ŠTEVILA

Naravna števila $\mathbb{N}$: 1,2,3,...
Ulomki:
Cela števila $\mathbb{Z}$: ...,-2,-1,0,1,2,...
Racionalna števila $\mathbb{Q}$:
Realna števila $\mathbb{R}$:

	Seštevanje	**Množenje**
Komutativnost (zamenljivost)	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Asociativnost (združevanje)	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
Distributivnost (razčlenitev)	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$	
Nevtralno število	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Obratni/inverzno število	$a+(-a)=0$	$a\cdot a^{-1}=0,\ a\neq 0$

<u>Urejenost</u>

Za poljubni števili *a* in *b* velja ena od treh možnosti

$$\boxed{a<b \quad \text{ali} \quad a=b \quad \text{ali} \quad a>b}$$

Velja:

$$\boxed{a<b \quad \text{in} \quad b<c \quad \text{potem je} \quad a<c}$$

Uporabljajo se še naslednje oznake:

1. $a\leq b$: *a* je manjše ali enako *b* (negacija izjave $a>b$)
2. $a\geq b$: *a* je večje ali enako *b* (negacija izjave $a<b$)
3. $a\neq b$: *a* ni enako *b* (negacija izjave $a=b$)

Računanje:
1. Naj bo $a<b$ in *c* poljubno število. Potem je $a+c<b+c$
2. Naj bo $a>0$ in $b>0$. Potem je $a\cdot b>0$.

Naravna števila

Deljivost:

Naj bo $a > b$ Število b deli število a, če lahko pišemo

$$a = k \cdot b \ \left(k \in \mathbb{N}\right)$$

Praštevila so števila, so števila ki so deljiva le samim seboj in številom ena. Ostala števila so sestavljena števila. Vsako sestavljeno število lahko zapišemo kot produkt samih praštevil. Ta razcep je en sam.

Npr: $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$

Ulomki

Rešujemo enačbo: $a \cdot x = b$

Enakost: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = c \cdot d$

Seštevanje: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

Množenje: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Cela števila

Rešujemo enačbo: $a + x = b$

Enačbe

<u>Linearna enačba</u>

$$a\,x + b = 0, \quad x = ?$$

Rešitev:

$$x = -\frac{b}{a}, \;\; a \neq 0$$

Primer: Reši $5x + 12 = 0$

$$5x + 12 = 0 \;\Rightarrow\; 5x = -12 \;\Rightarrow\; x = -\frac{12}{5}$$

<u>Kvadratna enačba</u>

$$ax^2 + bx + c = 0, \;\; a \neq 0$$

Dopolnitev do popolnega kvadrata

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=0} + \frac{c}{a}\right]$$

Urejeno

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]}$$

Rešitev enačbe

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Število rešitev je odvisno od izraza $b^2 - 4ac$:

1. $b^2 - 4ac > 0$ dve rešitvi
2. $b^2 - 4ac = 0$ ena rešitev
3. $b^2 - 4ac < 0$ ni rešitve (v množici realnih števil)

Faktorizacija izraza $ax^2 + bx + c$. Če sta x_1 in x_2 ničli enačbe $ax^2 + bx + c = 0$ je

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

ali

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1x_2\right] \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \; x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Primer: Reši $2x^2 + 4x - 6 = 0$.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 2\cdot\left(-6\right)}}{2\cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{4}$$
$$= -1 \pm \frac{\sqrt{64}}{4} = -1 \pm \frac{8}{4} = -1 \pm 2$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1$$

Faktorizacija: $2x^2 + 4x - 6 = 2\left(x+3\right)\left(x-1\right)$

♦ ♦ ♦

Potence in koreni

Za dano število *a* je

$$a \cdot a = a^2, \quad a \cdot a \cdot a = a^3, \quad a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

Splošno

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$$

Število *a* je *osnova*, naravno število *n* je *eksponent*.

Osnovna pravila: $m, n \in \mathbb{N}$

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
3. $a^n \cdot b^n = \left(a \cdot b\right)^n$

Primer 1: Poenostavi $2^{10} \cdot 5^{10}$

$$2^{10} \cdot 5^{10} = \left(2 \cdot 5\right)^{10} = 10^{10}$$

♦ ♦ ♦

Primer 2: Poenostavi $\dfrac{\left(3 \cdot 2\right)^{10} + 3^9}{3^9}$

$$\frac{\left(3 \cdot 2\right)^{10} + 3^9}{3^9} = \frac{3^{10} 2^{10} + 3^9}{3^9} = \frac{\cancel{3^9} \cdot 3 \cdot 2^{10} + \cancel{3^9}}{\cancel{3^9}} = 3 \cdot 2^{10} + 1$$

♦ ♦ ♦

<u>Negativne potence</u>

Ideja:

$$\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{m}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n}}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

Ali tudi nadaljevanje množenja v desno z deljenjem v levo.

$$\cdots\quad a^{-2}=\frac{1}{a\cdot a},\quad a^{-1}=\frac{1}{a},\quad a^0=1,\quad a^1=a,\quad a^2=a\cdot a,\quad\cdots$$

Splošno:

$$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a},\quad a^0=1\quad (a\neq 0)}$$

Zakoni potenciranja ostanejo v veljavi za $m,n\in\mathbb{Z}$.

OPOMBA: 0^0 je nedoločen izraz.

Primer 1: Poenostavi $\dfrac{(2\cdot 3)^{-2}\cdot 4}{(1/3)^2}$

$$\frac{(2\cdot 3)^{-2}\cdot 4}{(1/3)^2}=\frac{\cancel{3^2}\cdot\cancel{4}}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{3^2}}=1$$

♦ ♦ ♦

Primer 2: Poenostavi $\left[(8/3)^2-(3/8)^3\right]\left[(8/3)^{-2}+(3/8)^{-3}\right]$

$$\left[\left(\frac{8}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^3\right]\left[\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^{-3}\right]=\ldots=\left(\frac{8}{3}\right)^5-\left(\frac{3}{8}\right)^5$$

♦ ♦ ♦

Racionalni eksponent (koreni)

Naloga:

$$x^n = a \quad x = ?$$

Rešitev:

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Lastnost:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

To navaja na zapis

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{ker je} \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Osnovna pravila: $p, q \in \mathbb{Q},\ a, b > 0$

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. $\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$
3. $a^p \cdot b^p = \left(a \cdot b\right)^p$

Primer 1: Izračunaj $8^{-2/3}$

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

♦ ♦ ♦

Primer 2: Poenostavi $\left(x^{2/3}\right)^{5/2} / x^{1/4}$.

$$\left(x^{2/3}\right)^{5/2} / x^{1/4} = \ldots = x^{17/12}$$

♦ ♦ ♦

Algebrajične identitete

Osnovni identiteti: $(a+b)^n = ?$ in $a^n - b^n = ?$ ($n \in \mathbb{N}$)

Binomi:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

....

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^4$$

Pascalov trikotnik (1654):

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Binomski koeficienti:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Faktorjela:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n, \quad 0! = 1$$

Faktorizacija:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2) = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

In this way, formula (2.2) remains valid also for negative exponents. Next, mul-