### 3.2.1 Homogena linearna diferencialna enačba II. reda

V splošnem se homogene linearne diferencialne enačbe drugega reda ne da rešiti v zaključeni obliki, vendar pa se da v primeru, ko poznamo eno partikularno rešitev, z integracijo dobiti drugo partikularno rešitev in s tem splošno rešitev dane enačbe. Naj bo $z_1$ znana partikularna rešitev in $z_2$ neznana rešitev. Obe rešita homogeno enačbo, zato velja

$$z_1'' + p(x)z_1' + q(x)z_1 = 0$$

in

$$z_2'' + p(x)z_2' + q(x)z_2 = 0\,.$$

Pomnožimo prvo enačbo $z_2$, drugo pa z $z_1$ ter ju odštejmo. Na ta način dobimo:

$$z_1''z_2 - z_1z_2'' + p(x)\left(z_1'z_2 - z_1z_2'\right) = 0\,.$$

Če označimo

$$W\left(z_1, z_2\right) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = z_1z_2' - z_1'z_2\,,$$

je odvod

$$W'\left(z_1, z_2\right) = z_1z_2'' - z_1''z_2$$

in lahko zgirnjo enačbo zapišemo v obliki:

$$W' + p(x)W = 0\,,$$

od koder dobimo po integraciji:

$$W\left(z_1, z_2\right) = Ce^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Če sedaj v zgornji enačbi vzamemo $C = 1$ ter upoštevamo definicijo funkcije *W*, dobimo zapis:

$$z_1 z_2' - z_1' z_2 = e^{-\int p(x)\,dx},$$

ki predstavlja linearno diferencialno enačbo za neznano funkcijo $z_2$. Delimo jo z $z_1^2$ in uredimo

$$\frac{z_1 z_2' - z_1' z_2}{z_1^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{z_1}$$

in po integraciji dobimo iskano rešitev:

$$z_2 = z_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{z_1^2}\,dx.$$

Gornja formula se imenuje *Abelova formula*[1].

**Primer 3.4:**

Določimo splošno rešitev enačbe

$$(1+x)y'' + xy' - y = 0,$$

če je $y_1 = x$ njena partikularna rešitev!

REŠITEV:

Enačbo prepišemo v obliko

$$y'' + \frac{x}{1+x}y' - \frac{y}{1+x} = 0,$$

od koder preberemo

[1] Niels Abel (1802-1829) - norveški matematik.

$$p(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Po Abelovi formuli je sedaj

$$y_2 = x\int \frac{e^{-\int \frac{x}{1+x}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{1+x}{x^2}e^{-x}dx =$$

$$= x\left(\frac{e^x}{x} - \int \frac{e^{-x}}{x^2}dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2}dx\right) = e^{-x}$$

Splošna rešitev dane enačbe je torej

$$y = C_1 x + C_2 e^{-x}.$$

□□□

### 3.2.2 Nehomogena linearna diferencialna enačba II. reda

Podobno kot pri linerani diferencialni enačbi prvega reda se da dobiti splošno rešitev nehomogene linerane diferencialne enačbe drugega reda z <u>*metodo variacije konstant*</u>.

Naj bosta $z_1(x)$ in $z_2(x)$ linearno neodvisni rešitvi prirejene homogene enačbe. Da se pokazati, da je splošna rešitev homogene enačbe:

$$z = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x).$$

Splošno rešitev nehomogene enačbe poiščemo z nastavkom:

$$y = C_1(x) z_1(x) + C_2(x) z_2(x).$$

Pri tem sta $C_1(x)$ in $C_2(x)$ novi neznani funkciji, ki ju je potrebno določiti. Izračunamo najprej prvi odvod zgornje funkcije:

$$y' = C_1'(x) z_1(x) + C_2'(x) z_2(x) + C_1(x) z_1'(x) + C_2(x) z_2'(x).$$

Ker mora izbrani nastavek rešiti dano enačbo, bomo iz te enačbe dobili eno izmed enačb za določitev funkcij $C_1(x)$ in $C_2(x)$. Če hočemo izračunati obe funkciji, potrebujemo še en pogoj. Za nadaljnJi izračun je najenostavnejše, če postavimo:

$$C_1'(x)z_1(x) + C_2'(x)z_2(x) = 0 .$$

V tem primeru se prvi odvod funkcije $y(x)$ glasi

$$y' = C_1(x)z_1'(x) + C_2(x)z_2'(x) ,$$

drugi odvod pa ima obliko

$$y'' = C_1(x)z_1''(x) + C_2(x)z_2''(x) + C'(x)_1 z_1'(x) + C_2'(x)z_2'(x) .$$

Če vstavimo dobljena odvoda $y'$ in $y''$ v nehomogeno enačbo, dobimo:

$$C_1(x)\left[z_1'' + p(x)z_1' + q(x)z_1\right] + C_2(x)\left[z_2'' + p(x)z_2' + q(x)z_2\right] +$$
$$+C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' = f(x).$$

Ker sta $z_1(x)$ in $z_2(x)$ rešitvi homogene enačbe, sta izraza v oglatih oklepajih enaka 0, zato ostane:

$$C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' = f(x) .$$

Na ta način smo dobili dve enačbi, iz katerih lahko izračunamo neznani funkciji $C_1(x)$ in $C_2(x)$:

$$C_1'(x)z_1(x) + C_2'(x)z_2(x) = 0$$

$$C_1'(x)z_1'(x) + C_2'(x)z_2'(x) = f(x) .$$

Gornji enačbi predstavljata sistem dveh linearnih algebraičnih enačb, katerega rešitvi sta:

$$C_1'(x) = -\frac{z_2(x) f(x)}{W(z_1, z_2)} \quad \text{in} \quad C_2'(x) = \frac{z_1(x) f(x)}{W(z_1, z_2)}.$$

Pri tem je determinanta koeficientov:

$$W(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} = z_1(x) z_2'(x) - z_2(x) z_1'(x)$$

vedno različna od nič, ker sta po predpostavki $z_1(x)$ in $z_2(x)$ linearno neodvisni rešitvi.

Z integriranjem dobimo nadalje:

$$C_1(x) = -\int \frac{z_2(x) f(x)}{W(z_1, z_2)} dx + c_1$$

in

$$C_2(x) = \int \frac{z_1(x) f(x)}{W(z_1, z_2)} dx + c_2,$$

pri čemer sta $c_1$ in $c_2$ sta poljubni integracijski konstanti. Če vstavimo sedaj dobljeni funkciji v začetni nastavek, dobimo splošno rešitev nehomogene enačbe:

$$y = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + z_1(x) \int \frac{z_2(x) f(x)}{W(z_1, z_2)} dx + z_2(x) \int \frac{z_1(x) f(x)}{W(z_1, z_2)} dx.$$

**Primer 3.5:**

Določimo splošno rešitev enačbe

$$y'' + \left(4x - \frac{1}{x}\right) y' + 4x^2 y = 3x e^{-x^2},$$

če je $z_1 = e^{-x^2}$ ena izmed  partikularnih rešitev prirejene homogene enačbe!

REŠITEV:

Najprej določimo drugo partikularno rešitev prirejene homogene enačbe. Ker je

$$p(x) = 4x - \frac{1}{x},$$

je po Abelovi formuli

$$z_2 = e^{-x^2} \int \frac{e^{-\int\left(4x-\frac{1}{x}\right)dx}}{e^{-2x^2}} dx = e^{-x^2} \int x\,dx = \frac{x^2}{2} e^{-x^2} .$$

Splošna rešitev prirejene homogene enačbe je torej

$$z = C_1 e^{-x^2} + C_2 x^2 e^{-x^2} .$$

Da dobimo splošno rešitev nehomogene enačbe, izračunamo

$$W(z_1, z_2) = e^{-2x^2} \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ -2x & 2x\left(1 - x^2\right) \end{vmatrix} = 2x\,e^{-2x^2}$$

ter integrala

$$C_1(x) = -\frac{3}{2} \int x^2 dx + c_2 = -\frac{x^3}{2} + c_2 ,$$

$$C_2(x) = -3 \int dx + c_1 = 3x + c_1 .$$

Splošna rešitev enačbe je zato

$$z = c_1 e^{-x^2} + c_2 x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2} .$$

□□□

## 3.3 Linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti

Splošna oblika te enačbe je:

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x).$$

Pri tem sta $p$ in $q$ poljubni realni števili.

### 3.3.1 Homogena enačba

Rešitev homogene enačbe

$$z'' + pz' + qz = 0$$

iščemo z nastavkom :

$$z = e^{\lambda x} \; .$$

Ker je od tod:

$$z' = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{in} \quad z'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

dobimo iz prvotne enačbe:

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right)e^{\lambda x} = 0 .$$

Od tu dobimo:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 .$$

Gornji izraz imenujemo <u>*karakteristična enačba*</u> diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti. Iz nje izračunamo vrednost konstante $\lambda$ . Ker gre za kvadratno enačbo, sta njeni rešitvi odvisni od diskriminante

$$D = p^2 - 4q \; .$$

Glede na njeno vrednost nastopajo tri možnosti:

1) **D > 0**

V tem primeru ima karakteristična enačba dve različni realni ničli:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \omega$$

in splošna rešitev diferencialne enačbe se glasi:

$$z = e^{-\frac{p}{2}x}\left(C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}\right).$$

Gornjo rešitev se da zapisati tudi s pomočjo hiperboličnih funkcij. Ker je

$$\operatorname{ch}\omega x = \frac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2} \quad \text{in} \quad \operatorname{sh}\omega x = \frac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{2},$$

lahko zapišemo rešitev tudi v obliki

$$z = e^{-\frac{px}{2}}\left(c_1 \operatorname{ch}\omega x + c_2 \operatorname{sh}\omega x\right).$$

2) **D < 0**

Karakteristična enačba ima dve konjugirano kompleksni ničli:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{-D}}{2} = -\frac{p}{2} \pm i\omega .$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je:

$$z = e^{-\frac{px}{2}}\left(C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}\right).$$

Če upoštevamo Eulerjevo zvezo med trigonometričnimi funkcijami in eksponentno funkcijo

$$\cos\omega x = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} \quad \text{in} \quad \sin\omega x = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i},$$

lahko to rešitev zapišemo tudi v obliki

$$z = e^{-\frac{px}{2}}\left(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x\right).$$

3) **D = 0**

Karakteristična enačba ima dvojno realno ničlo. Z nastavkom smo torej dobili eno partikularno rešitev

$$z_1 = e^{-\frac{px}{2}}.$$

Drugo dobimo s pomočjo Abelove formule

$$z_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{e^{-px}} dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int dx = x e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je v tem primeru torej:

$$z = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{-\frac{px}{2}}.$$

**Primer 3.6:**

Rešimo homogeno linearno diferencialno enačbo 2. reda

$$y'' - 2y' + y = 0$$

in zapišimo njeno partikularno rešitev, če je dan začetni pogoj:

$$y(2)=1 \text{ in } y'(2)=-2.$$

REŠITEV:

Karakteristična enačba

$$\lambda^2-2\lambda+1=0$$

ima dvojno ničlo

$$\lambda_1=\lambda_2=1,$$

zato se splošna rešitev glasi:

$$y=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Partikularno rešitev ob danih začetnih pogojih dobimo tako, da te pogoje upoštevamo v izrazu za y in $y'$. Iz prvega pogoja dobimo

$$C_1e^2+2C_2e^2=1$$

Ker je:

$$y'=C_1e^x+C_2e^x+C_2xe^x,$$

dobimo iz drugega pogoja:

$$C_1e^2+3C_2e^2=-2,$$

Iz obeh enačb dobimo konstanti:

$$C_1=7e^{-2}, \qquad C_2=-3e^{-2},$$

tako da je iskana partikularna rešitev:

$$y=7e^{x-2}-3xe^{x-2}.$$

□□□

### 3.3.2 Nehomogena enačba

Rešitev nehomogene enačbe

$$y'' + p\,y' + q\,y = f\,(x)$$

lahko <u>*vedno dobimo z metodo variacije konstant*</u>, vendar je v nekaterih primerih izračun partikularne rešitve enostavnejši z uporabo <u>*metode nedoločenih koeficientov.*</u>

Oglejmo si to metodo za primer, ko uporaba metode nedoločenih koeficientov zagotovo vodi hitreje do cilja kot metoda variacije konstant. Ger za primere, ko je desna stran diferencialne enačbe podana v obliki <u>*polinoma stopnje*</u> *n*:

$$f\,(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 \,.$$

Partikularno rešitev v tem primeru iščemo v obliki polinoma iste stopnje:

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,.$$

Gornjo funkcijo dvakrat odvajamo:

$$y_0'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\left(k+1\right)x^k$$

$$y_0''(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\left(k+1\right)k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+2}\left(k+1\right)\left(k+2\right)x^k \,.$$

in vstavimo vse štiri izraze (za $y_0, y_0', y_0''$ *in* *f*(*x*)) v nehomogeno diferencialno enačbo:

$$\sum_{k=0}^{n-2} a_{k+2}(k+1)(k+2)x^k + p\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1)x^k + q\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k$$

Sedaj izenačimo koeficiente pri enakih potencah *x* na levi ter desni strani zgornje enačbe in za $k = 0, 1, .., n-2$, dobimo:

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + p(k+1)a_{k+1} + q\,a_k = A_k \ ,$$

za ostali potenci pa:

$$\begin{aligned} pna_n + qa_{n-1} &= A_{n-1} \\ qa_n &= A_n \ . \end{aligned}$$

Na ta način smo dobili sistem *n* linearnih algebraičnih enačb, ki ima trikotno obliko in iz katerega lahko zaporedoma izračunamo neznane koeficiente $a_k$ , $k = 0, 1, .., n$ .

**Primer 3.7:**

Poiščimo partikularno rešitev enačbe

$$y'' + y = x^2 + x \, .$$

REŠITEV:

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom

$$y_0 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \, .$$

Izračunamo drugi odvod

$$y_0' = A_1 + 2A_2 x \quad \Rightarrow \quad y_0'' = 2A_2 \, .$$

Vstavimo nastavek v dano enačbo, pa dobimo

$$2A_2 + A_0 + A_1 x + A_2 x^2 = x + x^2 \, .$$

Primerjava koeficientov pri enakih potencah $x$ nam da

$$A_2 = 1 \quad A_1 = 1 \quad A_0 = -2\,,$$

tako, da je iskana partikularna rešitev dane enačbe:

$$y_0 = x^2 + x - 2\,.$$

□□□

Navedimo še nekaj primerov, ko se da partikularno rešitev dobiti z metodo nedoločenih koeficientov:

1) Kadar je desna stran diferencialne enačbe funkcija

$$f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)\,,$$

in

1.1) $\lambda$ ni koren karakteristične enačbe, iščemo partikularno rešitev v obliki:

$$y_0(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,.$$

1.2) $\lambda$ je koren karakteristične enačbo, iščemo partikularno rešitev v obliki:

$$y_0(x) = x^{\alpha} e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,,$$

pri čemer je $\alpha$ stopnja korena karakteristične enačbe.

2) Kadar je desna stran diferencialne enačbe funkcija

$$f(x) = e^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x\right]$$

in

2.1) $\lambda \pm i\omega$ ni koren karakteristične enačbe, ima partikularna rešitev obliko:

$$y_0(x) = e^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x + S_n(x)\sin\omega x\right],$$

2.2) $\lambda \pm i\omega$ je koren karakteristične enačbe, pa ima partikularna rešitev obliko

$$y_0(x) = x^{\alpha}e^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x + S_n(x)\sin\omega x\right].$$

Pri tem sta $P_m(x)$ in $R_m(x)$ polinoma stopnje *m,* $Q_n(x)$ in $S_n(x)$ pa sta polinoma stopnje *n.*

**Primer 3.8:**

Poiščimo partikularno rešitev enačbe

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x-1).$$

REŠITEV:

Ker je $k = 2$ dvojni koren karakteristične enačbe, iščemo partikularno rešitev z nastavkom ($\alpha = 2$):

$$y_0 = x^2 e^{2x}(A_0 + A_1 x) = e^{2x}(A_0 x^2 + A_1 x^3).$$

Izračunamo odvoda:

$$y_0' = e^{2x}\left[2A_0 x + (2A_0 + 3A_1)x + 2A_1 x^3\right]$$

$$y_0'' = e^{2x}\left[2A_0 + (8A_0 + 6A_1)x + (4A_0 + 12A_1)x^2 + 4A_1 x^3\right]$$

ter ju skupaj z nastavkom vstavimo v dano enačbo. Na ta način dobimo:

$$2A_0 + 6A_1 x = x - 1,$$

od koder sledi:

$$A_0 = -\frac{1}{2} \quad A_1 = \frac{1}{6}.$$

Iskana partikularna rešitev dane enačbe se torej glasi:

$$y_0 = \frac{x^2 e^{2x}}{6}\left(x-3\right).$$

□□□

## 3.4 Eulerjeva[2] diferencialna enačba

Enačba oblike:

$$x^2 y'' + p\,x\,y' + q\,y = f\,(x),$$

kjer sta $p$ in $q$ konstanti, se imenuje *Eulerjeva diferencialna enačba drugega reda*.

Tudi v tem primeru najprej rešimo prirejeno homogeno enačbo:

$$x^2 z'' + p\,x\,z' + q\,z = 0.$$

Njeno rešitev poiščemo z nastavkom:

$$y = x^{\lambda},$$

pri čemer je $\lambda$ neznana konstanta. Izračunamo še odvoda $z' = \lambda x^{\lambda-1}$ in $z'' = \lambda\left(\lambda - 1\right)x^{\lambda-2}$, pa dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + \left(p-1\right)\lambda + q = 0,$$

iz katere izračunamo korena $\lambda_1$ in $\lambda_2$.

[12] Leonard Euler (1707-1783) - švicarski matematik.

V primeru, ko sta korena karakteristične enačbe različna, je splošna rešitev homogene enačbe

$$z = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}.$$

Če sta korena enaka $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1-p}{2}$, nam nastavek da le eno partikularno rešitev $z_1 = x^{\frac{1-p}{2}}$. Če dano enačbo prepišemo v obliko

$$z'' + \frac{p}{x} z' + \frac{q}{x^2} z = 0,$$

dobimo s pomočjo Abelove formule drugo partikularno rešitev

$$z_2 = x^{\frac{1-p}{2}} \int \frac{e^{-p\int \frac{dx}{x}}}{x^{1-p}} dx = x^{\frac{1-p}{2}} \int \frac{dx}{x} = x^{\frac{1-p}{2}} \ln x.$$

Rešitev homogene enačbe je torej v tem primeru:

$$z = \left(C_1 + C_2 \ln x\right) x^{\frac{1-p}{2}}.$$

Ko smo dobili rešitev homogene enačbe, lahko dobimo rešitev nehomogene enačbe z metodo variacije konstant. Preden metodo uporabimo, moramo seveda dano enačbo najprej prepisati v obliko

$$y'' + \frac{p}{x} y' + \frac{q}{x^2} y = \frac{f(x)}{x^2}.$$

**Primer 3.9:**

Rešimo enačbo $x^2 y'' + xy' - y = x \ln x$.

REŠITEV:

Z nastavkom $z = x^\lambda$ rešimo prirejeno homogeno enačbo. Karakteristična enačba

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

ima korena $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 1$. Splošna rešitev prirejene homogene enačbe se zato glasi:

$$z = \frac{C_1}{x} + C_2 x .$$

Rešitev nehomogene enačbe dobimo z metodo variacije konstant. Najprej prepišemo enačbo v obliko:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{\ln x}{x} .$$

Izračunamo

$$W(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x \\ -\frac{1}{x^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{x}$$

ter integrala

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} \int x \ln x \, dx + c_1 = -\frac{x^2}{4} \ln x - \frac{x^2}{8} + c_1 ,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2} \int \frac{\ln x}{x} dx + c_2 = \frac{\ln^2 x}{4} - \frac{x^2}{8} + c_2 .$$

Splošna rešitev enačbe je torej:

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 x + \frac{x}{8}\left(2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1\right).$$

□□□