Predavanja 7

7.1 Konvergenca neskončnih vrst

Če hočemo sešteti neskončno vrsto

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

s splošnim členom a_n, potem moramo tvoriti zaporedje delnih vsot

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \, .$$

in izračunati limito tega zaporedja

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n \, .$$

Če je ta limita končna je vrsta konvergentna, v nasprotnem primeru pa je divergentna. V primeru ko je vrsta konvergentna je limita s vsota vrste.

Če hočemo torej ugotoviti ali dana vrsta konvergentna ali divergentna moramo izračunati ustrezno limito zaporedja delnih vsot. To pa lahko izračunamo, če lahko na nek način izrazimo n-ti člen zaporedja delnih vsot s_n v zaključeni obliki.

Primer. Za vrsto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

je n-ti člen zaporedja delnih vsot

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)}_{=0} - \cdots - \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)}_{=0} - \frac{1}{n+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Vsota vrste je torej

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1-0 = 1\,,$$

kar pomeni, da je vrsta konvergentna.

V mnogih primerih je nemogoče izraziti n-ti člen zaporedja delnih vsot v zaključeni obliki, vseeno pa bi radi vedeli ali je dana vrsta divergentna ali konvergentna. Če je namreč vrsta konvergentna lahko vsaj približno izračunamo njeno vsoto tako, da seštejemo končno število členov, pri divergentni vrsti pa je zaporedno seštevanje členov jalovo početje. Naloga je torej najti ustrezne kriterije po katerih bomo lahko ugotovili ali je vrsta konvergentna ali divergentna.

7.2 Potrebni pogoj konvergence neskončne vrste

Predpostavimo, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna. To pomeni, da limita pripadajočega zaporedja delnih vsot $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ obstaja

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Člene zaporedja delnih vsot lahko zapišemo tudi rekurzivno

$$s_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}_{=s_{n-1}} + a_n = s_{n-1} + a_{n+1}$$

Če sedaj izračunamo limito dobljenega izraza dobimo

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(s_{n-1}+a_n\right) = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Rightarrow \\
&s = s + \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Rightarrow \\
&\lim_{n\to\infty} a_n = s - s = 0
\end{aligned}$$

Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna potem za njene člene velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ugotovili smo torej potrebni pogoj konvergence, ki pa je hkrati tudi zadostni pogoj za ugotavljanje divergenco vrste. V primeru, ko je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ je vrsta zanesljivo divergentna. Ponovimo vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentna $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ $\Rightarrow$ vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je divergentna

Primer. Vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$$

je divergentna. Splošni člen te vrste je $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, limita tega člena pa

$$\lim \frac{n}{1+n} = \lim \frac{n}{n\left(1/n+1\right)} = \frac{1}{\lim\left(1/n+1\right)} = 1 \neq 0 .$$

Ali je pogoj $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ tudi zadosten, torej ali je vrsta za katero velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ zanesljivo konvergentna

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\Rightarrow$ vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentna ????

Oglejmo si dva primera.

Primer. (Leibniz, 1673**)** Harmonična vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

za katero velja $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, je divergentna. Da to ugotovimo združimo zaporedoma dva, štiri, osem,... členov vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

in tvorimo naslednje zaporedje delnih vsot[1]

[1] Pri tem smo izkoristili oceno $n > n-1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{n-1} > \dfrac{1}{n}$

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

Vsota harmonične vrste je torej večja od vsote vrste

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots$$

Ta vrsta pa je divergentna, saj je za to vrsto

$$s_n = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2}}_{(n-1)\times} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

in torej $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$.

Primer. Vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

za katero velja $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, je konvergentna[2]. Izkoristimo oceno

$$n^2 > n(n-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

torej $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}, \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}, \ldots$ in tvorimo n-to delno vsoto zaporedja delnih vsot ter jo ocenimo

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

Zaporedje delnih vsot $\{s_n\}$ je torej stalno pod vrednostjo 2, kar pomeni da dana vrsta konvergira.

[2] Njena vsota je $\frac{\pi^2}{6}$.

Zadnja primera kažeta na to, da pogoj $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ni zadosten za konvergenco. Obstajajo namreč vrste za katere je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ vrste pa so divergentne, obstajajo pa tudi primeri vrst za katere je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ in so vrste konvergentne. Primera pa kaže tudi na to, da se da ugotavljati konvergenco ali divergenco vrste s primerjanjem vrst.

7.3 **Konvergenčni testi za vrste s pozitivnimi členi**

Vrsta $\sum_k a_k$ je vrsta s pozitivnimi členi, če velja za vsak člen vrste ocena $a_k \geq 0$. Ugotavljanje konvergence takih vrst je enostvnejše kot ugotavljanje konvergence vrste s poljubnimi členi. Za vrsto s pozitivnimi členi sta možnosti le, da ta konvergira ali pa da divergira. Za ugotavljanje konvergence take vrste imamo na razpolago naslednja primerjalna testa (dokaz glej Vidav, str. 368-369)

Test 1. *Naj bo* $\sum_k a_k$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo vrsta s pozitivnimi členi* $\sum_k c_k$ *konvergentna, vrsta s pozitivnimi členi* $\sum_k d_k$ *pa divergentna. Če velja od nekega k naprej ocena* $a_k \leq c_k$ *je vrsta* $\sum_k a_k$ *konvergentna, če velja ocena* $a_k \geq d_k$ *pa je vrsta* $\sum_k a_k$ *divergentna.*

Test 2. *Naj bo* $\sum_k a_k$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo vrsta s pozitivnimi členi* $\sum_k c_k$ *konvergentna, vrsta s pozitivnimi členi* $\sum_k d_k$ *pa divergentna. Če veljaod nekega k naprej ocena* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k}$ *je vrsta* $\sum_k a_k$ *konvergentna, če velja ocena* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{d_{k+1}}{d_k}$ *pa je vrsta* $\sum_k a_k$ *divergentna.*

Če hočemo ta test uporabiti moramo izbrati neko konvergentno vrsto. Najenostavnejša izbira je geometrijska vrsta $1 + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$, ki konvergra za $q < 1$ in divergira za $q \geq 1$. Če torej dano vrsto s pozitivnimi členi $\sum_k a_k$ primerjamo s geometrijsko vrsto dobimo naslednja kriterija konvergence (A.Cauchy, 1821)

Chauchyev korenski test. *Naj bo* $\sum_k a_k$ *vrsta s pozitivnimi členi in od nekega k naprej velja ocena* $a_k \leq q^k$, *pri čemer je* $0 < q < 1$ *t.j. velja ocena* $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ *je vrsta* $\sum_k a_k$ *konvergentna, če pa velja ocena* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *pa je vrsta* $\sum_k a_k$ *divergentna.*

Chauchyev kvocientni test. *Naj bo* $\sum_k a_k$ *vrsta s pozitivnimi členi in od nekega k naprej velja ocena* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$ *je vrsta* $\sum_k a_k$ *konvergentna, če pa velja ocena* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ *pa je vrsta* $\sum_k a_k$ *divergentna.*

Pri teh testih je potrebno povdariti, da morata biti $\sqrt[n]{a_n}$ in $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ pod neko konstantno vrednostjo q, ker ne zadošča samo ocena

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \text{ali} \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$$

na kar kaže primer harmonične vrste. za to vrsto je npr. po kvocientnem testu

$$\frac{1/n+1}{1/n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

vrsta pa vseeno divergira.

Najenostavnejša za praktično uporabo pa sta naslednja testa, ki sta neposredna posledica naštetih Chauchyevih testov

Chauchyev korenski test. *Naj bo* $\sum_k a_k$ *vrsta s pozitivnimi členi. Če obstaja limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ *potem je vrsta konvergentna, če je* $l < 1$ *in divergentna, če je* $l > 1$. *V primeru, ko je* $l = 1$ *test odpove.*

Chauchy-d'Alambertov kvocentni test. *Naj bo* $\sum_k a_k$ *vrsta s pozitivnimi členi. Če obstaja limita* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ *potem je vrsta konvergentna, če je* $l < 1$ *in divergentna, če je* $l > 1$. *V primeru, ko je* $l = 1$ *test odpove.*

Primer. Ali je vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{3!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots$$

konvergentna ? Uporabimo d'Alambertov kriterij. Splošni člen vrste je $a_n = \frac{2^n}{n!}$.
Tvorimo razmerje

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

in izračunamo limito

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 .$$

Ker je $l = 0 < 1$ vrsta konvergira.

7.4 Absolutna konvergenca

Navedeni kriteriji so uporabni le za vrste s pozitivnimi členi. Vprašanje je kako obravnavat konvergenco vrst s poljubnimi (pozitivnimi in negativnimi členi). Na to vprašanje odgovarja naslednji izrek (dokaz glej Vidav str. 374-375)

Naj bo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ neka splošna neskončna vrsta. Tej vrsti pridružimo vrsto, ki jo tvorijo absolutne vrednosti dane vrste

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Če vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, potem konvergira tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. V tem primeru pravimo, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutno konvergentna.

Konvergenco vrste $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ lahko npr. testiramo po d'Alambertu in na ta način dobimo naslednji kriterij absolutne konvergence

$$
\begin{array}{|llll|}
\hline
\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 & \Rightarrow & \text{vrsta } \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ je konvergentna} \\
\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1 & \Rightarrow & \text{vrsta } \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ je divergentna} \\
\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1 & \Rightarrow & \text{test odpove} \\
\hline
\end{array}
$$

Velja torej implikacija

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \quad \text{konvergira} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konvergira}$$

ne velja pa obratno

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konvergira} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \quad \text{konvergira} \quad ????$$

Primer. Da se dokazati, da

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$$

konvergira, njena vsota je enaka $s=\ln 2$, medtem, ko vrsta $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ divergira. Vrsto pomnožimo z 2 in jo uredimo

$$
\begin{aligned}
2s &= 2-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}-\frac{2}{6}+\frac{2}{7}-\frac{2}{8}+\frac{2}{9}-\frac{2}{10}+\cdots \\
&= 2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\cdots\cdots \\
&= (2-1)-\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)-\cdots \\
&= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots = s
\end{aligned}
$$

Dobili smo nesmisel.

Vrstam $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ki konvergirajo, vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ divergira, pravimo pogojno konvergentne vrste. Med absolutno konvergentnimi vrstami in pogojno konvergentnimi vrstami obstaja naslednja osnovna razlika:

Pri absolutno konvergentnih vrstah prerazporeditev členov vrste ne vpliva na konvergenco kot tudi ne na vsoto vrste. Za računanje z absolutno konvergentnimi vrstami veljajo vsi aritmetični zakoni: zakon komutativnosti, asociativnosti in distributivnosti.

Pri pogojno konvergentnih vrstah pa se lahko vrednost vsote vrste spremeni s spremembo vrstnega reda seštevanja, vrsta pa lahko postane tudi divergentna.

Naloge

1. Izračunaj vsote naslednjih vrst

a) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\cdots$

b) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$

c) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$

d) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$

e) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$

f) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots$

2. Z uporabo d'Alambertovega kriterija ugotovi katera od naslednjih vrst je konvergentna

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2k^5-1}$ d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k^2+k-3}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$ f) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(k+1)^2}$ g) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k+1}$ h) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

3. Katera izmed naslednjih vrst je konvergentna

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{k-1}k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ c) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{1+2^{2k}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}$

e) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\ln k}}$ f) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}$ g) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^5}{2^k+3^k}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$