Predavanja 6: Vrste 11.11.2002

VRSTE. NESKONČNE VRSTE

Vrste

Vrsto dobimo, ko seštevamo člene zaporedja.

Primer 1. Vsota prvih n naravnih števil $1+2+3+\cdots+n$. Vsoto zapišemo na dva načina:

$$s_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

in

$$s_n = n+(n-1)+\cdots+3+2+1$$

Če izraza seštejemo po kolonah dobimo

$$\begin{aligned}2s_n &= (n+1)+(n-1+2)+\cdots+(2+n-1)+(1+n)= \\ &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\times} = n(n+1)\end{aligned}$$

Vsota prvih n števil je torej enaka

$$\boxed{1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Da to res drži se dokaže s popolno indukcijo.

▲▲▲

Primer 2. Vsota kvadratov prvih n naravnih števil $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$. Ta vsota je enaka

$$\boxed{1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Da to res drži se dokaže s popolno indukcijo.

▲▲▲

Primer 3. Vsota kvadratov prvih $n+1$ členov aritmetičnega zaporedja. Členi tega zaporedja so dani s predpisom

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Vsota prvih $n+1$ členov je torej

$$A_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+nd) =$$
$$= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\times} + d\underbrace{(1+2+\cdots+n)}_{=\frac{n(n+1)}{2}} = na + d\frac{n(n+1)}{2}.$$

Po ureditvi je končni rezultat

$$\boxed{a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+nd) = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}}.$$

▲▲▲

Primer 4. Vsota kvadratov prvih $n+1$ členov geometričnega zaporedja $\{a^n\}$. Vsota tega zaporedja je:

$$s_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

Obe strani te enačbe pomnožimo z a

$$as_n = a + a^2 + a^2 + \cdots + a^{n+1}$$

in dobljeno enačbo odštejemo od predhodne. Na ta način dobimo

$$(1-a)s_n = 1 + (a-a) + (a^2 - a^2) + \cdots + (a^n - a^n) - a^{n+1} =$$
$$= 1 - a^{n+1}$$

Če je $a \neq 1$ velja

$$\boxed{1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1-a^n}{1-a}}.$$

▲▲▲

Za vsoto $a_1 + a_2 + ... + a_n$ se uporablja simbol

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

pri čemer je $\sum$ (sigma) sumacijski simbol, *k* pa sumacijski indeks, ki ima vse vrednosti od 1 do *n*.

Primer 5. $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}$.

Simbol $\sum_{k=m}^{n} a_k$ pomeni vsoto tistih a_k , za katere ima k vrednosti $m, m+1, m+2, ..., n$.

Primer 6. $\sum_{k=3}^{5}\frac{1}{k!}=\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$.

Seveda je vsota neodvisna od črke, ki označuje sumacijski indek. Tako npr. velja

$$a_1+a_2+...+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{j=1}^{n}a_j$$

Naloge.

Izračunaj naslednje vsote

a) $1+2+3+\cdots+40$ b) $1^2+2^2+\cdots+40^2$

c) $2+5+8+\cdots+26$ d) $81+76+71+\cdots+26$

e) $2+6+18+\cdots+1458$ f) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1024}$

Odg: 820, 22140, 126, 642, 2186, $2049/3072 \approx 0.666992$

Binomska vrsta

Izraz oblike $(a+b)^n$ se imenuje binomski izraz. Zaporedoma dobimo

....

ali splošno

$$\boxed{(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Poseben primer binomske vrste dobimo, če postavimo $a=1$ in $b=x$

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

Naloge.

Razsčleni

a) $(2+3x)^4$ b) $(1-x)^5$

Neskončne vrste

Za vsoto neskončnega števila členov $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ se uporablja simbol

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ .$$

Delne vote te vrste označimo s simbolom

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Vsota vrste

$$s = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

pa pomeni

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Definicija. *Vrsta* $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ *je* *konvergentna, če je konvergentno zaporedje delnih vsot*

$$s_1 = a_1, \ \ s_2 = a_1 + a_2, \ \ s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ \ s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \ \ ...$$

Limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ *zaporedja delnih vsot je vsota vrste.*

Če zaporedje delnih vsot ni konvergentno, je vrsta divergentna.

Literatura.

I.Vidav – *Višja matematika I*, polglavje V, §5

Dodatna literatura.

Eli Passow – *Understanding Calculus Concepts*, Shaum's Outline Series, Chap. 7
R.Courant, F.John – *Introduction to Calculus and Analysis*, Interscience Publisher, Sec 1.7 d.