. Težje telo m_2 vlečemo s silo F = 200 N v vodoravni smeri. S kolikšnim pospeškom se gibljeta telesi? Za koliko se pri tem raztegne vzmet med njima? Trenje zanemarimo (slika 2.28).



Slika 2.27

Vlečna sila F potegne telo m_2 v desno. Ker je telo privezano na vzmet, se vzmet raztegne. Raztegnjena vzmet potegne telo m_1 v desno, v smer vlečne sile. Ko se raztezek vzmeti ustali (npr. na x), se telesi gibljeta z enakim pospeškom $a = F/(m_1 + m_2) = 14{,}3$ m/s^2. Na telo m_2 deluje sila $F\text{-}kx$, na telo m_1 pa sila $kx = m_1 a$. Sledi: $x = m_1 a/k = m_1 F/k(m_1 + m_2) = 3{,}8$ cm.



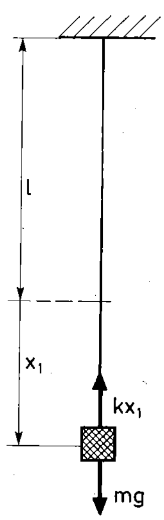
Slika 2.28

2. Telo na elastični vrvi. Telo z maso m je privezano na elastično vrv, katere dolžina je l, konstanta prožnosti pa k. Drugi konec vrvi je pritrjen na strop.

Telo na vrvi počasi spuščamo in nato spustimo, da visi na napeti vrvi (slika 2.29). Vrv se pri tem raztegne in na telo deluje poleg teže mg še sila prožnosti raztegnjene vrvi. Ko se telo umiri, je vrv raztegnjena za toliko (x_1), da je teža telesa enaka prožni sili raztegnjene vrvi: $mg = kx_1$ ali

$$x_1 = mg/k \tag{2.24}$$

V naslednjem poskusu pa telo (privezano na vrv) spustimo z višine stropa (slika 2.30a). Na kateri globini se telo ustavi? Upor zraka in maso vrvi zanemarimo.



Slika 2.29

V začetku padanja vrv še ni napeta, zato ne učinkuje na padajoče telo. Telo prosto pada s pospeškom g in njegova hitrost enakomerno narašča. V trenutku ko doseže globino l pod stropom in ima hitrost $v_o = \sqrt{2gl}$ (slika 2.30b), se vrv pričenja napenjati. Recimo, da koordinato x merimo od tega mesta navzdol. Za $x > 0$ je vrv napeta in na telo deluje poleg teže mg navzdol še sila prožnosti (kx) raztegnjene vrvi, ki je usmerjena navzgor in premo sorazmerna z raztezkom x vrvi. Do globine $l + x_1$ je teža še večja od sile prožnosti in telo še pospešeno pada. Za $x = x_1$ je $mg = kx_1$ in pospešek je nič; v tej globini doseže telo največjo hitrost. Za $x > x_1$ je padanje pojemajoče, hitrost se zmanjšuje, dokler se telo pri $x = x_2$ ne ustavi ($v = 0$).

V poljubni globini $l + x$ pod stropom ima telo hitrost $v = dx/dt$ in pospešek $a = dv/dt$. Zadnjega izrazimo iz Newtonovega zakona dinamike:

$$mg - kx = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$$

ali

$$v dv = (g - kx/m)dx$$

Dobljeno enačbo integriramo: na desni strani od 0 (to je od mesta, kjer se vrv začne napenjati) do x_2 (kjer se ustavi), na levi pa od v_o (hitrost telesa pri $x = 0$) do 0. Dobimo:

$$\int_{v_0}^{0} v dv = \int_{0}^{x_2}(g - kx/m)dx$$
$$-v_0^2/2 = gx_2 - (k/2m)x_2^2 \text{ ali}$$
$$x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1l = 0$$

pri čemer smo uporabili izraza $v_0^2 = 2gl$ ter $x_1 = mg/k$. Kvadratna enačba za x_2 ima dve rešitvi:

$$x_2' = x_1 + \sqrt{x_1^2 + 2x_1l} \quad \text{ter}$$
$$x_2'' = x_1 - \sqrt{x_1^2 + 2x_1l} \qquad (2.25)$$

Prva rešitev (x_2') dá iskano globino x_2, na kateri se telo prvič ustavi. Nato se telo začne dvigati (sila raztegnjene vrvi je na tej globini močnejša od teže telesa): do $x = x_1$ se dviga pospešeno, naprej navzgor pa pojemajoče, dokler se pri $x = x_2''$ ne ustavi, nakar zoper začne padati itd. Telo na elastični vrvi niha med globinama x_2'' in x_2'. Nihanje se slej ko prej zaduši in telo obmiruje na sredini med x_2'' in x_2', to je za $x = x_1 = mg/k$ (gl. sliko 2.29).

3. Vzmetno nihalo. Telo z maso m je pritrjeno na prožno vzmet s konstanto k. Na vodoravni podlagi (slika 2.31) deluje na telo v smeri gibanja edinole sila prožnosti vzmeti, trenje med telesom in podlago zanemarimo, teža telesa in pravokotna sila podlage pa se medsebojno uničujeta in ne vplivata na gibanje telesa vzdolž podlage. V ravnovesni legi (v kateri telo, prepuščeno samemu sebi, obmiruje) vzmet ni ne raztegnjena ne skrčena. Če telo izmaknemo iz te lege za x_o in nato spustimo, začnè nihati z amplitudo x_o. Pri odmiku x iz ravnovesne lege deluje nanj sila prožnosti vzmeti $-kx$, ki ga vleče nazaj v ravnovesno lego (predznak minus zato, ker odmiku v desno, $x > 0$, ustreza pospešek v levo, $a < 0$; in obratno). Izmaknjeno telo dobi pospešek $a = -kx/m = -(k/m)x$, ki je premo sorazmeren z odmikom x, kar je značilno za harmonično nihanje (gl. str. 15). Za takšno nihanje velja (gl. 1.26): $a = -\omega^2x$, kjer je $\omega = 2\pi/t_o$ krožna frekvenca nihala (t_o je nihajni čas). Za naše vzmetno nihalo torej dobimo:

$$\omega^2 = k/m \text{ ali}$$

$$\boxed{t_o = 2\pi\sqrt{m/k}} \qquad (2.26)$$

Nihajni čas vzmetnega nihala je večji, če je masa telesa večja in če je konstanta prožnosti manjša. Težko telo na šibki vzmeti niha z dolgim nihajnim časom, lahko telo na močni vzmeti pa s kratkim (z veliko frekvenco).

Če je telo privezano hkrati na več vzmeti, tako da se vsaka vzmet med premikom telesa za enako raztegne ali skrči (t. i. vzporedna vezava vzmeti), se konstante prožnosti posameznih vzmeti seštejejo (slika 2.32). Telo niha tako, kot da bi bilo privezano na vzmet s konstanto $k = k_1 + k_2 + \ldots$ Drugače je, če so vzmeti povezane zaporedno (slika 2.33). Ko se telo premakne v desno za x, se spojišče vzmeti premakne za x_1. Toliko se raztegne leva vzmet, desna pa se raztegne za $x - x_1$. Leva vzmet, deluje na spojišče s silo k_1x_1 v levo, desna pa s silo $k_2(x - x_1)$ v desno. Ti sili sta enaki $k_1x_1 = k_2(x - x_1)$ ali $x_1 = xk_1k_2/(k_1 + k_2)$. Na telo deluje le desna vzmet, s silo $-k_2(x - x_1) = -xk_1k_2/(k_1 + k_2) = -kx$, kjer je k konstanta prožnosti nadomestne vzmeti. Sledi:

$$k = k_1k_2/(k_1 + k_2) \text{ ali } 1/k = 1/k_1 + 1/k_2 \qquad (2.27)$$

Pri zaporedni vezavi vzmeti se obratne vrednosti konstant posameznih vzmeti seštevajo v obratno vrednost nadomestne konstante. Če je ena vzmet toga (npr. $k_1 = \infty$), učinkuje le druga vzmet: $k = k_2$. Najbolj raztegljiva vzmet največ prispeva k celokupni konstanti k.

Računski primer: Telo je privezano na vzmet s konstanto $k_1 = 2$N/cm in niha z nihajnim časom $t_1 = 1{,}5$ s. Kolikšno vzmet (k_2) moramo dodati zaporedno k prvi vzmeti, da se nihajni čas poveča na $t_2 = 2{,}0$ s?

$$t_1 = 2\pi\sqrt{m/k_1}\,,\ t_2 = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Enačbi delimo, da se nepoznana masa krajša:

$$k/k_1 = (t_1/t_2)^2 = k_2/(k_1 + k_2) \text{ ali}$$
$$k_2 = k_1/(t_2^2/t_1^2 - 1) = 2{,}6 \text{ N/cm}$$

Sila pri kroženju

Telo z maso m se giblje s stalno obodno hitrostjo v po krogu s polmerom r, to je giblje se z radialnim pospeškom $a_r = v^2/r = r\omega^2$, ki je usmerjen k središču kroženja (gl. 1.47). Ta pospešek določa t. i. **centripetalna sila** ($\mathbf{F}_{cp}$), ki učinkuje na telo v smeri k središču kroženja. Izračunamo jo z Newtonovim zakonom dinamike:

$$\boxed{\mathbf{F}_{cp} = m\mathbf{a}_r = -m\omega^2\mathbf{r}} \qquad (2.28)$$

kjer je krajevni vektor $\mathbf{r}$ usmerjen iz središča kroženja. Če na krožeče telo deluje hkrati več sil, je njihova rezultanta usmerjena k središču kroženja in enaka $ma_r = mv^2/r = mr\omega^2$ (to je centripetalna sila). Centripetalna sila je npr. sila v vrvici, na kateri je privezano telo, ki ga vrtimo v vodoravnem krogu; radialna komponenta sile podlage med vožnjo skozi ovinek itd. Na splošno mora okolica delovati na telo s centripetalno silo, če naj telo kroži. Toda obenem tudi telo deluje na okolico, ki ga sili v kroženje, z nasprotno enako silo (gl. str. 31). Ta sila se imenuje **centrifugalna sila** ($\mathbf{F}_{cf}$).

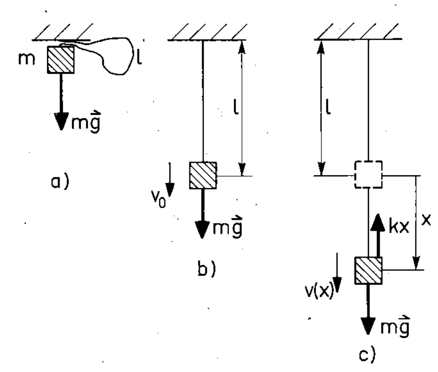
Centrifugalna sila je sila, s katero krožeče telo učinkuje na okolico v smeri radija iz središča kroženja navzven. Po velikosti je enaka centripetalni sili, le smer je nasprotna:

$$\mathbf{F}_{cf} = -\mathbf{F}_{cp} = m\omega^2\mathbf{r} \quad \text{(Slika 2.34)} \qquad (2.29)$$

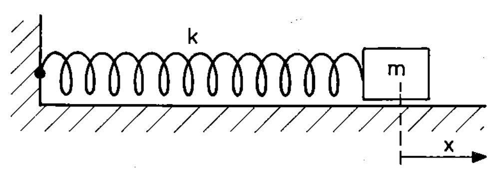
Centripetalna in centrifugalna sila sta sicer enako veliki, vendar učinkujeta na različni telesi, zato sta njuna učinka različna. Centripetalna sila deluje na krožeče telo in ga sili v kroženje, centrifugalna sila pa je reakcijska sila, s katero krožeče telo učinkuje na okolico v smeri iz središča kroženja.

Recimo, da privežemo kamen na vrvico, katere prosti konec držimo v roki. Kamen zalučamo s hitrostjo v v smeri pravokotno na vrvico, vrvica se nekoliko raztegne in v njej se pojavi sila, ki vleče kamen proti roki, tako da kamen zakroži v lok. Z raztegnitvijo nastane v vrvici tolikšna sila, kolikršna je potrebna za radialni pospešek pri dani obodni hitrosti in danem polmeru kroženja. Če zahtevana centripetalna sila mv^2/r prekorači mejo trdnosti vrvice, se vrvica pretrga in kamen odleti v smeri tangente s hitrostjo, ki jo ima v tistem trenutku. Na kamen neposredno učinkuje sila vrvice. Izvor te sile pa je v roki, ki mora vrvico trdno držati. Krožeči kamen prek vrvice učinkuje na roko s centrifugalno silo, ki vleče roko ven iz središča kroženja.

Kakšna centripetalna sila deluje na potnika v avtu, ko avto zapelje v ovinek? Ko ogrodje avtomobila skupaj s sedeži zapelje v ovinek, se potnik zaradi vztrajnosti še hoče gibati v prvotni smeri, zato hoče zdrsniti po sedežu. Med potnikom in sedežem se pojavi vodoravna komponenta sile podlage, ki sili potnika v kroženje. Če ta sila ne zadošča za zahtevani radialni pospešek (npr. če je sedež gladek), potnik zdrsne na sedežu v smeri prvotne hitrosti in se približa steni avtomobila (ki je medtem zavozil v ovinek) in udari obnjo. Od tedaj naprej določa radialni pospešek normalna sila (N) v steni avtomobila.



Slika 2.30



Slika 2.31

Primeri:

1. Kroglico z maso m = 200 g pritrdimo na vrvico (r = 40 cm) in jo vrtimo v vodoravni ravnini. Največ s kolikšno frekvenco jo smemo vrteti, da se vrvica ne pretrga? Ta se pretrga, če je sila v njej večja od F_1 = 500 N. Težo kroglice zanemarimo.

Vrvica je napeta s centripetalno silo:

$$F_{cp} = mr\omega^2 = mr \cdot 4\pi^2\nu^2 < F_1$$
$$\nu < \sqrt{F_1/4\pi^2 mr} = 12{,}6/\mathrm{s} = 755/\mathrm{min}$$

Kroglica se sme vrteti največ s 755 vrtljaji na minuto.

2. Telo je privezano na vrvico, ki jo vrtimo v navpični ravnini. Kako se sila v vrvici spreminja med kroženjem (slika 2.35)?

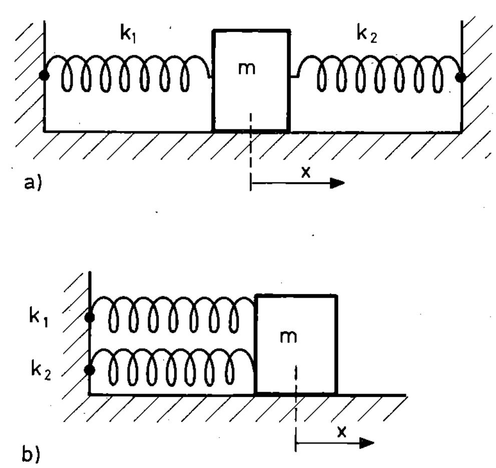
Na telo delujeta teža mg in sila v vrvici F_v. Ker je zadnja pravokotna na obodno hitrost v, ne vpliva nanjo (gl. str. 8). To hitrost spreminja le teža mg, zato se spreminja z višino podobno kot pri poševnem metu (gl. 1.42):

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = v_0^2 - 2gr\sin\varphi$$

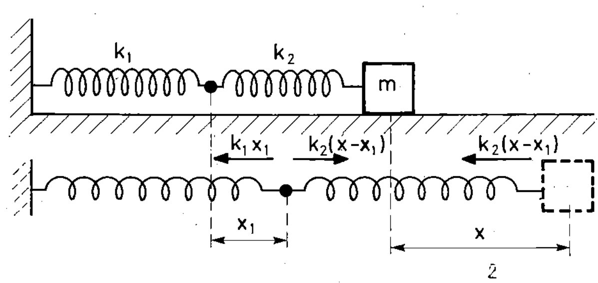
Tu je v_0 hitrost telesa na višini središča kroga, h pa višina telesa nad središčem: $h = r\sin\varphi$. Najmanjšo hitrost ima telo v zgornjem delu kroga (φ = 90°): $v_{min}^2 = v_0^2 - 2gr$, največjo pa v spodnjem (φ = – 90°): $v_{max}^2 = v_0^2 + 2gr$.

Pri tem kroženju je centripetalna sila sestavljena iz sile v vrvici (F_v) in projekcije teže na smer vrvice:

$$F_{cp} = F_v + mg\sin\varphi = mv^2/r = (m/r)(v_0^2 - 2gr\sin\varphi)$$
$$F_v = mv_0^2/r - 3mg\sin\varphi$$



Slika 2.32



Slika 2.33

Vrv je najmanj napeta v zgornji točki kroga: $F_{min} = mv_0^2/r - 3mg$, najmočneje pa v spodnji točki: $F_{max} = mv_0^2/r + 3mg = F_{min} + 6mg$. Če se telo vrti počasi (majhen v_0), vrv v zgornjem delu kroga ni napeta: $F_{min} = 0$. Pri $v_0 > \sqrt{3gr}$ pa je vrv napeta tudi v zgornji točki kroga.

Kot telo vzemimo vedro z vodo. Če ga vrtimo dovolj hitro, voda v zgornjem delu kroga ne izteče iz vedra (čeprav vedro stoji »na glavi«); to se zgodi pri $v_0 > \sqrt{3gr}$.

Primer te vrste je tudi pilot v letalu, ki dela »looping« v navpični ravnini. Telo je pilot; nanj poleg njegove teže učinkuje še sila, s katero sedež z vsemi vezmi pritiska nanj in ga sili v kroženje.

3. Konično nihalo. Telo je obešeno na vrvici (dolžina b), ki kroži okrog navpične osi s kotno hitrostjo ω; prosti konec vrvice je pritrjen na osi (slika 2.36). Opazimo, da se vrvica odmakne od osi za kót φ, ki je tem večji, čim hitreje jo vrtimo (čim večji je ω).

Telo kroži v vodoravni ravnini po krogu s polmerom $r = b \sin\varphi$. Ker se giblje z radialnim pospeškom $a_r = r\omega^2$, mora nanj delovati centripetalna sila $mr\omega^2$. Ta je rezultanta teže mg in sile F_v v vrvici. Vrvica se odkloni za tak kót φ in v njej se pojavi tolikšna sila F_v, da je rezultanta med njo in težo enaka zahtevani centripetalni sili. Sledi:

$$\operatorname{tg}\varphi = mr\omega^2/mg = b\sin\varphi\omega^2/g \text{ ali}$$
$$\cos\varphi = g/b\omega^2$$

Večji kotni hitrosti vrtenja vrvice zares ustreza večji naklonski kót φ vrvice.

Sila F_v v nagnjeni vrvici s svojo navpično komponento ($F_v\cos\varphi$) vzdržuje ravnovesje s težo obešenega telesa ($F_v\cos\varphi = mg$), njena vodoravna komponenta ($F_v\sin\varphi$) pa omogoča kroženje (je enaka centripetalni sili).

Podobno kot zgoraj vrvica, se sedeži vrtiljaka med vrtenjem nagnejo navzven, in sicer tem bolj (večji kót φ), čim hitreje se vrtiljak vrti.

4. S kolikšno silo (N) pritiska avto (masa m = 1000 kg) na tla, če vozi s hitrostjo v = 72 km/h po: a) vodoravnih tleh (N_1), b) polkrožni grbini s polmerom R = 50 m (N_2) in c) polkrožni jami s polmerom R = 50 m (N_3)? (Slika 2.37)

Zanimajo nas sile, ki delujejo na avto v navpični smeri: teža mg navzdol, sila podlage (N) navzgor. Pri vožnji po vodoravni podlagi (a) v navpični smeri ni pospeška, zato je $mg - N_1 = 0$ in $N_1 = mg = 1000\text{ kg} \cdot 10\text{ ms}^{-2} = 10$ kN. Med vožnjo prek grbine (b) se avto giblje z radialnim pospeškom v^2/R (usmerjen navzdol), ki ga določa rezultanta med težo in silo podlage: $mg - N_2 = mv^2/R$ ali $N_2 = mg - mv^2/R = 10\text{ kN} - 8\text{ kN} = 2$ kN. Pritisk avta na podlago je na grbini kar petkrat manjši kot na ravni cesti (ob morebitnem zaviranju je tudi zavorna sila petkrat manjša). Drugače je v jami (primer c): radialni pospešek v^2/R je tu usmerjen navzgor, zato je sila podlage večja od teže: $N_3 - mg = mv^2/R$ in $N_3 = mg + mv^2/R = 18$ kN.

5. Rotor. Nekatera zabavišča imajo veliko pokončno valjasto cev s polmerom R = 2 m, ki se vrti okrog geometrijske osi. Človek vstopi vanjo in se s hrbtom prisloni ob steno, nakar se cev začne vrteti. Ko je frekvenca dovolj velika, se dno rotorja spusti in človek ostane »prilepljen« ob steno. Najmanj kolikšna mora biti frekvenca (ν_0) rotorja, da človek ob steni ne zdrsne navzdol, četudi ne stoji na tleh? (Slika 2.38)

Ko se tla odmaknejo, delujejo na človeka tele sile: teža mg navzdol, pravokotna komponenta sile stene (N) v smeri k središču vrtenja in komponenta F' navzgor. Največja možna vrednost te komponente je statična torna sila $F_s = k_sN$, kjer je k_s statični torni koeficient med hrbtom in steno (običajno okrog 0,4). Človek ne zdrsne, če je njegova teža manjša od statične torne sile:

$$mg < F_s = k_sN$$

Pravokotna komponenta N je tu centripetalna sila, ki človeku vsiljuje radialni pospešek kroženja: $N = ma_r = mR \cdot 4\pi^2\nu^2$. Torej mora veljati pogoj: $mg < 4\pi^2\nu^2k_smR$ ali $\nu^2 > g/(4\pi^2k_sR)$ oziroma:

$$\nu_0 = \sqrt{g/(4\pi^2k_sR)} = 0{,}56/\text{s} = 33/\text{min}$$

Človek se v tem mejnem primeru giblje z obodno hitrostjo $v_0 = R\omega_0 = 2\pi\nu_0R = \sqrt{gR/k_s} = 7\text{ m/s} = 25\text{ km/h}$.

6. Gibanje v ovinku. Gibanje avta skozi ovinek je kroženje; omogoča ga torna sila med gumami koles in cestiščem. Če je kotaleče se kolo usmerjeno v smer vožnje, deluje v tej smeri tudi vodoravna komponenta sile podlage F' (gl. str. 78). Največja vrednost te komponente (to je statična torna sila $F_s = k_sN$) določa največji pospešek, s katerim lahko kotaleče se kolo pospešuje naprej. V ovinku voznik nekoliko zasuka volan v notranjo stran ovinka, tako da kolesa oklepajo majhen kót s prvotno smerjo gibanja. Zaradi zasuka kolesa se vodoravna komponenta sile podlage (F') zasuka na notranjo stran ovinka (ker skuša kolo zdrsniti navzven), tako da ima poleg tangentne komponente F'_p (ki omogoča pospeševanje) še radialno projekcijo F'_r, ki je zahtevana centripetalna sila za vožnjo skozi ovinek:

$$F'_r = mv^2/R \qquad \text{(Slika 2.39)}$$

Če se poveča hitrost vožnje (v), se poveča tudi F'_r, a le do največje vrednosti k_rN, kjer je N sila, s katero kolo pritiska pravokotno na podlago, k_r pa statični torni koeficient v radialni smeri (odvisen je od profila gum; je največji, če je kolo zasukano za kot 10–20° glede na prvotno smer; običajno je večji od 0,5, na suhem cestišču celo večji od 1,0).

Največja hitrost v_{max}, s katero lahko avto vozi skozi vodoravni ovinek s polmerom R (ne da bi zdrsnil navzven), je torej določena z enačbo:

$$mv^2_{max}/R = k_rN = k_rmg \text{ ali}$$
$$v_{max} = \sqrt{k_rgR} \qquad (2.30)$$

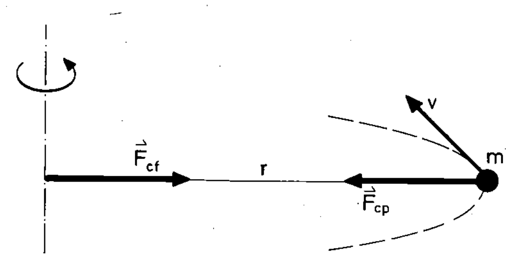
Za k_r = 0,6 in R = 50 m dobimo v_{max} = 17 m/s = 62 km/h.

Tangentna projekcija F'_p vodoravne komponente sile podlage ima zgornjo mejo k_pN, kjer je k_p statični torni koeficient med gumami in cestiščem v tangentni smeri. Ker je $F'^2 = F'^2_p + F'^2_r$ (gl. sliko 2.39), velja:

$$k_p^2 + k_r^2 = k_s^2$$

pri čemer je k_s celoten statični torni koeficient med gumami in cestiščem. Kolikšen del trenja odpade na radialno smer (to je za ovinek) in kolikšen na tangentno smer (to je za pospeševanje), je odvisno od profila gum in od zasuka volana.

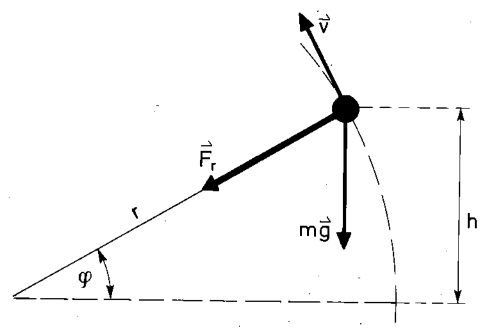
Varna vožnja (brez podrsavanja!) skozi vodoravni ovinek je odvisna od statičnega tornega koeficienta (k_r); ta pa se lahko spremeni (npr. če se cestišče navlaži ali zamasti ali če se gume izrabijo). Ta odvisnost se precej omili, če je cestišče na zunanji strani ovinka dvignjeno, tako da tudi pravokotna komponenta sile podlage (N) nekoliko prispeva k centripetalni sili.



Slika 2.34

Na nagnjenem cestišču lahko avto zdrsne ali navzdol (navznoter, če vozi prepočasi) ali navzgor (navzven, če vozi prehitro). Na sliki (2.40) je označena sila F_r za primer, da skuša avto zdrsniti navzven. Projekcije sil se v navpični smeri seštejejo v nič, v vodoravni smeri pa v centripetalno silo mv^2/R:

$$N\cos\varphi - F_r'\sin\varphi - mg = 0 \qquad \varphi = \text{nagib cestišča}$$
$$N\sin\varphi + F_r'\cos\varphi = mv^2/R$$



Slika 2.35

Tik preden avto zdrsne, je $F_r' = k_r N$. Iz zgornjih enačb izločimo N in izračunamo največjo dovoljeno hitrost v_{max} (pri kateri avto zdrsne ven iz ovinka):

$$v_{max}^2 = gR\,(\text{tg}\varphi + k_r)/(1 - k_r\text{tg}\varphi) \qquad (2.31a)$$

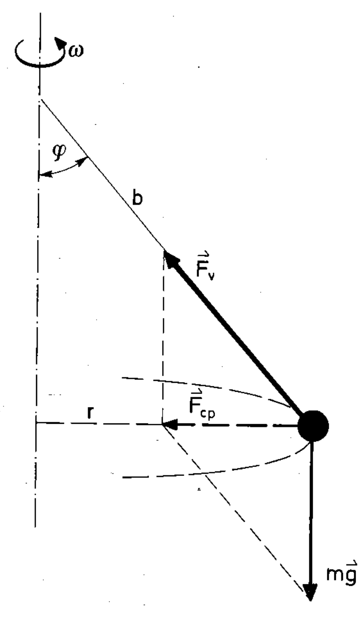
Če se avto giblje skozi nagnjen ovinek prepočasi, lahko zdrsne navzdol (na notranjo stran ovinka), F_r' ima tedaj smer navzgor. Izraz za v_{min} dobimo neposredno iz enačbe (2.31a), če koeficientu k_r spremenimo predznak:

$$v_{min}^2 = gR\,(\text{tg}\varphi - k_r)/(1 + k_r\text{tg}\varphi) \qquad (2.31b)$$

Razlika med v_{max} in v_{min} je tem manjša, čim manjši je k_r. V limiti $k_r \to 0$ (idealno gladko cestišče) je $v_{max} = v_{min} = v_0$:

$$v_0 = \sqrt{gR\text{tg}\varphi} \qquad (2.32)$$

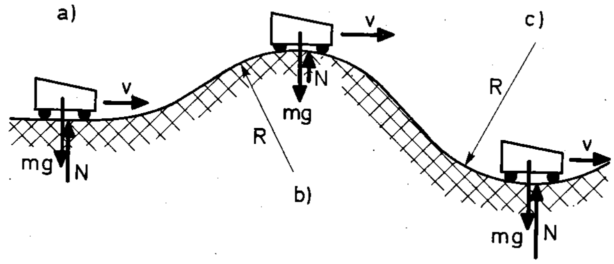
Skozi nagnjen ovinek se lahko peljemo brez podrsavanja, tudi če je cestišče idealno gladko, le da moramo voziti s točno določeno hitrostjo v_0.



Slika 2.36

Pri blago nagnjenem cestišču, tako da je $\text{tg}\varphi < k_r$, zdrs navzdol ni mogoč, četudi avto vozi zelo počasi ($v_{min} = 0$). Druga skrajnost je močno nagnjeno cestišče s $\text{tg}\varphi > 1/k_r$; avto ne zdrsne navzven, četudi vozi zelo hitro ($v_{max} = \infty$). Poseben primer s $\varphi = 90°$ vidimo v nekaterih zabaviščih, kjer motorist vozi po notranji steni navpične valjaste cevi-stene; voziti mora najmanj s hitrostjo (gl. 2.31b za $\varphi = 90°$) $v_{min} = gR/k_r$ (gl. podoben primer: človek ob steni rotorja, str. 46)

7. Sila v vrteči se palici. Homogena palica (masa m, dolžina b) se vrti v vodoravni ravnini s kotno hitrostjo ω; os vrtenja gre skozi konec palice in je pravokotna nanjo (slika 2.41). Kako se sila F v palici spreminja z oddaljenostjo od osi?



Slika 2.37

Palico v mislih razrežemo na koščke z debelino dr. En tak košček z maso $dm = (m/b)dr$ na oddaljenosti r od osi se giblje z radialnim pospeškom $r\omega^2$. Notranji del palice vleče ta košček s silo $F(r)$ k osi, zunanji del palice pa z nekoliko manjšo silo $F(r + dr)$ proč od osi, tako da nanj deluje rezultanta $F(r) - F(r + dr) = -dF$, ki povzroča zahtevani radialni pospešek:

$$-dF = dmr\omega^2 = (m\omega^2/b)rdr$$

Enačbo integriramo, na desni strani od b do r, na levi pa od 0 do $F(r)$ (na zunanjem robu palice ni sile). Dobimo:

$$F(r) = (m\omega^2/2b)(b^2 - r^2) \tag{2.33}$$

Sila v vrteči se palici je največja na osi ($r = 0$, enaka je $m\omega^2 b/2$), najmanjša ($= 0$) pa na najbolj oddaljenem delu palice ($r = b$).

8. Obroč s polmerom $R = 40$ cm in maso $m = 20$ kg zavrtimo v vodoravni ravnini okrog njegove geometrijske osi. S kolikšno največjo frekvenco (ν_o) ga smemo zavrteti, da se ne raztrga? Porušna natezna sila v obroču je $F_p = 6{,}5$ kN.

Na ločni element obroča $ds = Rd\varphi$, ki ima maso $dm = (m/2\pi)d\varphi$, delujeta z obeh strani notranji sili F, s katerima ostali del obroča priklepa izbran ločni element. Zaradi ukrivljenosti obroča sta ti sili zasukani druga glede na drugo za kót $d\varphi$; njuna rezultanta (glej podoben primer na sliki 2.19) $dF \approx Fd\varphi$ je zahtevana centripetalna sila, ki daje izbranemu ločnemu elementu radialni pospešek $R\omega^2$:

$$dF = Fd\varphi = dma_r = (m/2\pi)d\varphi R\omega^2 \quad \text{ter}$$
$$F = 2\pi m R\nu^2 \tag{2.34}$$

Sledi:

$$\nu_o = \sqrt{F_p/2\pi mR} = 11{,}4/\text{s} = 680/\text{min}$$

Vztrajnostna (sistemska) sila

Newtonov zakon dinamike $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ povezuje silo in pospešek. Če poznamo rezultanto $\mathbf{F}$ vseh sil, ki učinkujejo na telo, lahko iz te enačbe izračunamo pospešek $\mathbf{a}$. Vemo pa, da je pospešek odvisen tudi od koordinatnega sistema, v katerem opazujemo gibanje, če je ta neinercialen, če se giblje neenakomerno (gl. str. 25). V teh koordinatnih sistemih Newtonov zakon v zgornji obliki ne zadošča, z njim ne moremo pravilno določiti pospeška telesa. Pač pa pospešek telesa pravilno izračunamo z Newtonovim zakonom $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ v **inercialnem koordinatnem sistemu,** to je v sistemu, ki se giblje enakomerno – premočrtno in enako hitro. Ne glede na to, iz katerega inercialnega koordinatnega sistema opazujemo gibanje, dobimo za pospešek enak razultat: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$. **Newtonov zakon dinamike** lahko zato **uporabimo le za inercialne koordinatne sisteme. Zakonitosti mehanike,** ki izhajajo iz Newtonovega zakona dinamike (npr. kako se telo giblje pod vplivom sil) **veljajo le za inercialne koordinatne sisteme.** V tem pogledu so **vsi inercialni koordinatni sistemi enakovredni.** Ni mogoče iznajti zakonitosti ali si izmisliti eksperimenta, ki bi razločeval različne inercialne koordinatne sisteme glede na njihovo hitrost. Mehanske zakonitosti gibanja v inercialnem koordinatnem sistemu so neodvisne od hitrosti koordinatnega sistema.

Potnik v letalu, ki leti enakomerno s hitrostjo 1000 km/h, se lahko obnaša enako, kot če bi letalo mirovalo: lahko vstane s sedeža, hodi naprej ali nazaj, nataka pijačo, vdeva nit itd. Da se letalo pravzaprav zelo hitro giblje, spozna le, če opazuje okolico, ter ob pristanku, ko letalo zavira na pristajalni stezi. To tudi pomeni, da z opazovanjem gibanja znotraj inercialnega koordinatnega sistema ne moremo ugotoviti, kako hitro se koordinatni sistem giblje. Hitrost inercialnega koordinatnega sistema lahko določimo le, če opazujemo gibanje telesa tako iz obravnavanega koordinatnega sistema kot iz kakšnega drugega sistema. Potrebna je primerjava z drugim koordinatnim sistemom.

Drugače je, če je **koordinatni sistem neinercialen,** če se njegova hitrost spreminja s časom, npr. če koordinatni sistem pospešuje ali zavira oziroma se giblje krivočrtno (gl. str. 25). V takšnem koordinatnem sistemu pospešek telesa ni odvisen le od mase in sil, ki učinkujejo na telo (kot to predvideva Newtonov zakon dinamike), temveč tudi od pospeška $\mathbf{a}_0$ samega koordinatnega sistema.

Recimo, da opazovalec v mirujočem (inercialnem) koordinatnem sistemu izmeri pospešek $\mathbf{a}$, ki ga izračuna iz Newtonovega zakona dinamike: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, kjer je $\mathbf{F}$ rezultanta vseh sil, učinkujočih na telo. Gibanje istega telesa opazuje tudi opazovalec iz gibajočega se neinercialnega koordinatnega sistema. Ta izmeri relativni pospešek $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$ (gl. 1.55 na strani 25). Ker je rezultanta $\mathbf{F}$ delujočih sil neodvisna od koordinatnega sistema, ne more zapisati: $\mathbf{a}' = \mathbf{F}/m$, torej ne more neposredno uporabiti Newtonovega zakona dinamike. Pač pa lahko zapiše takole:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 = \mathbf{F}/m - \mathbf{a}_0 = (\mathbf{F} - m\mathbf{a}_0)/m = \mathbf{F}'/m$$

kar pomeni, da lahko uporabi Newtonov zakon dinamike (da je pospešek kvocient sile in mase), če od dejanskih sil $\mathbf{F}$ odšteje $m\mathbf{a}_0$.

Izraz $-m\mathbf{a}_0$ se imenuje **vztrajnostna** ali **sistemska sila** ($\mathbf{F}_s$):

$$\boxed{\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}_0} \tag{2.35}$$

tako da je

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s \quad \text{in} \quad \mathbf{a}' = \mathbf{F}'/m \tag{2.36}$$

Opazovalec v neinercialnem koordinatnem sistemu lahko uporabi Newtonov zakon dinamike, če rezultanti dejanskih (realnih) sil F prišteje sistemsko silo $\mathbf{F}_s$, kot da bi tudi ta delovala na telo. **Sistemska ali vztrajnostna sila je produkt mase telesa in pospeška koordinatnega sistema in ima nasprotno smer:** $\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}_0$. Vztrajnostna ali sistemska sila ni realna (ni telesa v okolici, ki bi s to silo učinkovalo na telo), ampak je umišljena ali fiktivna sila, ki jo vpeljemo zgolj zato, da lahko Newtonov zakon dinamike uporabljamo tudi v neinercialnih koordinatnih sistemih.

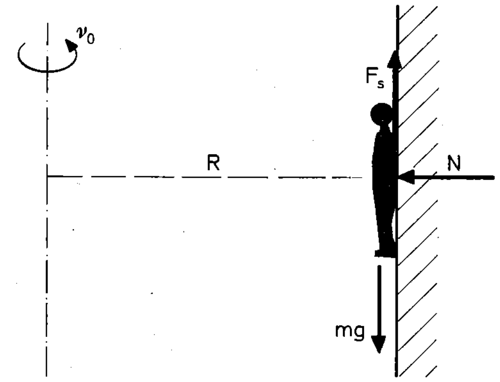
Primeri:

1. Pritisk telesa na vodoravno podlago je enak teži ($N = mg$) le, če podlaga miruje (oziroma se giblje enakomerno). Brž ko se podlaga giblje pospešeno (dviga ali spušča), se pritisk telesa na podlago spremeni.

Recimo, da telo leži na tleh dvigala, ki se dviga s pospeškom a_0. Zunanji opazovalec na zemeljskih tleh (ki jih tu obravnavamo kot inercialni koordinatni sistem) vidi, da se telo (skupaj z dvigalom) dviga s pospeškom a_0. Ta pospešek povzroča rezultanta med navzgor usmerjeno pravokotno silo tal (N) in težo telesa (slika 2.42a): $N - mg = ma_0$ ter

$$N = mg + ma_0 \qquad (2.37)$$

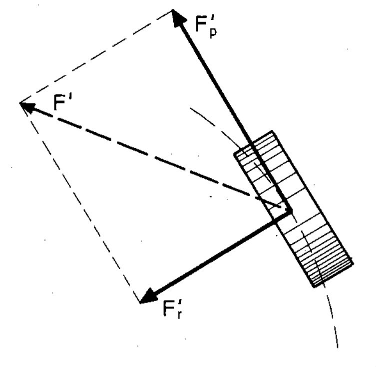
Opazovalec v dvigalu pa pravi, da telo miruje. Torej mora biti po Newtonovem zakonu dinamike vsota vseh sil enaka nič. Toda Newtonov zakon lahko uporabi le, če poleg dejanskih sil (N in mg) upošteva še vztrajnostno silo ma_0, ki je usmerjena navzdol (ker je pospešek dvigala usmerjen navzgor). Sledi: $N - mg - ma_0 = 0$ ter $N = mg + ma_0$.



Slika 2.38

Vidimo, da oba opazovalca dobita enak rezultat za pritisk telesa na podlago, le da vsak na svoj način.

Med pospešenim padanjem dvigala je pritisk telesa na podlago manjši od teže: $N = mg - ma_0$. Če dvigalo prosto pada ($a_0 = g$), je $N = 0$. Ker se podlaga sproti izmika, telo ne pritiska na podlago (kot da ne bi imelo teže). Telo v prosto padajočem dvigalu je v »breztežnem stanju«.



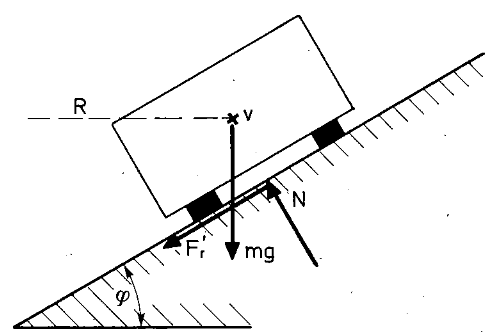
Slika 2.39

2. Viseča svetilka v vlaku. Vlak se giblje po vodoravnem tiru, s stropa vlaka visi svetilka, obešena na vrvico. Če vlak vozi enakomerno, je svetilka z vrvico navpična in sila v vrvici je enaka teži svetilke: $F_v = mg$ (slika 2.43a). Brž ko vlak sune naprej s pospeškom a_0, se vrvica nagne nazaj in oklepa z navpičnico kót φ, ki je tem večji, čim večji je pospešek a_0 vlaka. Zunanji opazovalec vidi, da se obešena svetilka (potem ko se v vlaku umiri) giblje s pospeškom a_0 (enako kot vlak). Zato je vrvica nagnjena nazaj, da dobi sila v vrvici (F_v) komponento v smeri pospeševanja ($F_v \sin\varphi$), ki daje svetilki pospešek a_0 (slika 2.43b). Velja:

$$F_v \sin\varphi = ma_0 \quad \text{ter} \quad F_v \cos\varphi = mg$$

Enačbi delimo, da se neznana sila v vrvici krajša, in dobimo:

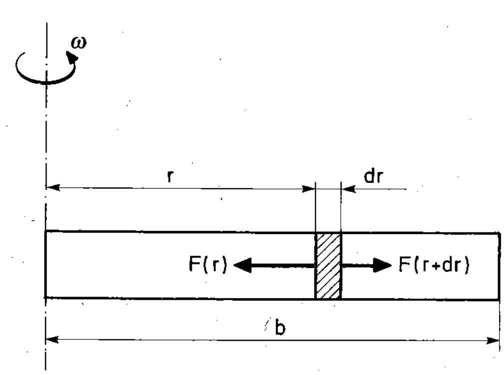
$$a_0 = g\,\mathrm{tg}\varphi$$



Slika 2.40

Opazovalec v vlaku sklepa drugače (slika 2.43c). Zanj svetilka miruje, torej je vsota vseh sil enaka nič. Poleg teže mg in sile v nagnjeni vrvici (F_v) upošteva še sistemsko silo ma_0, ki je usmerjena nazaj (ker vlak pospešuje naprej). Sila v vrvici je nasprotno enaka rezultanti med težo in sistemsko silo. Dobi enak rezultat za $\mathrm{tg}\varphi$ kot zunanji opazovalec. Mereč naklonski kót vrvice (φ), lahko opazovalec v vlaku (ne da bi se oziral na okolico) določi pospešek vlaka $a_0 = g\,\mathrm{tg}\varphi$.

Recimo, da vlak ne vozi premočrtno, ampak s stalno hitrostjo v zavozi skozi ovinek s polmerom R. Zdaj ima pospešek vlaka (to je radialni pospešek: $a_0 = v^2/R$) smer k središču ovinka, zato se vrvica odkloni v zunanjo stran ovinka $\mathrm{tg}\varphi = a_0/g = v^2/Rg$.



Slika 2.41

3. Merilec pospeška. Naprava vsebuje telo (masa m), privezano na prožno vzmet (slika 2.44); usmerimo jo v smer merjenega pospeška. Če naprava miruje ali se giblje enakomerno, je telo v ravnovesju (slika 2.44a). Ko ogrodje naprave sune npr. s pospeškom a_0 v desno, telo zaradi vztrajnosti še vztraja pri prvotni hitrosti (oziroma mirovanju), zato se leva vzmet skrči, desna pa raztegne. Ko se telo v napravi umiri in se giblje z merjenim pospeškom a_0, je premaknjeno za x (slika 2.44b), tako da je $ma_0 = kx$ (k je konstanta prožnosti vzmeti). Premik telesa (x) je merilo za merjeni pospešek.

4. Centrifugalna sila. Omenili smo jo (gl. str. 44) kot silo, s katero krožeče telo učinkuje na okolico; je torej reakcija telesa na centripetalno silo, ki sili telo v kroženje. Izkaže se, da lahko centrifugalno silo interpretiramo tudi kot **sistemsko silo v vrtečem se koordinatnem sistemu**.

Gibanje telesa v vrtečem se koordinatnem sistemu smo obravnavali na strani 27. Izpeljali smo enačbo (1.63) za pospešek:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0$$

kjer je $\boldsymbol{\omega}$ kotna hitrost vrtenja koordinatnega sistema (ima smer rotacijske osi), $\mathbf{v}'$ relativna hitrost telesa (merjena glede na vrteči se koordinatni sistem), $\mathbf{r}$ pa vektor oddaljenosti telesa pravokotno od vrtilne osi (slika 2.45). Pospešek vrtečega se koordinatnega sistema je torej dan z enačbo:

$$\mathbf{a}_0 = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \omega^2\mathbf{r} \qquad (2.38)$$

Prvi člen na desni strani je v zvezi s Coriolisovim pospeškom (gl. str. 27; različen je od nič le, če je $v' \neq 0$, torej če se telo v vrtečem se sistemu giblje), drugi pa s centrifugalnim pospeškom. Najprej si oglejmo pomen drugega. Vzamemo, da telo v vrtečem se koordinatnem sistemu miruje ($v' = 0$), da se torej skupaj s koordinatnim sistemom vrti s kotno hitrostjo ω. Tedaj je $\mathbf{a}_0 = -\,\omega^2\mathbf{r}$. **Vztrajnostna sila,** ki je posledica tega pospeška koordinatnega sistema, je identična z že znano **centrifugalno silo:**

$$\mathbf{F}_{cf} = -\,m\mathbf{a}_0 = m\omega^2\mathbf{r} \quad \text{(gl. 2.29)} \qquad (2.39)$$

Usmerjena je pravokotno proč od vrtilne osi in narašča premo sorazmerno z oddaljenostjo telesa od osi.

Kot primer si mislimo telo, ki privezano z vrvico na os miruje na vodoravni, vrteči se plošči. Zunanji opazovalec vidi, da se telo vrti skupaj s ploščo, da se torej giblje z radialnim pospeškom $r\omega^2$. Zato se vrvica napne s silo F_v, ki kot centripetalna sila omogoča ta pospešek: $F_v = ma_r = mr\omega^2$. (Slika 2.46)

Opazovalec na vrteči se plošči sklepa drugače. Zanj telo miruje, torej je vsota vseh sil nič. Poleg sile v vrvici (F_v) mora upoštevati še vztrajnostno centrifugalno silo $F_{cf} = mr\omega^2$, ki je usmerjena radialno navzven. Trdi, da je vrvica napeta zato, da s silo F_v nasprotuje centrifugalni sili, ki »vleče« telo navzven. Sledi: $F_v - F_{cf} = 0$ ali $F_v = mr\omega^2$.

Tudi Zemlja je vrteči se koordinatni sistem, saj se vrti okrog polarne osi s kotno hitrostjo $\omega = 2\pi/24\ \mathrm{h} = 7{,}27.10^{-5}/\mathrm{s}$. Ko obravnavamo telesa na zemeljskem površju, moramo zato poleg teže upoštevati tudi vztrajnostno centrifugalno silo. Ta je največja na zemeljskem ekvatorju, kjer znaša $mR\omega^2$ (R = 6380 km), kar je $R\omega^2/g = 0{,}00345$-ti del teže telesa. Vidimo, da je centrifugalna sila največ okrog 1/3 odstotka teže telesa, zato je večinoma lahko zanemarimo (in obravnavamo Zemljo kot inercialni koordinatni sistem).

Za koliko odstotkov (p) je človek na geografski širini $\varphi = 46°$ navidezno lažji zaradi vrtenja Zemlje? (Slika 2.47) Na človeka »delujejo« tele sile: teža mg navzdol (v smeri k središču Zemlje), centrifugalna sila $F_{cf} = mr\omega^2 = mR\omega^2\cos\varphi$ pravokotno proč od polarne osi ter sila tal, ki jo razstavimo na navpično projekcijo N in na vodoravno F. Zanimajo nas navpične projekcije sil: $N + F_{cf}\cos\varphi - mg = 0$ ali

$$N = m(g - R\omega^2\cos^2\varphi)$$
$$p = (mg - N)/mg = 1 - N/mg = R\omega^2\cos^2\varphi/g = 0{,}0017$$
$$p = 0{,}17\%$$

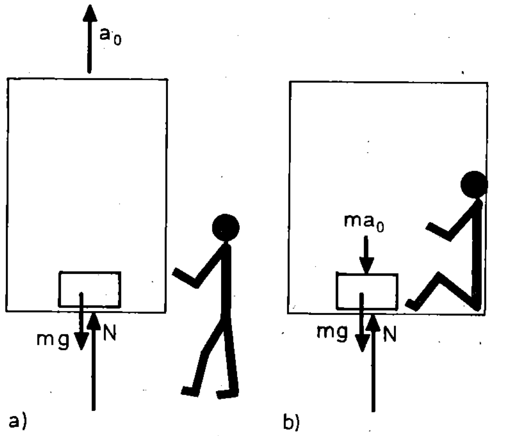
5. Coriolisova sila je tisti del vztrajnostne sile v vrtečem se koordinatnem sistemu, ki je posledica relativnega gibanja telesa; ta sila »učinkuje« le, če se telo v vrtečem se sistemu giblje.

Prvi člen na desni strani enačbe (2.38) je v zvezi s Coriolisovim pospeškom (gl. 1.65). Ustrezna vztrajnostna **(Coriolisova)** sila je;

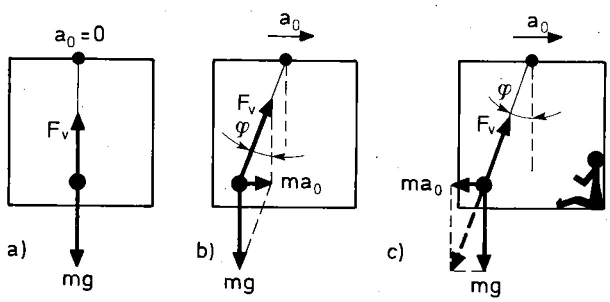
$$\mathbf{F}_C = -2\omega \times \mathbf{v}'m = 2\,\mathbf{v}' \times \omega m = m\mathbf{a}_C \qquad (2.40)$$

Coriolisova sila je pravokotna tako na vrtilno os kot na relativno hitrost telesa. Največja je, če je relativna hitrost **v**' pravokotna na vrtilno os, in je nič, če se telo giblje vzporedno z osjo.

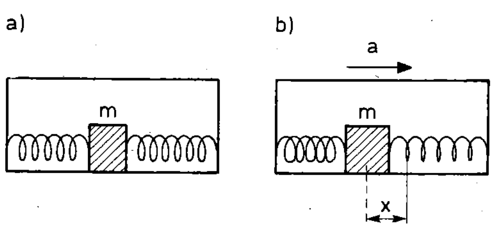
Opazovalec na zemeljskem površju lahko pravilno pojasni gibanje teles v svoji okolici (kar smo obravnavali v poglavju Coriolisov pospešek, stran 27), če poleg realnih sil upošteva tudi centrifugalno in Coriolisovo silo. Zakrivljanje ciklonskih oziroma anticiklonskih vetrov (slika 1.50) npr. »povzroča« Coriolisova sila. Ta vpliva tako močno, da vetrovi celo zakrožijo okrog centra C nizkega zračnega tlaka. Na sliki (2.48) so s črtkanimi krogi označene izobare (to so črte z enakim zračnim tlakom); notranje izobare predstavljajo manjši tlak. Ako bi se Zemlja ne vrtela, bi vetrovi pihali radialno navznoter (to je pravokotno na izobare). Zaradi Coriolisove sile pa se zavrtijo skoraj vzdolž izobar okrog centra C v nasprotni smeri (na severni polobli), kot se vrti urni kazalec. Anticiklonski vetrovi se vrtijo enako kot urni kazalec (gl. sliko 1.50a).



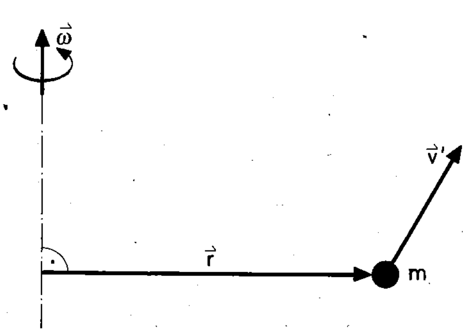
Slika 2.42



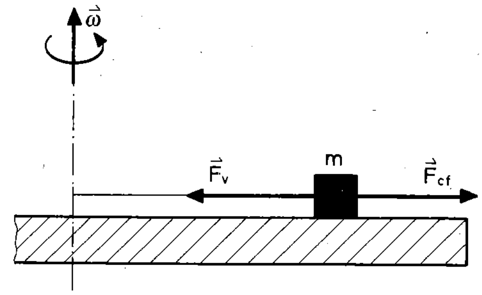
Slika 2.43



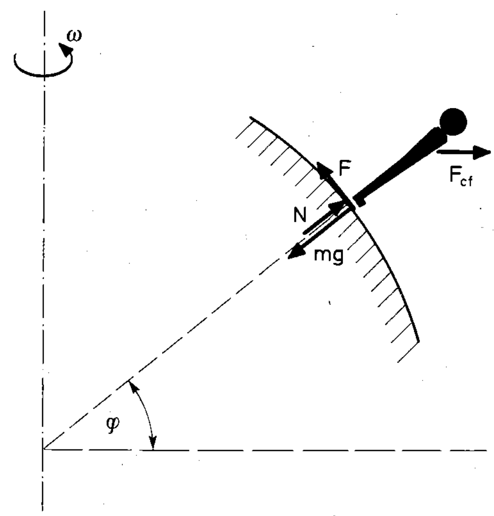
Slika 2.44



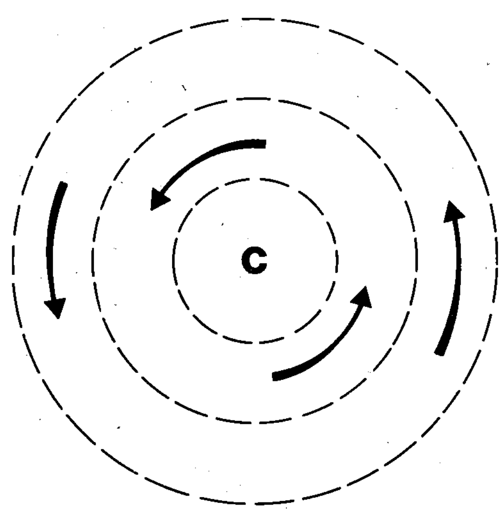
Slika 2.45



Slika 2.46



Slika 2.47



Slika 2.48