Potence in koreni

Za dano število a je

$$a \cdot a = a^2, \quad a \cdot a \cdot a = a^3, \quad a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

Splošno

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$$

Število a je *osnova*, naravno število n je *eksponent*. Osnovna pravila: $(m, n \in \mathbb{N})$

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
3. $a^n \cdot b^n = \left(a \cdot b\right)^n$

PRIMER 1: Poenostavi $2^{10} \cdot 5^{10}$.

$$2^{10} \cdot 5^{10} = \left(2 \cdot 5\right)^{10} = 10^{10}$$

♦ ♦ ♦

PRIMER 2: Poenostavi $\dfrac{\left(3 \cdot 2\right)^{10} + 3^9}{3^9}$.

$$\frac{\left(3 \cdot 2\right)^{10} + 3^9}{3^9} = \frac{3^{10} 2^{10} + 3^9}{3^9} = \frac{\cancel{3^9} \cdot 3 \cdot 2^{10} + \cancel{3^9}}{\cancel{3^9}} = 3 \cdot 2^{10} + 1$$

♦ ♦ ♦

Negativne potence

Ideja:

$$\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{m}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n}}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

Ali tudi nadaljevanje množenja v desno z deljenjem v levo.

$$\cdots\quad a^{-2}=\frac{1}{a\cdot a},\quad a^{-1}=\frac{1}{a},\quad a^0=1,\quad a^1=a,\quad a^2=a\cdot a,\quad\cdots$$

Splošno:

$$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a},\quad a^0=1\quad (a\neq 0)}$$

Zakoni potenciranja ostanejo v veljavi za $m,n\in\mathbb{Z}$.

OPOMBA: 0^0 je nedoločen izraz.

PRIMER 1: Poenostavi $\dfrac{(2\cdot 3)^{-2}\cdot 4}{(1/3)^2}$

$$\frac{(2\cdot 3)^{-2}\cdot 4}{(1/3)^2}=\frac{\cancel{3^2}\cdot\cancel{4}}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{3^2}}=1$$

♦ ♦ ♦

PRIMER 2: Poenostavi $\left[(8/3)^2-(3/8)^3\right]\left[(8/3)^{-2}+(3/8)^{-3}\right]$

$$\left[\left(\frac{8}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^3\right]\left[\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^{-3}\right]=\ldots=\left(\frac{8}{3}\right)^5-\left(\frac{3}{8}\right)^5$$

♦ ♦ ♦

Racionalni eksponent (koreni)

Naloga:

$$x^n = a \quad x = ?$$

Rešitev:

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Lastnost:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

To navaja na zapis

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{ker je} \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Osnovna pravila: $p, q \in \mathbb{Q},\ a, b > 0$

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. $\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$
3. $a^p \cdot b^p = \left(a \cdot b\right)^p$

PRIMER 1: Izračunaj $8^{-2/3}$

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

♦ ♦ ♦

PRIMER 2: Poenostavi $\left(x^{2/3}\right)^{5/2} \Big/ x^{1/4}$.

$$\left(x^{2/3}\right)^{5/2} \Big/ x^{1/4} = \ldots = x^{17/12}$$

♦ ♦ ♦

Binomska formula

Želimo izračunati: $(a+b)^n = ?$ ($n \in \mathbb{N}$). Zaporedno množenje:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

....

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^4$$

Pascalov trikotnik (1654):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Binomski koeficienti:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Faktorjela:

$$\boxed{n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n, \quad 0! = 1}$$

ali rekurzivna definicija

$$\boxed{0!=1,\quad 1!=1,\quad n!=(n-1)!\cdot n}$$

PRIMER 1: Faktorjele do 10

$$\begin{aligned}
0! &= 1\\
1! &= 1\\
2! &= 1.2 = 2\\
3! &= 1\cdot 2\cdot 3 = 6\\
4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 6\cdot 4 = 24\\
5! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 24\cdot 5 = 120\\
6! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 120\cdot 6 = 720\\
7! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 720\cdot 7 = 1540\\
8! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 1540\cdot 8 = 12320\\
9! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 12320\cdot 9 = 110880\\
10! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 110880\cdot 10 = 1108800
\end{aligned}$$

♦ ♦ ♦

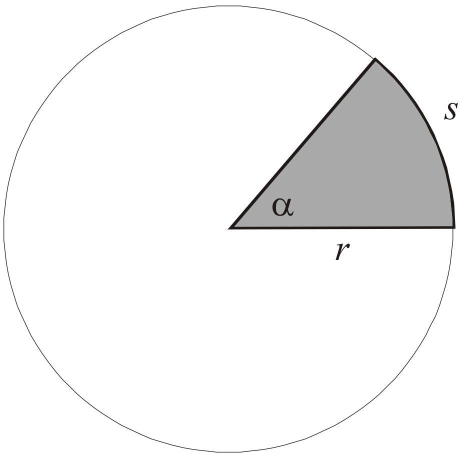
PRIMER 2: $\binom{10}{3} = ?$

$$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 10\cdot 3\cdot 4 = 120$$

♦ ♦ ♦

ELEMENTARNA TRIGONOMETRIJA

Merjenje kota



Naj bo r polmer kroga in s dolžina loka na krožnici. Radian α meri kot katerega izhodišče je središču krožnice kot razmerje

$$\boxed{\alpha = \frac{s}{r}}$$

Dolžina polkroga radija 1 je $\pi = 3.145192...$[1]. Pretvorba med stopinjami in radiani je naslednja

$$\boxed{180^0 = \pi \,\mathrm{rad}}$$

Na osnovi te formule dobimo radiane iz stopinj z

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180}\alpha^0 \approx 0.017 \times \alpha^0$$

stopinje iz radianov pa

$$\alpha^0 = \frac{180}{\pi}\widehat{a} \approx 57.3 \times \widehat{a}$$

PRIMER 1: Pretvori kot 54^0 v radiane.

$$54\pi/180 = 0.9425\,\mathrm{rad}$$

♦♦

PRIMER 2: Pretvori kot $2\pi/3$ radianov v stopinje.

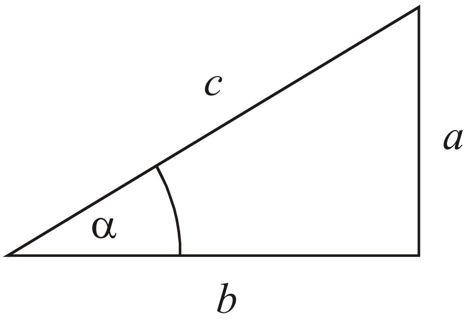
$$\frac{2\cancel{\pi}}{3}\frac{180}{\cancel{\pi}} = 60^0$$

♦♦

[1] W.Jones (1706) π od 'periphery' (obod)

Osnovna trigonometrijska razmerja

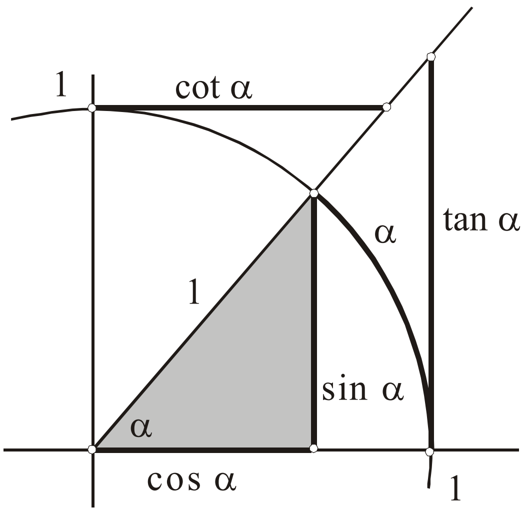
Osnovne trigonometrijske funkcije, sinus[2], kosinus, tangens in kotangens kota α so definirane z razmerji



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad (1)$$

SLIKA 1

Geometričbna ponazoritev :

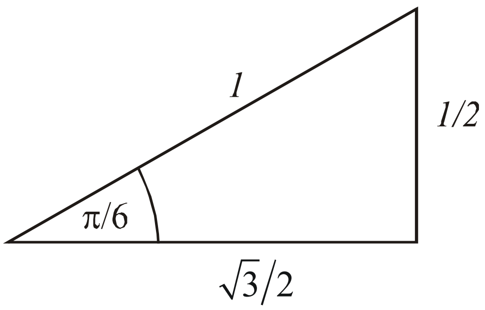


SLIKA 2. Definicija sin, cos, tan in cot

[2] Izraz *sinus* izhaja iz latinske besed *sinus rectus arcus* , ki jo je uporabil L.P.Fibonacci (1170-1250)

Nekaj vrednosti za sin, cos in tan

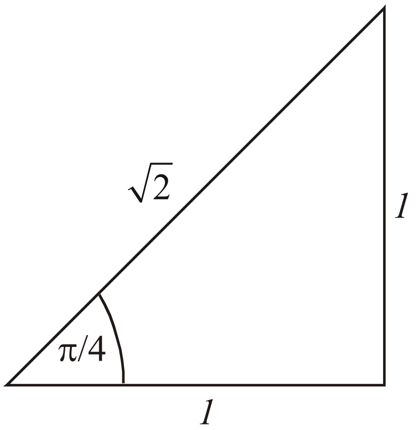
S pomočjo enakostraničnega trikotnika lahko določimo trigonometrijska razmerja za kote 30^0 in 60^0.



$$\sin 30^0 = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trigonometrijska razmerja za kot 45^0 dobimo s pomočjo enakokrakega pravokotnega trikotnika. Po Pitagorovem izreku je hipotenuza enakokrakega trikotnika, ki ima kateti dolžine 1 enaka $\sqrt{2}$ zato je



$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

in

$$\tan 45^0 = 1$$

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
radiani	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

Zveze med trigonometrijskimi razmerji

S pomočjo sinusa in kosinusa kota lahko definiramo preostali trigonometrijski razmerji tangens in kotangens

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \tag{2}$$

Ostale identitete lahko s pomočjo Pitagorevega[3] izreka. Za poljuben kot α velja

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Z upoštevanjem definicij kotnih razmerij dobimo

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1} \tag{3}$$

Če dobljeni izraz (3) delimo $\cos^2\alpha$ in uredimo dobimo

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Če (3) delimo z $\sin^2\alpha$ dobimo

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Dobljene izrazi se imenujejo *identitete*, ker veljajo za vsako vrednost kota α. Z besedo *enačnba* označujemo izraze, ki veljajo le za določene vrednosti α. Npr: $3\cos^2\alpha + 5\sin\alpha = 1$.

PRIMER 1: Poenostavi $\left(1 + \cot\alpha\right)/\sin\alpha$.

$$\frac{1 + \cot^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 + \cos^2\alpha/\sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{1}{\sin^3\alpha}$$

♦♦

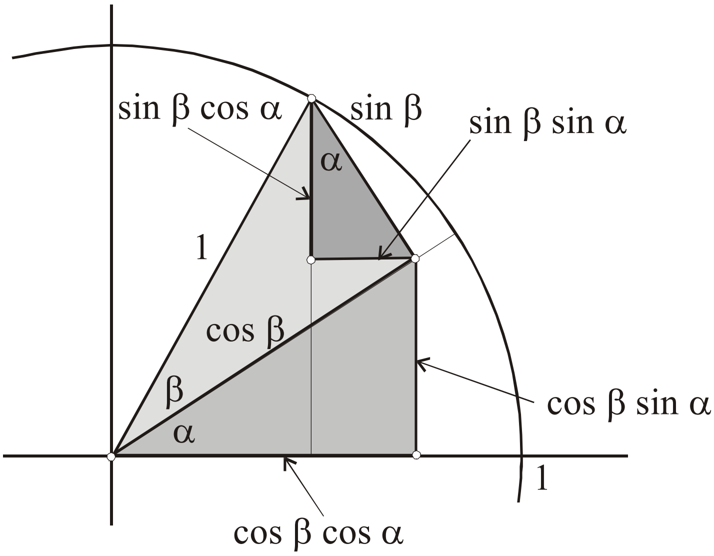
[3] Pitagora (6 stoletje BC). Grški filozof.

Adicijske zveze

Če sta α in β kota potem je glede na Sliko 3 sledi:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} \tag{4}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \tag{5}$$



SLIKA 3 Dokaz adicijskih izrazov

Če delimo (4) z (5) dobimo

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{6}$$

V (4), (5) in (6) vstavimo $\alpha=\beta$ dobimo

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha} \tag{7}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} \tag{8}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{9}$$

Če v (8) upoštevamo (3) dobimo

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2 - 1$$

Zamenjamo α z $\alpha/2$ pa donimo

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \tag{10}$$

Ti identiteti medsebojno delimo

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{11}$$

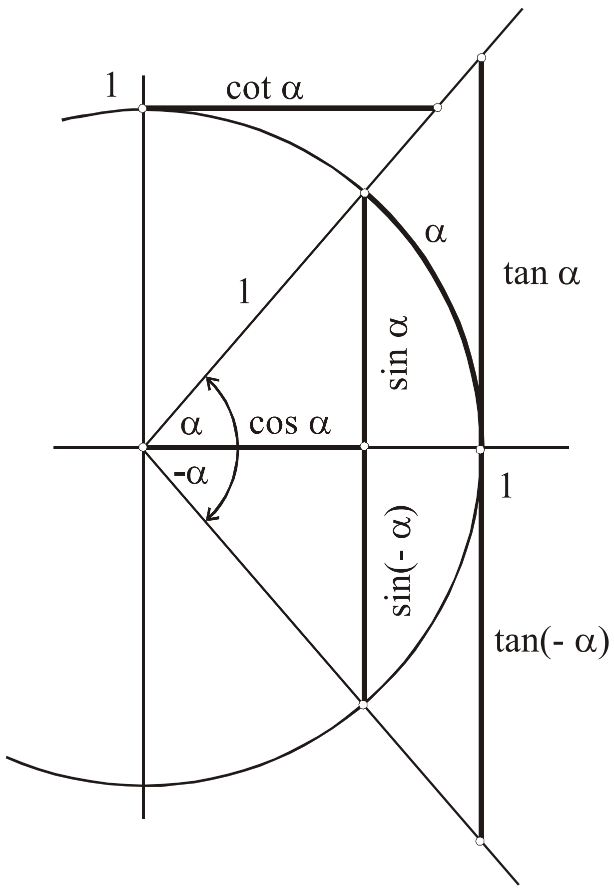
PRIMER 1: Poenostavi $\tan\alpha + \cot\alpha$.

$$\begin{aligned}\tan\alpha + \cot\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \\ &= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{\sin 2\alpha}}}\end{aligned}$$

♦♦

Negativni koti

Zasuk v smeri urinega kazalca je negativen, v obratni pozitiven.



$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha & \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha & \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \end{array}} \tag{12}$$

Identitete za razliko kotov:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{13}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{14}$$

<u>Uporaba</u>:

$$A\sin\alpha + B\cos\alpha = ?$$

Primerjamo s (14). Postavimo

$$A = C\sin\varphi \quad B = C\cos\varphi$$

Dobimo

$$\boxed{\begin{aligned} A\sin\alpha + B\cos\alpha = C\left(\sin\varphi\sin\alpha + \cos\varphi\cos\alpha\right) = \\ = C\cos\left(\alpha - \varphi\right) \end{aligned}}$$

pri čemer mora biti

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{in} \quad \tan\varphi = \frac{A}{B}.$$