ZAPOREDJA

Primer: Spremljanje dnevne temperature.

Zaporedje zapišemo takole

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Krajši zapis $\{a_n\}$, a_n je splošni člen zaporedja

Primeri

Aritmetično zaporedje

Členi aritmetičnega zaporedja so določeni po naslednjem pravilu

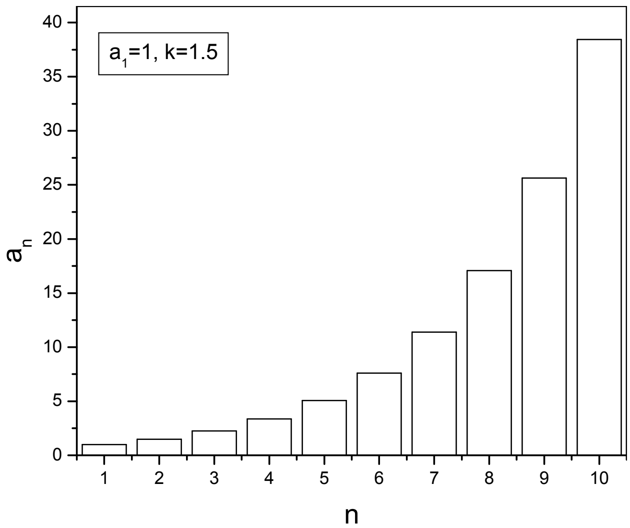
$$a_{n+1} = a_n + d$$

Določi splošni člen:

Geometrično zaporedje

$$a_{n+1} = k\, a_n$$

Določi splošni člen !



Uporaba. Obrestni račun. Obrestno obrestovanje. Prirastek kapitala x je v vsaki obrestovalni dobi sorazmeren trenutni vrednosti kapitala. Obrestovalni faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$!

Fibonacijevo zaporedje

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Kaj predstavlja ? Imamo par zajcev, ki skoti par in še en par zajcev, nato pa pogine. Splošni člen tega zaporedja je

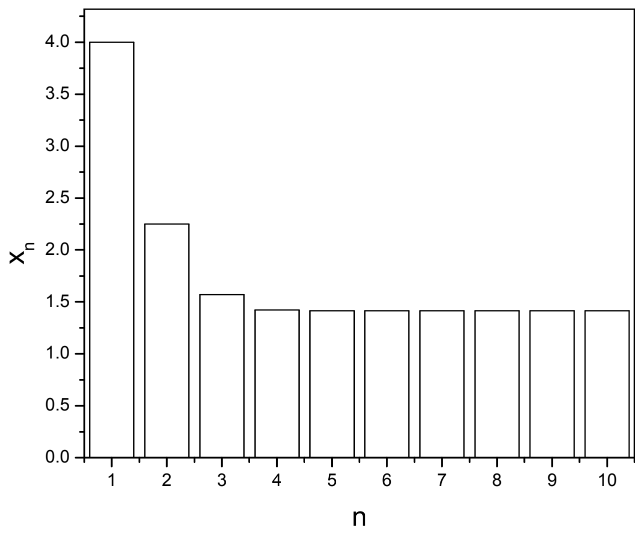
$$a_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Primer iz algebre.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

1	4.000000
2	2.250000
3	1.569444
4	1.421890
5	1.414234
6	1.414214

$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097...$

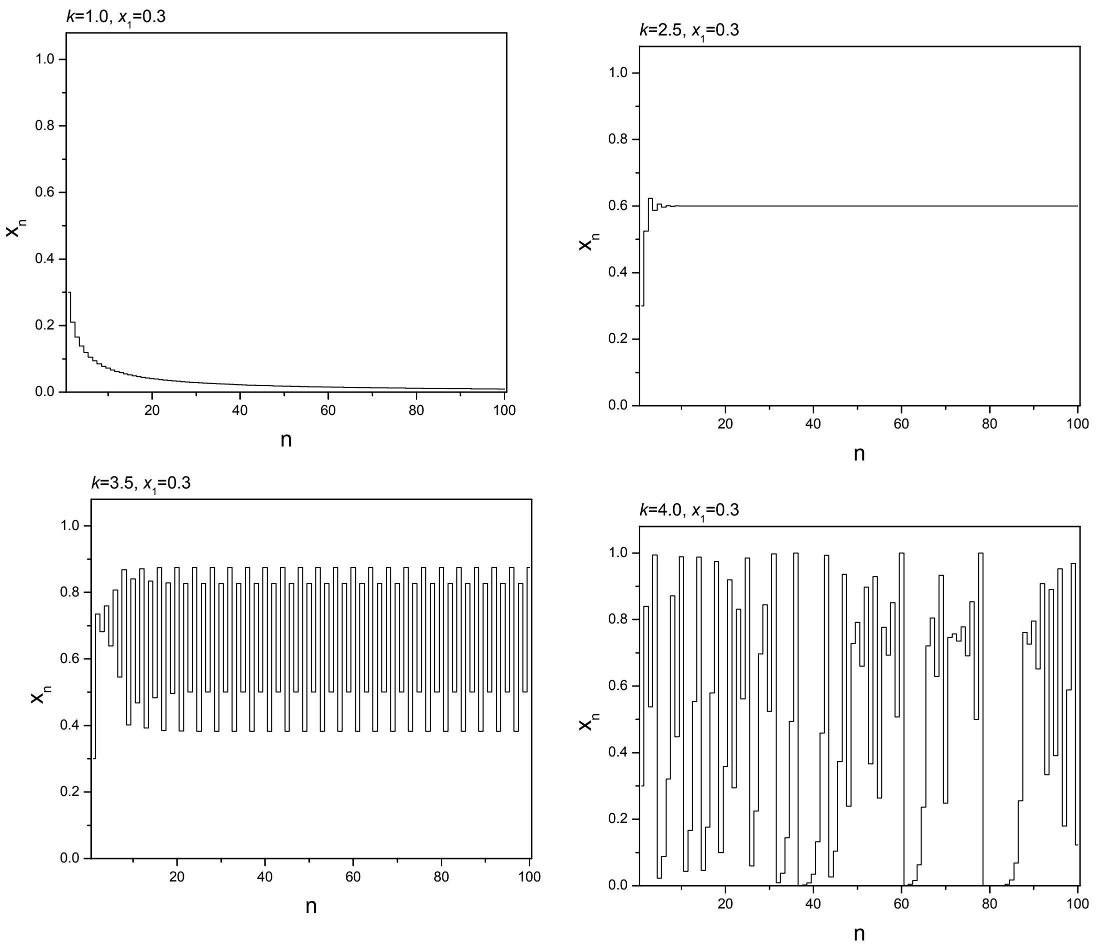


Ekološki model

Geometrijska rast ne upošteva zasičenja. Omejitev rasti npr. upošteva naslednji model

$$x_{n+1} = k\,x_n\left(1 - x_n\right)$$

pri čemer je populacija x_n normirana tako, da velja $0 \le x_n \le 1$. Zaradi te omejitve je konstanta k omejena, tako, $0 \le k \le 4$ (Zakaj ?). Ta konstanta predstavlja hitrost rojevanja.



Naloge:

Zapiši prvih pet členov naslednjih zaporedij: $\left\{2/n^2\right\}$, $\left\{\dfrac{n+1}{n^2}\right\}$, $\left\{\dfrac{2^n}{n}\right\}$, $\left\{(-1)^n\right\}$, $\left\{n-n^2\right\}$

Osnovne definicije

Monotona zaporedja

Členi zaporedja

Zaporedje $\{a_n\}$ je $\begin{cases}\textbf{naraščajoče}\\ \textbf{padajoče}\end{cases}$, če za vse n velja $\begin{cases}a_n \le a_{n+1}\\ a_n \ge a_{n+1}\end{cases}$ in **strogo** $\begin{cases}\textbf{naraščajoče}\\ \textbf{padajoče}\end{cases}$, če za vse n velja $\begin{cases}a_n < a_{n+1}\\ a_n > a_{n+1}\end{cases}$.

Če ima zaporedje $\{a_n\}$ eno od teh štirih lastnosti potem je to zaporedje **monotono**.

Primer. Zaporedje $\{2^n\}$ je naraščajoče.

Omejena zaporedja

Zaporedje $\{a_n\}$ je **omejeno** $\begin{cases}\textbf{navzgor}\\ \textbf{navzdol}\end{cases}$, če obstaja tako število $\begin{cases}M\\ m\end{cases}$, da za vsak člen zaporedja velja $\begin{cases}a_n \le M\\ a_n \ge m\end{cases}$.

Če ima zaporedje obe lastnosti je **omejeno**.

Primer. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Število a je **stekališče zaporedja** $\{a_n\}$, če leži v vsaki okolici števila a neskončno členov zaporedja.

Primer. Zaporedje $1,-1,1,-1,\ldots$ ima dve stekališči. Zaporedje $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$ ima eno samo stekališče $a=1$, ki ni člen zaporedja.

Konvergentna zaporedja

Zaporedje $\{a_n\}$ konvergira proti vrednosti *a*, če leži v vsaki okolici števila *a* vsi členi zaporedja $\{a_n\}$ od nekega člena naprej. Zaporedje, ki ima to lastnost, se imenuje **konvergentno**, število *a* pa je **limita** zaporedja. Da zaporedje $\{a_n\}$ konvergira proti *a* zapišemo takole

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

ali

$$a_n \to a$$

(Vidav, str. 36)

Zaporedje $\{a_n\}$ konvergira proti limiti a, če pripada vsakemu številu ε tako naravno število *N*, da je neenačba

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

izpolnjena za vsak indeks $n \geq N$.

Ta definicija omogoča, da za določeno zaporedje dokažemo, da res konvergira potem ko smo njegovo limito nekako uganili.

Primer 1. Zaporedje $\{a\}$. $\lim_{n\to\infty} a = a$.

Primer 2. Zaporedje $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Primer 2. Zaporedje $\{a^n\}$. Velja

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \end{cases}.$$

Naloge

V naslednjih nalogaj zapiši prih pet členov zaporedja, ter določi limito zaporedja $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, $\left\{\frac{2}{n+1}\right\}$, $\left\{1+\frac{1}{n^2}\right\}$, $\left\{\frac{n}{1+n^2}\right\}$.

Računanje z zaporedji

Če sta zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni ter ima prvo limito *a,* drugo pa limito *b* potem velja:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\,b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{a_n} = \alpha^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \alpha^a \quad (\alpha > 0)$

(Vidav, str.40-42,51)

<u>Število *e*</u>

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$