2.2 Linearna diferencialna enačba 1. reda

Diferencialna enačba, v kateri nastopata neznana funkcija in njen odvod v prvi potenci

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x),$$

se imenuje *linearna diferencialna enačba*.

V primeru, ko je $f(x) \equiv 0$, se zgornja enačba imenuje *homogena*, v nasprotnem primeru pa se enačba imenuje *nehomogena*.

Linearno diferencialno enačbo 1. reda lahko rešimo na več načinov. V nadaljevanju si bomo ogledali metodo z imenom *metoda variacije konstante*. Po tej metodi moramo najprej prvotni enačbi prirediti homogeno enačbo

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = 0,$$

ki predstavlja diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama. Ko jo integriramo, dobimo:

$$\ln z + \int p(x)dx = \ln C,$$

od koder preberemo rešitev:

$$z = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Na ta način smo dobili splošno rešitev prirejene homogene enačbe.

Rešitev nehomogene enačbe poiščemo sedaj tako, da C ne jemljemo več kot konstanto, temveč kot novo neznano funkcijo, to pomeni, da rešitev iščemo v obliki

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Ker je

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\int p(x)dx}\frac{dC}{dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx},$$

dobimo iz prvotne enačbe

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{dC}{dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + -C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

ali

$$\frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx},$$

od koder dobimo z integracijo

$$C(x) = \int e^{-\int p(x)dx} f(x)dx + C_1 .$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe je zato

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + C_1\right].$$

Primer 2.5:

Rešimo linearno diferencialno enačbo 1. reda:

$$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \ !$$

REŠITEV:

Najprej moramo rešiti pripadajočo homogeno enačbo, ki se v tem primeru glasi:

$$z' + \cos x\, z = 0 .$$

Gornjo enačbo zapišemo v obliki:

$$\frac{dz}{z} = -\cos x \, dx ,$$

jo integriramo:

$$\ln z = -\sin x + \ln C$$

in dobimo rešitev prirejene homogene diferencialne enačbe:

$$z = Ce^{-\sin x} .$$

Rešitev nehomogene enačbe bomo po metodi variacije konstante poiskali z nastavkom oblike $y = C(x)e^{-\sin x}$. Sedaj od tod izračunamo še odvod $y' = e^{-\sin x} C' - e^{-\sin x} C \cos x$ in oboje vstavimo v prvotno enačbo:

$$e^{-\sin x} C' - e^{-\sin x} C \cos x + e^{-\sin x} C \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x ,$$

oziroma po ureditvi:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} e^{-\sin x} \sin 2x = e^{-\sin x} \sin x \cos x .$$

Od tod še:

$$dC = e^{-\sin x} \sin x \cos x \; dx = e^{-\sin x} \sin x \; d(\sin x) .$$

Z integracijo obeh strani dobimo:

$$C(x) = e^{-\sin x} \left(\sin x - 1 \right) + C_1 .$$

Če sedaj vstavimo dobljeni izraz za C(x) v rešitev homogene enačbe, dobimo končno splošno rešitev prvotne enačbe v obliki:

$$y = \sin x - 1 + C_1 e^{-\sin x} .$$

□□□

Primer 2.6:

Rešimo še enačbo: $xy' + y = \ln x$!

REŠITEV:

Prirejena homogena enačba se glasi:

$$xz' + z = 0 .$$

Ker gre za diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama, jo znamo brez težav rešiti. Najprej jo prepišemo v obliko:

$$x\,dz + z\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} + \frac{dx}{x} = 0 ,$$

ki jo lahko integriramo in dobimo:

$$z\,x = C \Rightarrow z = \frac{C}{x} .$$

Rešitev nehomogene enačbe bo po nastavku enaka:

$$y = \frac{C(x)}{x} .$$

Velja (izračunamo odvod):

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} .$$

Postavimo gornja izraza v enačbo, ki jo rešujemo in dobimo:

$$xy' + y = \ln x ,$$

$$x\left[\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}\right] + \frac{C(x)}{x} = \ln x ,$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \ln x ,$$

$$C(x) = \int \ln x\,dx = x\ln x - x + C_1$$

Splošna rešitev enačbe se torej glasi:

$$y = \ln x - 1 + \frac{C_1}{x} .$$

2.4 Bernoullijeva[1] diferencialna enačba

Diferencialna enačba prvega reda, ki ima obliko

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha} , \quad (\alpha \neq 1),$$

pri čemer je α realna konstanta, se imenuje *Bernoullijeva enačba*.

Enačbo rešujemo tako, da najprej obe strani enačbe najprej delimo z y^{α}. Na ta način dobimo:

$$\frac{1}{y^{\alpha}} y' + \frac{1}{y^{\alpha-1}} p(x) = f(x) .$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko $u = u(x)$ v obliki:

$$u = y^{1-\alpha} .$$

Njen odvod se glasi:

$$u' = (1-\alpha)\frac{1}{y^{\alpha}} y' .$$

Ko to upoštevamo v prvotni enačbi, jo lahko zapišemo v obliki:

$$\frac{du}{dx} + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)f(x) .$$

[1] Johann Bernoulli (1667-1748) - švicarski matematik

Dobljena enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda za neznano funkcijo *u,* ki jo že znamo rešiti.

Primer 2.7:

Poiščimo splošno rešitev enačbe $\left(1+x^2\right)y' = xy + x^2y^2$!

REŠITEV:

Ko to enačbo zapišemo v obliki:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x^2}{1+x^2}y^2 \ ,$$

vidimo, da gre za Bernoullijevo enačbo. Najprej jo bomo delili z y^2:

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{y} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

in nato vpeljali novo spremenljivko $u = \frac{1}{y}$. Ker je odvod:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} \ ,$$

preide enačba v obliko:

$$\frac{du}{dx} + \frac{x}{1+x^2}u = -\frac{x^2}{1+x^2} .$$

Dobili smo linearno diferencialno enačbo I. reda, ki jo bomo rešili z metodo variacije konstante. Splošno rešitev pripadajoče homogene enačbe:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{x}{1+x^2}v = 0$$

dobimo tako, da ločimo spremenljivki in enačbo integriramo:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{x\,dx}{1+x^2} \Rightarrow \ln v = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \ln C$$

ter uredimo:

$$v = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \quad .$$

Rešitev nehomogene enačbe iščemo v obliki $u = Cv$, pri čemer postavimo $C = C(x)$. Izračunamo:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{dC}{dx} - \frac{xC}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

in vstavimo v nehomogeno enačbo. Po ureditvi dobimo:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{dC}{dx} = -\frac{x^2}{1+x^2} \quad ,$$

od tod pa sledi:

$$C(x) = -\int \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx + C_1 = -\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C_1 \quad .$$

Rešitev nehomogene enačbe za spremenljivko $u = u(x)$ je torej:

$$u = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}} \, .$$

Ko v ta izraz še vstavimo nazaj prvotno spremenljivko *y*, dobimo končno rešitev:

$$\frac{1}{y} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}} \, .$$

□□□