4. Sistemi diferencialnih enačb

V praktičnih primerih večkrat naletimo na več diferencialnih enačb, ki opisujejo določen pojav in so medsebojno povezane; tedaj govorimo o *sistemih diferencialnih enačb*.

V teh enačbah nastopa več neznanih funkcij iste neodvisne spremenljivke. Neodvisno spremenljivko bomo sedaj označevali s črko t (v konkretnih primerih je to običajno kar čas), neznane odvisne spremenljivke pa $x, y, z, \ldots$ ali pa $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Odvode odvisnih spremenljivk po neodvisni spremenljivki bomo označevali s piko:

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \ldots$$

Sistem navadnih diferencialnih enačb prvega reda ima obliko:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= h_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\dot{x}_2 &= h_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= h_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Takšen sistem imenujemo *normalni sistem* diferencialnih enačb. V njem so $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neznane funkcije, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ pa so dane funkcije *n+1* spremenljivk. V normalnem sistemu je enačb enako mnogo kot neznanih funkcij, v vsaki enačbi je le en prvi odvod.

Rešitev sistema je n-terica takšnih funkcij $x_1(t),\ x_2(t), \cdots, x_n(t)$, ki na nekem intervalu (t_1, t_2) identično zadoščajo sistemu.

4.1 Sistem linearnih diferencialnih enačb

Sistem diferencialnih enačb imenujemo *linearen*, če je vsaka od funkcij $h_k(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ linearna funkcija odvisnih spremenljivk x_k, $k = 1,2,..,n$. Linearni sistem diferencialnih enačb ima torej obliko:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned}
$$

Pri tem predpostavimo, da so koeficienti $a_{ik}(t), i, k = 1,2,...,n$ in funkcije $f_i(t), i = 1,2,..,n$ zvezne funkcije spremenljivke *t* na nekem intervalu.

Če uvedemo dve vektorski funkciji:

$$
\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}
$$

in matriko koeficientov:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

lahko sistem linearnih diferencialnih enačb zapišemo v matrični obliki:

$$
\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)
$$

Če je funkcija $\mathbf{f}(t)$ enak nič, potem je sistem diferencialnih enačb *homogen*; v nasprotnem primeru je sistem *nehomogen*.

V konkretnih problemih iščemo rešitve sistema diferencialnih enačb, ko imamo podane začetne pogoje:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 .$$

Za reševanje naloge s podanimi začetnimi pogoji je pomemben naslednji izrek:

Če so elementi matrike **A** *in komponente vektorja* **f** *funkcije, definirane na neskončnem ali končnem intervalu in so tam omejene, potem ima dani sistem linernih diferencialnih enačb skupaj z začetnim pogojem na obravnavanem intervalu eno samo rešitev.*

Oglejmo si sedaj homogeni sistem linearnih diferencialnih enačb:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t).$$

Da se pokazati, da ima zgornji sistem enačb n linearno neodvisnih rešitev $\mathbf{z}_k(t), (k = 1,2,\ldots,n)$, zato ima splošna rešitev homogenega sistema obliko

$$\mathbf{z}(t) = C_1\mathbf{z}_1(t) + C_2\mathbf{z}_2(t) + \cdots + C_n\mathbf{z}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\mathbf{z}_k(t),$$

pri čemer so C_k poljubne konstante. Če definiramo matriko **Z** kot

$$\mathbf{Z}(t) = \left[\mathbf{z}_1(t), \mathbf{z}_2(t), \cdots, \mathbf{z}_n(t)\right]$$

in vektor **c** kot

$$\mathbf{c} = \left[C_1, C_2, \cdots, C_n\right]^T,$$

potem lahko rešitev homogenega sistema zapišemo tudi v matrični obliki

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}(t)\mathbf{c}.$$

Da določimo vrednost vektorja **c,** vstavimo zgornjo rešitev v začetni pogoj. Na ta način dobimo

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{Z}(t_0)\mathbf{c} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} = \mathbf{Z}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 .$$

Rešitev homogenega sistema linearnih diferencialnih enačb s podanim začetnim pogojem ima torej obliko:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}(t)\mathbf{Z}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 .$$

Rešitev nehomogenega sistema enačbe poiščemo z metodo <u>*variacije konstant* </u>:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Z}(t)\mathbf{u}(t),$$

kjer je $\mathbf{u}(t)$ nova neznana vektorska funkcija. Če ta izraz vstavimo v nehomogeno enačbo, dobimo

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Z}\,\mathbf{u}) = \dot{\mathbf{Z}}\,\mathbf{u} + \mathbf{Z}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\,\mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{f} .$$

Ker pa je $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\,\mathbf{Z}$, imamo:

$$\mathbf{Z}\,\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} .$$

Gornjo enačbo integriramo, pa dobimo:

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{Z}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau + \mathbf{c} .$$

Če zgornji izraz vstavimo v prvotni nastavek, dobimo rešitev nehomogenega sistema v obliki:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Z}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{Z}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau + \mathbf{Z}(t)\mathbf{c} .$$

Vektor **c** dobimo tako, da v gornjo enačbo vstavimo $t = t_0$. Na ta način dobimo:

$$\mathbf{c} = \mathbf{Z}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 .$$

Če definiramo matriko

$$\mathbf{K}(t,t_0)=\mathbf{Z}(t)\mathbf{Z}^{-1}(t_0),$$

lahko končno obliko rešitve problema začetnih vrednosti zapišemo v obliki

$$\mathbf{x}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{K}(t,\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau+\mathbf{K}(t,t_0)\mathbf{x}_0 .$$

4.2 Sistem linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

Nehomogen sistem linearnih diferencialnih enačb ima obliko:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t).$$

Vsi elementi matrike **A** so konstante.

Pripadajoč *homogen* sistem linearnih diferencialnih enačb je:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)\ .$$

Rešitev nehomogenega sistema dobimo z metodo variacije konstant, ki je opisana v prejšni točki, rešitev homogenega sistema pa poiščemo z nastavkom

$$\mathbf{x}=\mathbf{a}e^{\lambda t},$$

kjer je **a** še neznani vektor s konstantnimi komponentami, λ pa neznani skalar. Rešitev homogenega sistema bomo dobili, ko bomo izračunali vektor **a** in skalar λ.
Izračunajmo v ta namen najprej odvod:

$$\dot{\mathbf{x}}=\lambda\mathbf{a}e^{\lambda t}$$

in dobljeni izraz vstavimo v levo stran homogenega sistema enačb, tako da dobimo:

$$\lambda \mathbf{a} e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{a} e^{\lambda t}$$

in od tod:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{a} e^{\lambda t} = \mathbf{0}.$$

Ker $e^{\lambda t} \neq 0$ in ker iščemo netrivialno rešitev $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, bo zgornja enačba izpolnjena pri pogoju:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Dobljeno enačbo imenujemo _karakteristična enačba_ homogenega sistema diferencialnih enačb. V razviti obliki predstavlja karakteristična enačba polinom stopnje sistema enačb n glede na skalar λ. Koreni polinoma $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ so torej ravno _lastna vrednost matrike_ $\mathbf{A}$. Za vsako vrednosti $\lambda = \lambda_k$ dobimo iz sistema enačb

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

vektor $\mathbf{a}_k$, ki je _lastni vektor matrike_ $\mathbf{A}$. Partikularne rešitve homogenega sistema enačb so torej funkcije

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{a}_k e^{\lambda_k t},$$

splošna rešitev pa je linearna kombinacija partikularnih rešitev:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{a}_k e^{\lambda_k t}.$$

Gornja rešitev velja v primeru, če so vsi koreni karakterističnega polinoma med seboj različni. V primeru, ko pri reševanju karakteristične enačbe nastopajo večkratni koreni, pa poiščemo partikularne rešitve v obliki:

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{p}_k(t) e^{\lambda_k t},$$

pri čemer je $\mathbf{p}_k(t)$ polinom spremenljivke t, ki ima stopnjo za eno manjše kot je stopnja korena λ_k.

Primer 4.1:

Rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 6x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 5x_2\end{aligned}$$

REŠITEV:

Dani sistem enačb zapišimo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 6 \\ -2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

in poiščimo rešitev z nastavkom:

$$\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a \\ b\end{bmatrix}e^{\lambda t} \quad .$$

Odvod bo:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}a \\ b\end{bmatrix}e^{\lambda t} \quad .$$

Vstavimo oboje v prvotno enačbo in jo uredimo, pa dobimo:

$$\begin{bmatrix}2-\lambda & 6 \\ -2 & -5-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a \\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}.$$

Od tod sledi karakteristična enačba:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 6 \\ -2 & -5-\lambda\end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Ko gornjo determinanto izračunamo, dobimo enačbo:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 .$$

Gre za preprosto kvadratno enačbo z rešitvama:

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{in} \quad \lambda_2 = -2 .$$

1) Pri $\lambda_1 = -1$, se naš sistem glasi:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Enačbi sta linearno odvisni, zato je $a + 2b = 0$. Če izberemo $b = 1$, dobimo lastni vektor $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, ki ustreza lastni vrednosti λ_1.

2) Ko je $\lambda_2 = -2$, pa ima sistem obliko:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Enačbi sta linearno odvisni, zato je $2a + 3b = 0$. Če izberemo $b = 1$, dobimo lastni vektor $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, ki ustreza lastni vrednosti λ_2.

Od tod ugotovimo, da je splošna rešitev danega sistema takšen vektor:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{a}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{a}_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t} \quad ,$$

pri čemer sta C_1 in C_2 poljubni konstanti.

Rešitev sistema, zapisana s komponentama, se torej glasi:

$$x_1(t) = -2C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-2t}$$
$$x_2(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-2t} .$$

□□□

Primer 4.2:

Rešimo sistem enačb:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 3x_2$$

REŠITEV:

Karakteristična enačba:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ .$$

da enačbo:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 .$$

ki ima dvojno ničlo:

$$\lambda_{1,2} = 2 .$$

Rešitev zato iščemo v obliki:

$$x_1 = (a + b\,t)e^{2t}$$
$$x_2 = (c + d\,t)e^{2t}$$

Kjer so *a,b,c* in *d* konstante, ki jih je potrebno določiti. Če gornji nastavek vstavimo v izhodni sistem enačb, dobimo:

$$2a + b + 2b\,t = a + b\,t - c - d\,t$$

S primerjavo koeficientov pri enakih potencah *t* dobimo:

$$d = -b$$
$$c = -a - b$$

pri čemer ostaneta konstanti *a* in *b* poljubni. Označimo ti konstanti z C_1 in C_2, pa dobimo splošno rešitev sistema:

$$x_1(t) = (C_1 + C_2\,t)e^{2t}$$
$$x_2(t) = -(C_1 + C_2 + C_2\,t)e^{2t} .$$

□□□

4.3 Naloge

Reši naslednje sisteme diferencialnih enačb:

1. $$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \;;$$

2. $$\dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \;;$$

3. $$\dot{x}_1 = x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \;;$$

4. $$\dot{x}_1 = -x_2$$
$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 \,;$$

5. $$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -6x_2 - 5x_3 \,;$$

6. $$\dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 + x_3$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + 5x_2 - x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 3x_3 \,;$$

7. $$\dot{x}_1 = 3x_1 + 12x_2 - 4x_3$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$\dot{x}_3 = -x_1 - 12x_2 + 6x_3 \,;$$

8. $$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$\dot{x}_2 = 12x_1 - 4x_2 - 12x_3$$
$$\dot{x}_3 = -4x_1 + x_2 + 5x_3 \,;$$

9. $$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + \sin t \,;$$

Določi partikularno rešitev ob začetnih pogojih:
$x_1(0) = 3, x_2(0) = 4$.

10. $\dot{x}_1 = 4x_1 - x_3$
$\dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 + x_3$
$\dot{x}_3 = 8x_1 - 3x_3$;

Določi partikularno rešitev ob začetnih pogojih:
$x_1(0) = 2, x_2(0) = -1, x_3(0) = 5$.

11. $\dot{x}_1 = -3x_1 - x_2$
$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$

Določi partikularno rešitev ob začetnih pogojih:
$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1$.

12. $\dot{x}_1 = -x_2 + x_3$
$\dot{x}_2 = x_3$
$\dot{x}_3 = -x_1 + x_3$;

Določi partikularno rešitev ob začetnih pogojih:
$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = \frac{1}{2},\ x_3(0) = \frac{1}{2}$.

13. $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_3$
$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3$
$\dot{x}_3 = x_1 + x_2 + x_3$;

Določi partikularno rešitev ob začetnih pogojih:
$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0$.

14. $\dot{x}_1 = x_2 + x_3$
$\dot{x}_2 = x_1 + x_3$
$\dot{x}_3 = x_1 + x_2$;

Določi partikularno rešitev ob začetnih pogojih:
$x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 1,\ x_3(0) = 0$.

4.4 Rešitve

1. $x_1 = C_1 e^t + C_2(t-1)e^t$

   $x_2 = C_1 e^t + C_2 t e^t$;

2. $x_1 = -C_1 e^t - 3C_2 e^{-t}$

   $x_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$;

3. $x_1 = -C_1 e^{2t} + C_2(1-t)e^{2t}$

   $x_2 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t}$;

4. $x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$

   $x_2 = C_1 e^t - 3C_2 e^{-3t}$;

5. $x_1 = 1 - 2e^{-2t} + e^{-3t}$

   $x_2 = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$

   $x_3 = -8e^{-2t} + 9e^{-3t}$;

6. $x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$

   $x_2 = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}$

   $x_3 = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$;

7. $x_1 = -2C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}$

   $x_2 = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$

   $x_3 = 2C_1 e^t + 7C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}$;

8. $x_1 = 2C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}$

   $x_2 = 3C_1 - 2C_3 e^{2t}$

   $x_3 = C_1 + C_2 e^t + 2C_3 e^{2t}$;

9. $x_1 = -\frac{\sin t}{4} + \left(\frac{3}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{24}\right)e^{\sqrt{3}t} + \left(\frac{3}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{24}\right)e^{-\sqrt{3}t}$

$x_2 = -\frac{1}{4}(2\sin t + \cos t) + \left(\frac{17}{8} - \frac{11\sqrt{3}}{12}\right)e^{\sqrt{3}t} + \left(\frac{17}{8} - \frac{11\sqrt{3}}{12}\right)e^{-\sqrt{3}t}$;

10. $x_1 = \left(1 + \frac{2\sqrt{17}}{17}\right)e^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}t} + \left(1 - \frac{2\sqrt{17}}{17}\right)e^{\frac{1-\sqrt{17}}{2}t}$

$x_2 = e^{2t} - \left(1 + \frac{2\sqrt{17}}{17}\right)e^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}t} - \left(1 - \frac{2\sqrt{17}}{17}\right)e^{\frac{1-\sqrt{17}}{2}t}$

$x_3 = \left(\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{17}}{34}\right)e^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}t} + \left(\frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{17}}{34}\right)e^{\frac{1-\sqrt{17}}{2}t}$;

11. $x_1 = (1 - 2t)e^{-2t}$

$x_2 = (2t - 1)e^{-2t}$;

12. $x_1 = \cos t$

$x_2 = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$

$x_3 = -\frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$;

13. $x_1 = \frac{1}{6}\left(2e^{-t} + 3e^{-2t} + e^{2t}\right)$

$x_2 = \frac{1}{6}\left(2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{2t}\right)$

$x_3 = \frac{1}{3}\left(-e^{-t} + e^{2t}\right)$;

14. $x_1 = -e^{-t}$

$x_2 = e^{-t}$

$x_3 = 0$.