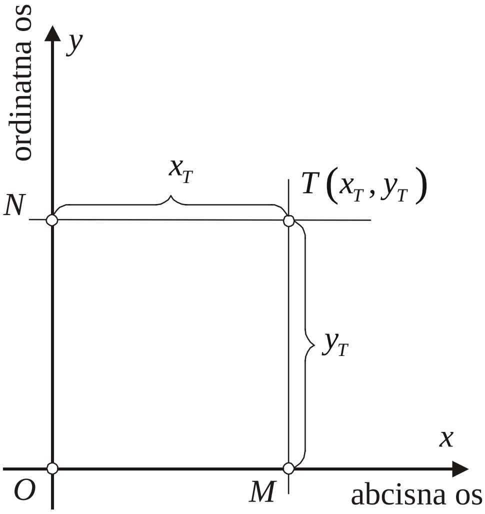
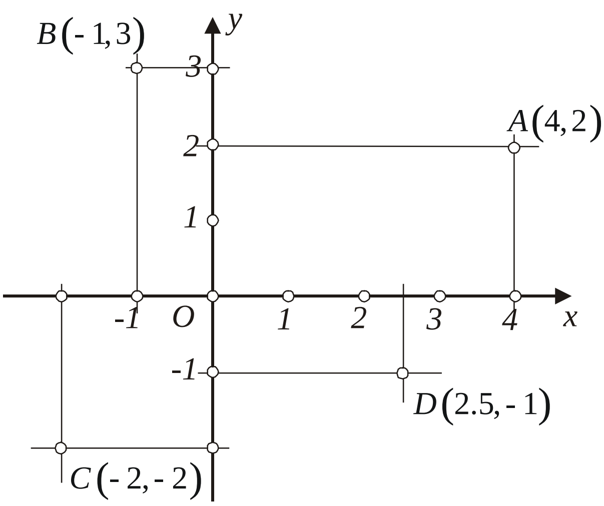
3. Analitična geometrija v ravnini

Osnovna ideja analitične geometrije je v tem, da vaskemu geometrijskemu objektu (točki, premici, ...) pridružimo števila oz *koordinate* , ki ta objekt popolnoma popisujejo. Na ta način se geometrijski problemi dajo obravnavati na algebrajičen način.

3.1. Koordinatni sistem. Točka.

Naj bo O dana točka v ravnini skozi katero postavimo dve medsebojno pravokotni premici, ki ju imenujemo x in y os. Obe premici obravamo kot usmerjeni številski premici, ki nimata nujno isto enoto. Poljubno točko T ravnine lahko sedaj popišemo z parom števil $\left(x_T, y_T\right)$, ki ga dobimo tako, da točko skozi T postavimo premici, ki sta vzporedni koordinatnim osema (Slika 1)





SLIKA 1 SLIKA 2

Vsaki točki T v ravnini ustrezata v izbranem koordinatnem sistemu natančno določen par števil (x, y) in obratno, vsakemu paru števil (x, y) ustreza natančno določena točka T ravnine. Par (x, y) imenujemo koordinate točke T v izbranem koordinatnem sistemu.

Točka O ima koordinati $(0,0)$ se imenuje *koordinatno izhodišče*.

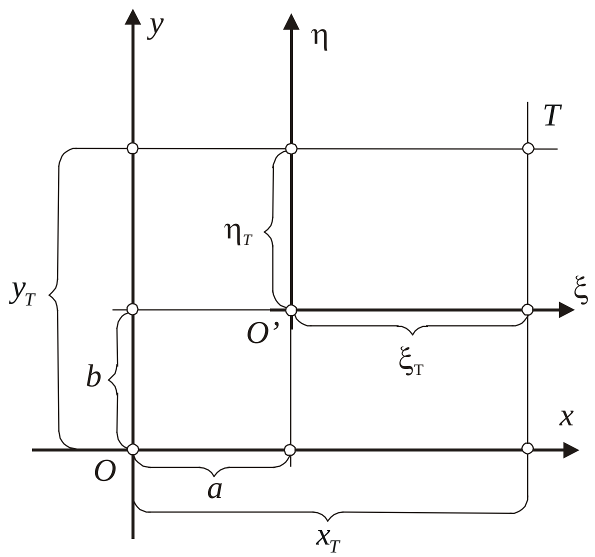
PRIMER

V koordinatnem sistemu nariši točke $A(4,2)$, $B(-1,3)$, $C=(-2,-2)$ in $D=(2.5,-1)$.

Rešitev. Glej sliko 2.

3.2. Transformacija koordinat

V ravnini lahko izberemo nešteto koordinatnih sistemov. Naj bo *x,y* 'star' koordinatni sistem in ξ,η 'nov' koordinatni sistem. Kakšna je povezava med njima ?



SLIKA 3

Translacija. Koordinatno izhodišče 'novega' koordinatnega sistema postavimo v točko (x_0, y_0), koordinatne osi ξ,η pa vzporedno s koordinatnima osema *x,y* 'starega' sistema. Iz slike 3 razberemo zvezo

$$\boxed{x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta} \tag{3.1}$$

Če pa so dane 'stare' koordinate in iščemo 'nove' je zveza

$$\boxed{\xi = x - x_0, \qquad \eta = y - y_0} \tag{3.2}$$

PRIMER 1

Izračunaj koordinate točk $A(2,4)$, $B(-3,5)$ in $(-2,-2)$ v koordinatnem sistemu, ki je translatorno prestavljen v točko $O'(2,-1)$.

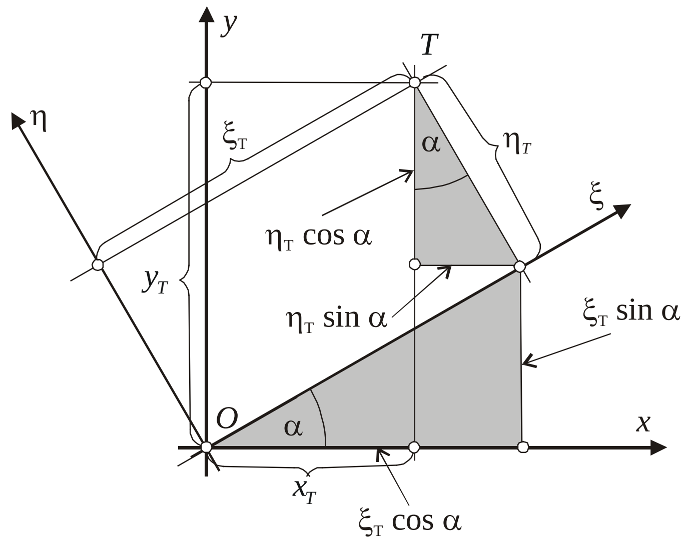
Rešitev. V nalogi so dane 'stare' koordinate, išemo torej 'nove'. Iz podatkov razberemo koordinate izhodišča 'novega' sistema $x_0 = 2$ in $y_0 = -1$. Po (3.2) je sedaj

$$\begin{aligned}
\xi_A &= 2-2=0, \quad \eta_A = 4-(-1) = 4+1 = 5 \\
\xi_B &= -3-2=-5, \quad \eta_B = -3-(-1) = -3+1 = -2 \\
\xi_C &= -2-2=-4, \quad \eta_C = -2-(-1) = -2+1 = -1
\end{aligned}$$

V 'novem' koordinatnem sistemu so torej koordinate točk naslednje: $A(0,5)$, $B(-5,-2)$ in $C(-4,-1)$.

Rotacija. Drug način transformacije koordinat je *rotacija* za kot α okoli koordinatnega izhodišča. S pomočjo slike 4 razberemo zvezo med 'starim' in 'novim' koordinatnim sistemom:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha \\ y &= \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha \end{aligned}} \qquad (3.3)$$



SLIKA 4

Če so dane 'stare' koordinate pa dobimo 'nove' z razrešitvijo (3.3) . Koordinato ξ dobimo tako, da prvo enačbo pomnožimo s $\cos\alpha$ drugo s $\sin\alpha$ ter ju seštejemo:

$$\begin{aligned}
x\cos\alpha &= \xi\cos^2\alpha - \eta\sin\alpha\cos\alpha \\
y\sin\alpha &= \xi\sin^2\alpha + \eta\sin\alpha\cos\alpha \\
\hline
x\cos\alpha + y\sin\alpha &= \xi
\end{aligned}$$

Na podoben način dobimo koordinato η. Prvo enačbo pomnožimo s $-\sin\alpha$ drugo s $\cos\alpha$ in ju seštejemo

$$\begin{array}{r}
-x\sin\alpha = -\xi\sin\alpha\cos\alpha + \eta\sin^2\alpha \\
y\cos\alpha = \ \ \xi\sin\alpha\cos\alpha + \eta\sin^2\alpha \\
\hline
\end{array}$$
$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = \eta$$

Pri rotaciji je torej zveza 'starih' koordinat z 'novimi' naslednja:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= \ \ x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ \eta &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}} \tag{3.4}$$

Translacija in rotacija. V splošnem je transformacija koordinat sestavljena iz paralelnega prenosa in rotacije. S kombinacijo in (3.3) dobimo

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha \\ y &= y_0 + \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha \end{aligned}} \tag{3.5}$$

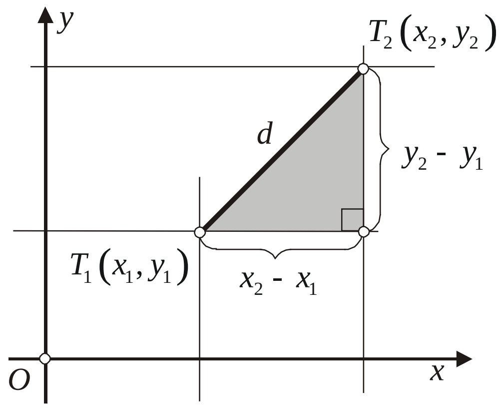
Če hočemo izračunati obratno transformacijo razrešimo (3.5) po novih koordinatah. Tako dobimo

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= (x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha \\ \eta &= -(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha \end{aligned}} \tag{3.6}$$

3.3. Osnovne naloge

Razdalja med točkama. Naj ima točka T_1 koordinati (x_1, y_1), točka T_2 pa koordinati (x_2, y_2). Po Pitagorovem izreku je razdalja *d* enaka (slika 3)

$$\boxed{d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}} \tag{3.7}$$



SLIKA 3

PRIMER

Izračunaj razdaljo med točkama $(6,-10)$ in $(2,-1)$.

Rešitev. Razdalja je po (3.7) enaka

$$\sqrt{(6-2)^2+((-10)-(-1))^2} = \sqrt{4^2+(-9)^2} =$$
$$= \sqrt{16+81} = \sqrt{97} \approx 9.85$$

Opomba. Če imamo točki, ki ležita na x osi, $(x_1,0)$ in $(x_2,0)$ potem je njuna medsebojna oddaljenost

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(0-0)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = |x_1-x_2|$$

Razdalja v ravnini torej vključuje razdaljo na premici kot poseben primer.

Delitev daljice v danem razmerju. Med točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ želimo postaviti točko $T(x, y)$, ki deli daljico $\overline{T_1T_2}$ v danm razmerju λ. Iz podobnih trikotnikov dobimo razmerji

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda \qquad \text{in} \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y} = \lambda$$

Iz teh razmerij sledijo koordinate iskane točke

$$\boxed{x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}} \tag{3.8}$$

Za posebne primer $\lambda = 1$ to je primer ko je daljica razpolovljena dobimo

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \tag{3.9}$$

3.4. Krivulja enačbe. Enačba krivulje.

Naj bo podana izraz oblike $F(x, y) = 0$. Če ta izraz vzamemo kot enačbo potem ima neskončno mnogo rešitev. Za vsak podan *x* lahko iz enačbe izračunamo pripadajočo vrednost *y*. Množico točk, ki pri tem nastane imenujemo *slika enačbe (?).*

Po drugi strani pa imamo lahko dano geometrijsko definicijo krivulje iz katere izpeljemo pripadajočo enačbo. Osnovna ideja je torej v povezavi krivulje z enačbo.

Enačba, ki popisuje nespremenljive povezave med koordinatami vsake točke krivulje se imenuje enačba krivulje; krivulja katere vse koordinate točk ustrezajo dani enačbi je (geometrijsko) mesto točk.

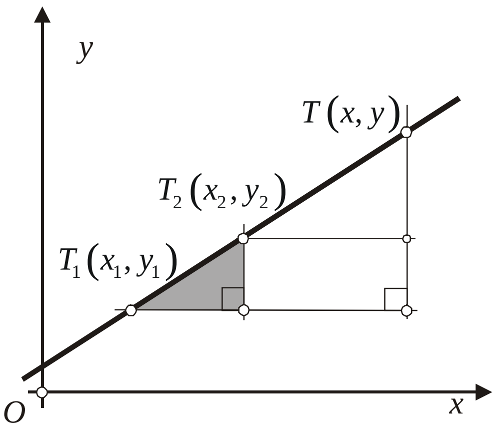
Vsako izraz, ki povezuje spremenljivki *x* in *y* lahko jemljemo kot analitični opis *krivulje* v ravnini *xy*. Če je izraz oblike $F(x, y) = 0$, je opis krivulje *posreden* (impliciten), če pa je $y = f(x)$ potem je opis *neposreden* (ekspliciten). Krivulja je torej množica točk v ravnini, katerih koordinate (x, y) ustrezajo dani enačbi.

PRIMER

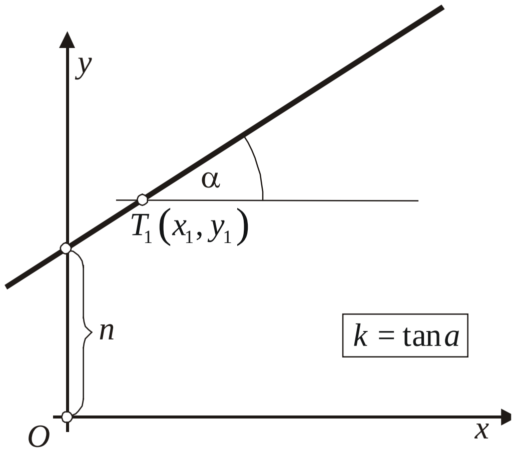
Izraz $Ax + By + C = 0$ je posredni opis premice, izraz $y = k\,x + n$ je neposreden opis premice.

3.5. Premica

Za Evklidovo geometrijo je premica osnovni pojem. Skozi različni točki ravnine gre le ena premica.



SLIKA 12



SLIKA 12

Dani točki ravnine označimo z T_1 in T_2. V izbranem koordinatnem sistemu naj bosta točki podani s koordinatama (x_1, y_1) in (x_2, y_2), poljubna točka T, ki leži na premici pa s koordinatama (x, y). Iz podobnih trikotnikov je

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{3.10}$$

ali

$$\boxed{y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)} \tag{3.11}$$

To je enačba premice skozi dve dani točki pri pogoju, da premica ni vertikala. To enačbo lahko zapišemo tudi v obliki

$$\boxed{y=k\,x+n} \tag{3.12}$$

kjer sta k *naklonski koeficient* premice in n odsek premice na y osi.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad n=y_1-k\,x_1$$

Če se vrnemo, k enačbi (3.10) in jo zapišemo v obliki

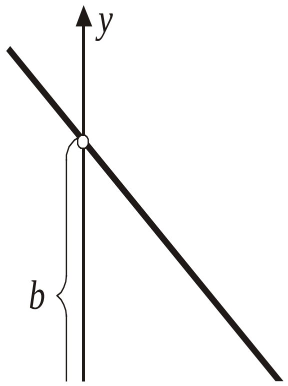
$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad (y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

ali urejeno

$$\boxed{a\,x+b\,y+c=0} \tag{3.13}$$

pri čemer je

Če premica ne gre skozi koordinatno izhodišče je $c \neq 0$. V tem primeru lahko enačbo delimo s c in dobimo *odsekovno obliko enačbe premice*



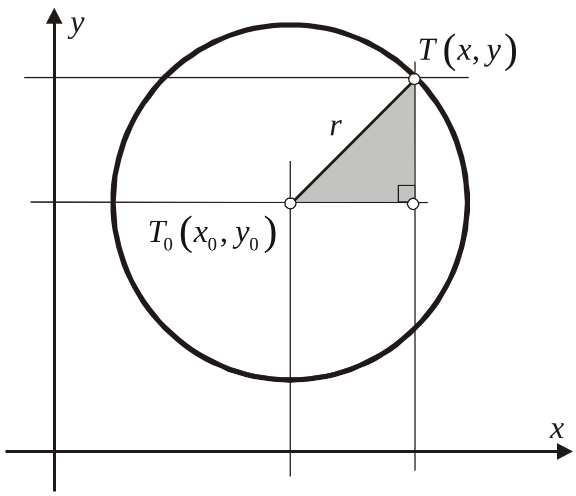
$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad (3.14)$$

Za $y=0$ dobimo $x=a$, za $x=0$ pa $y=b$. Parameter a je torej odsek premice na osi x, parameter b pa odsek premice na osi y.

3.6. Krožnica

Definicija. *Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od neke podane točke (središča krožnice). Oddaljenost točk na krožnici od središča imenujemo polmer krožnice.*

Enačba krožnice. Naj bo r polmer krožnice, točka $T_0(x_0, y_0)$ njeno središče in $T(x, y)$ poljubna točka na njenem obodu (slika 1).



SLIKA

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2} \qquad (3.15)$$

Če izvedemo računske operacije, ki so nakazane v gornjem izrazu dobimo

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

pri čemer so

$$D=-x_0, \quad E=-y_0, \quad F=x_0^2+y_0^2-r^2$$

PRIMER 1

Zapiši enačbo krožnice, ki ima središče v točki $(2,-1)$ in polmer 3.

Rešitev. V danem primeru je $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ in $r = 3$. Enačba krožnice je zato

$$(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = 3^2$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

PRIMER 2

Določi središče krožnice in njen polmer, če je

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

Rešitev. Dano enačbo dopolnimo do popolnih kvadratov po *x* in *y*

$$x^2 - 2\cdot 2\cdot x + \underbrace{2^2 - 2^2}_{=0} + y^2 + 2\cdot 3\cdot y + \underbrace{3^2 - 3^2}_{=0} = 12$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 12 + 4 + 9 = 25$$
$$(x-2)^2 + [y-(-3)]^2 = 5^2$$

Primerjava dobljenega izraza z (3.15) nam pove, da je $x_0 = 2$, $y_0 = -3$ in $r = 5$. Enačba torej popisuje krožnico polmera 5, ki ima središče v točki $(2,-3)$.

Opomba. Videli smo, da se da vsaka enačba krožnice zapisati v obliki

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Vprašanje pa je, ali vsaka taka enačba opisuje koržnico. Da odgovorimo na to vprašanje jo preoblikujmo v obliko

$$x^2 + 2\frac{D}{2}x + \underbrace{\frac{D^2}{4} - \frac{D^2}{4}}_{=0} + y^2 + 2\frac{E}{2}y + \underbrace{\frac{E^2}{4} - \frac{E^2}{4}}_{=0} + F = 0$$
$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

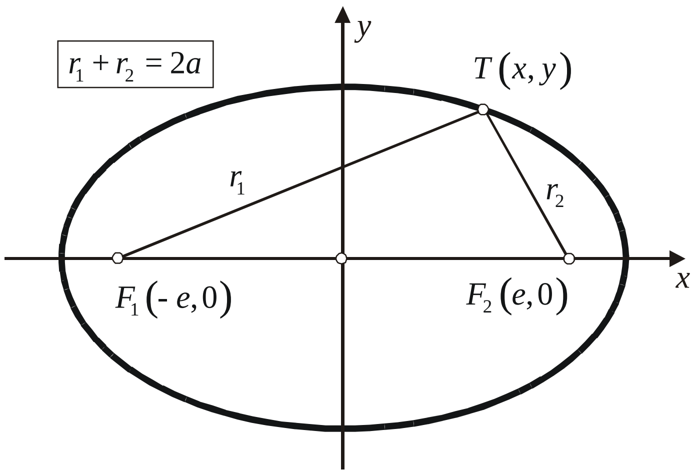
Glede na vrednost izraza na desni strani dobljene enačbe imamo tri možnosti:

- $D^2 + E^2 - 4F > 0$ - enačba popisuje krožnico polmera $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$, ki ima središče v točki $(-D/2, -E/2)$;

- $D^2+E^2-4F=0$ - enačba ustreza ena sama točka $(-D/2,-E/2)$ (radij kroga je 0)
- $D^2+E^2-4F<0$ - množica točk, ki ustreza taki enačbi je prazna (zakaj ?).

3.7. Elipsa

Definicija. *Elipsa je množica točk v ravnini, za katere je vsota oddaljenosti od dveh podanih točk (gorišč) stalna.*



SLIKA

Enačba elipse. Gorišča elipse postavimo v točki $F_1(-e,0)$ in $F_2(e,0)$ na osi *x*. Naj bo $T(x,y)$ poljubna točka na elipsi, ki je od prvga gorišča oddaljena za $r_1=\overline{F_1T}$ od druge pa za $r_2=\overline{F_2T}$. Po definiciji elipse mora veljati

$$r_1+r_2=2a$$

pri čemer je *a* neka konstanta, za katero velja ocena $a>e$ (zakaj ?). S pomočjo slike ugotovimo, da sta

$$r_1=\sqrt{(x+e)^2+y^2} \quad \text{in} \quad r_2=\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

Enačba elipse je torej

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a$$

Da se znebimo korenov prenesemo drugi člen na levi strani enačbe na desno stran, enačbo kvadriramo in uredimo:

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-e)^2+y^2} \qquad \text{(kvadriramo)}$$

$$(x+e)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+(x-e)^2+\cancel{y^2} \qquad \text{(uredimo...)}$$

$$\cancel{x^2}+2ex+\cancel{e^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2ex+\cancel{e^2} \qquad \text{(uredimo in delimo s 4)}$$

$$a\sqrt{(x-e)^2+y^2}=a^2-ex$$

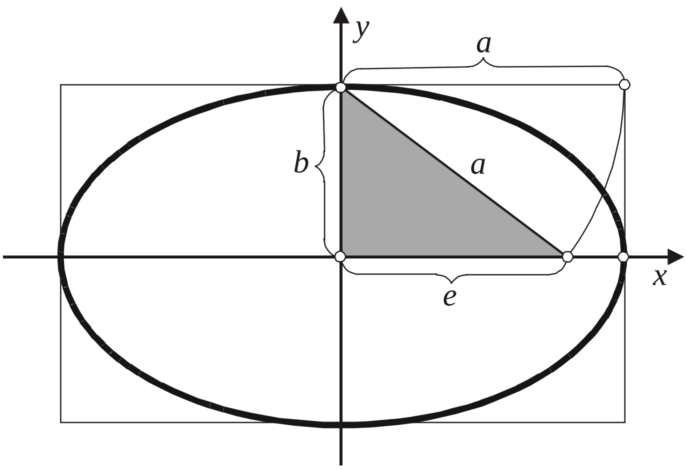
Dobljeni izraz ponovno kvadriramo in uredimo

$$a^2\left[(x-e)^2+y^2\right]=a^4-2ea^2x+e^2x^2$$

$$a^2x^2-\cancel{2a^2ex}+a^2e^2+a^2y^2=a^4-\cancel{2a^2ex}+e^2x^2$$

Na ta način dobimo

$$\left(a^2-e^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-e^2\right)$$



SLIKA

Če označimo

$$\boxed{b^2=a^2-e^2} \tag{3.16}$$

potem dobimo t.i. *kanonično enačbo elipse*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{3.17}$$

Geometrijski pomen parametrov *a* in *b* dobimo na naslednji način. V dobljeno enačbo elipse vstavimo $y=0$ pa dobimo $x=\pm a$, če vstavimo $x=0$ pa $y=\pm b$. Parametra *a* in *b* sta *polosi* elipse. Celotna elipsa leži znotraj pravokotnika, ki ga omejujeta *a* in *b*.

Opomba 1. Če je v enačbi (3.17) $a>b$ je *a* velika, *b* pa mala polos elipse. V primeru $a<b$ popisuje enačba (3.17) elipso, ki je zasukana za kot 90^0 (dokaži !).

Opomba 2. V primeru, ko je središče elipse premaknjeno v točko (x_0, y_0) moramo v enačbi (3.17) zamenjati *x* z $x-x_0$ in *y* z $y-y_0$. Na ta način dobimo

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1} \tag{3.18}$$

Opomba 3. Brezdimenzijsko razmerje

$$\boxed{\varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \tag{3.19}$$

se imenuje *ekscentričnost elipse*. Ker je $e<a$ velja ocena

$$0\le\varepsilon<1$$

Ekscentričnost elipse določa njeno obliko ne pa njene velikosti (zakaj ?). Če je $\varepsilon=0$ je elipsa krožnica.

PRIMER 1

Zapiši enačbo elipse za katero je $a+b=8$ in $e=4$.

Rešitev. Če hočemo zapisati enačbo elipse v obliki (3.17) rabimo *a* in *b*. Po definiciji (3.16) je

$$e^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b) \quad\Rightarrow\quad a-b=\frac{e^2}{a+b}=\frac{4^2}{8}=\frac{16}{8}=2$$

Za določitev *a* in *b* imao sedaj na razpolago dve enačbi z dvema neznankama

$$a+b=8$$
$$a-b=2$$

Če enačbi seštejemo dobimo vrednost velike polosi

$$2a=10 \quad\Rightarrow\quad a=5$$

če odštejemo drugo od prve pa vrednost male polosi

$$2b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

Če dobljene vrednosti vstavimo v (3.17) dobimo iskano enačba elipse

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$
$$\underline{\underline{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}}$$

PRIMER 2

Določi polosi, središče, gorišča za elipso

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

Rešitev. Če dano enačbo primerjamo z enačbo (3.18) vidimo, da je $x_0 = 2$, $y_0 = -3$, $a^2 = 25$ in $b^2 = 16$. Polosi podane elipse sta torej $\underline{\underline{a = 5}}$ in $\underline{\underline{b = 3}}$, njeno središče pa je v točki $\underline{\underline{(2,-3)}}$. Iz enačbe (3.16) izračunamo e

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

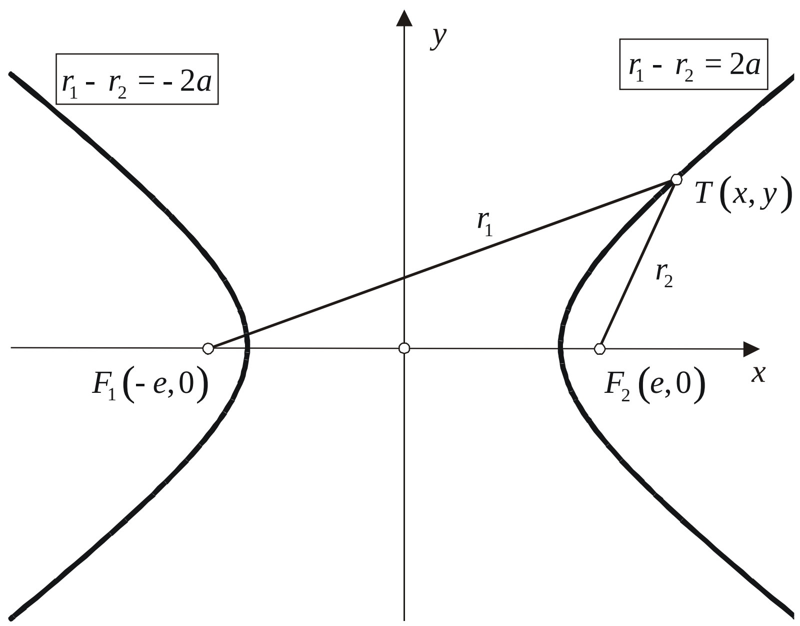
Ekscentričnost elipse je po (3.19)

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{3}{5} = \underline{\underline{0.6}}$$

Ker elipsa ni podana v središčni legi ... $(2+3,-3) = (5,-3)$ in $(2-3,-3) = (-1,-3)$.

3.8. Hiperbola

Definicija. *Hiperbola je množica točk v ravnini, za katere oddaljenosti od dveh danih točk (gorišč) stalna.*



Enačba hiperbole. Naj bo sta gorišči hiperbole dani v točkah $(-e,0)$ in $(e,0)$ in naj bo (x,y) poljubna točka na hiperboli, ki je od prve točke oddaljena za r_1 od druge pa za r_2 . Za vsako točko na hiperboli velja

$$r_1 - r_2 = \pm 2a$$

kjer je *a* neka pozitivna konstanta za katero velja $a < e$. Iz skice je

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Če nad dobljenim izrazom izvedemo enake računske operacije kot v primeru elipse dobimo

$$\left(a^2 - e^2\right)x^2 + a^2 y^2 = a^2\left(a^2 - e^2\right)$$

Ker je $a < e$ označimo

$$b^2 = e^2 - a^2$$

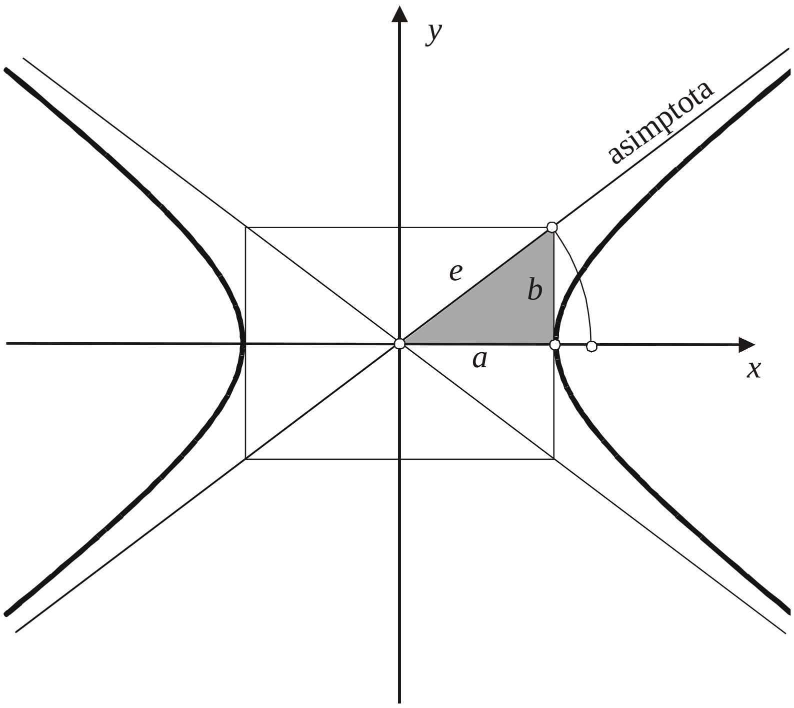
pa dobimo

$$-b^2 x^2 + a^2 y^2 = -a^2 b^2$$

ali urejeno

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1} \tag{3.20}$$

Za $y=0$ dobimo $x=\pm a$, za $x=0$ pa $y^2=-b^2$.



SLIKA

Asimptote. Iz slike se vidi da se veje hiperbole približujejo premicama. Kaj se dogaja s hiperbolo, ko se *x* veča ?

Iz enačbe (3.20) lahko v primeru, ko je $x>a$ izrazimo *y* na naslednji način

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \quad \Rightarrow \quad y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Če izpostavimo *x* lahko to zapišemo tudi kot

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

Ko gre $x\to\infty$ gre $\frac{1}{x}\to 0$ t.j. drugi člen pod korenom postaja vse manjši ko se x veča

$$y \sim \pm\frac{b}{a}x$$

Hiperbola se torej v neskončnosti približuje premicama $y = \pm\frac{b}{a}x$.

PRIMER 2

Določi polosi, središče, gorišča in asimptote naslednje hiperbole

$$x^2 - 8y^2 - 2x - 32y - 39 = 0$$

Rešitev. Dano enačbo dopolnimo do popolnega kvadrata po spremenljivkah *x* in *y*

$$x^2 - 2x + \underbrace{1-1}_{=0} - 8y^2 - \underbrace{32y}_{=2\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}y} + \underbrace{\frac{16^2}{8} - \frac{16^2}{8}}_{=0} - 39 = 0$$

$$(x-1)^2 - \left(\sqrt{8}y + \frac{16}{\sqrt{8}}\right)^2 = 39 + 1 - \frac{16^2}{8} \qquad \left(\frac{16\sqrt{8}}{8} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}\right)$$

$$(x-1)^2 - 8\left(y + 4\sqrt{2}\right)^2 = \frac{40\cdot 8 - 256}{8} = 8$$

$$\frac{(x-1)^2}{8} - \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2 = 1$$

Iz dobljene enačbe preberemo velikosti polosi hiperbole $a = \sqrt{8}$ in $b = 1$. Središče hiperbole pa je v točki $\left(1, -4\sqrt{2}\right)$. Asimptoti hiperbole imata naklon

$$k = \pm\frac{b}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} = \pm\frac{\sqrt{8}}{8} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

in greta skozi točko središča hiperbole $\left(1, -4\sqrt{2}\right)$. Iščem torej enačbi premic oblike $y = k\,x + n$ pri čemer moramo *n* določiti tako, da gre premica skozi središčno točko. Za $k = \sqrt{2}/4$ dobimo

$$1 = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}}\cdot\left(-\cancel{4}\sqrt{2}\right) + n \quad \Rightarrow \quad n = 1 + 2 = 3$$

za $k = -\sqrt{2}/4$ pa

$$1 = -\frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}}\cdot\left(-\cancel{4}\sqrt{2}\right) + n \quad \Rightarrow \quad n = 1 - 2 = -1$$

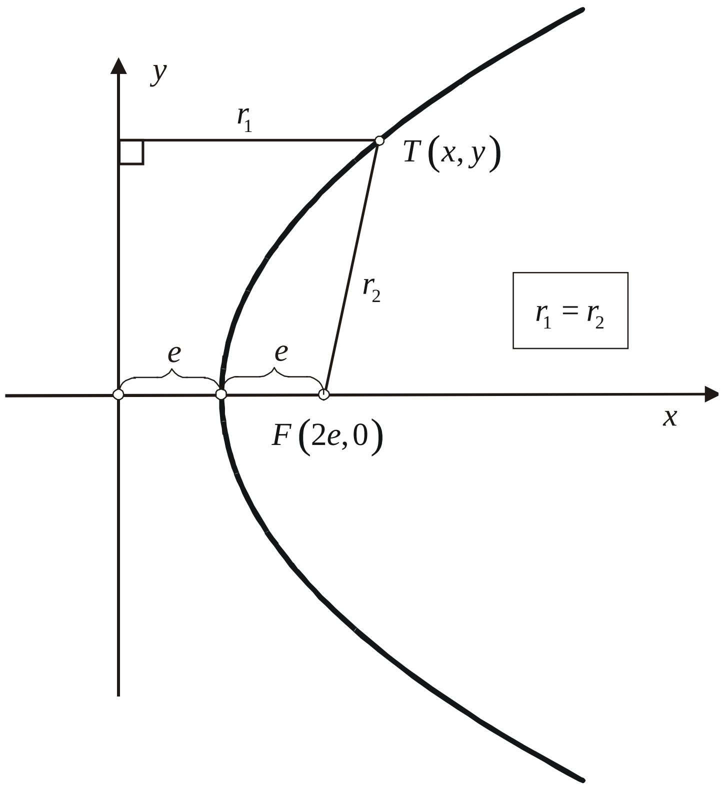
Enačbi asimptot sta torej

$$\underline{\underline{y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+3, \qquad y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x-1}}$$

♦♦♦

3.9. Parabola

Definicija. Parabola je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od stalne točke (*gorišča*) in premice (*vodnice*).



Enačba parabole. Naj bo $G(e,0)$ gorišče, premica $x=-e$ vodnica in $T(x,y)$ poljubna točka na paraboli. Naj bo r_1 oddaljenost točke T od vodnice in r_2 oddaljenost T od gorišča. Po definiciji parabole je $r_1 = r_2$. Ker pa je $r_1 = x+e$ in po Pitagorovem izreku $r_2=\sqrt{(x-e)^2+y^2}$ dobimo

$$\sqrt{(x-e)^2+y^2}=x+e$$

Če dobljeni izraz kvadriramo in uredimo dobimo enačbo parabole v obliki

$$\boxed{y^2=4ex} \tag{3.21}$$

Točka presečišča parabole z osjo x se imenuje *teme* parabole. V primer, ko je parabola podana z (3.21) je njeno teme kar koordinatno izhodišče. Če hočemo dobiti parabolo, ki ima teme v poljubni točki (x_0, y_0) moramo v enačbi (3.21) zamenjati x z $x - x_0$ in y z $y - y_0$. Na ta način dobimo

$$(y - y_0)^2 = 4e(x - x_0)$$

Če koordinatne osi zasukamo za 90^0 potem imamo

$$x^2 = 4ey \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{4e}$$

Če teme parabole prestavimo v točko (x_0, y_0) dobimo

$$\boxed{y = \frac{1}{4e}(x - x_0)^2 + y_0} \tag{3.22}$$

Če izvedemo nakazane operacije dobimo

$$\boxed{y = a\,x^2 + b\,x + c} \tag{3.23}$$

pri čemer so

$$a = \frac{1}{4e}, \qquad b = -\frac{x_0}{2e} \qquad \text{in} \qquad c = \frac{x_0^2}{4e} + y_0$$

Vsaka krivulja drugega reda oblike (3.23) ponazarja parabolo.

PRIMER 1

Zapiši enačbo parabole, ki ima teme v točki $T(2, -1)$ in gre skozi točko $A(4, 3)$.

Rešitev. Iskana enačba parabole ima obliko $(y - y_0)^2 = 4e(x - x_0)$. Pri danih podatkih je $x_0 = 2$ in $y_0 = -1$ torej

$$(y + 1)^2 = 4e(x - 2)$$

Da določimo parameter e vstavimo v enačbo koordinate točke A

$$(3 + 1)^2 = 4e(4 - 2) \quad \Rightarrow \quad 8e = 16 \quad \Rightarrow \quad \underline{e = 2}$$

Iskana enačba parabole je torej

$$\underline{\underline{\left(y+1\right)^2 = 8\left(x-2\right)}}$$

♦ ♦ ♦

PRIMER 2

Določi parameter in koordinate temena za parabolo

$$y = -2x^2 + 8x - 5 .$$

Rešitev. Dano enačbo dopolnimo do popolnega kvadrata

$$\begin{aligned}
y &= -2x^2 + \underbrace{8x}_{=2\cdot 4x=-2\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\sqrt{2}x\right)} + \underbrace{\frac{4^2}{2} - \frac{4^2}{2}}_{=0} - 5 = \\
&= -\left(\sqrt{2}x + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 - 5 \\
&= -\sqrt{2}\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 - 3 = \qquad \left(\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\right) \\
&= -\sqrt{2}\left(x + \sqrt{2}\right)^2 - 3
\end{aligned}$$

Dobljeni izraz primerjamo s (3.22) pa dobimo koordinate temena $x_0 = -\sqrt{2}$, $y_0 = -3$ in

$$1/4e = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

♦ ♦ ♦

3.10. Polarne koordinate

Med krožnico, elipso, hiperbolo in parabola obstaja tesna povezava.

NALOGE

TOČKA, TRANSFORMACIJE KOORDINAT

1. Določi razdaljo med pari točk. Skiciraj.

a) $(0,7),(2,-4)$ b) $(-1,1),(-3,-4)$

c) $(5,-2),(-4,3)$ d) $(-1,5),(6,-1)$

2. Določi koordinate oglišč pravilnega šeskotnika, ki ima stranico dolžine 2, če je njegovo središče v koordinatnem izhodišču in je ena izmed diagonal na osi x.

3. Določi koordinate točk $A(1,2)$, $B(-1,-2)$ in $C(-3,4)$ v koordinatnem sistemu, ki je nastal s translacijo starega koordinatnega sistema v točko $T(2,-3)$.

4. Določi koordinate točk $A(-1,3)$, $B(-4,2)$ in $C(2,-2)$ v koordinatnem sistemu, ki premaknjen v točko T in zasukan za kot α.

a) $T(0,0)$, $\alpha = 45^0$ b) $T(-1,1)$, $\alpha = -30^0$

c) $T(5,-2)$, $\alpha = 90^0$ d) $T(-2,-2)$, $\alpha = 180^0$

PREMICA

1. Določi naklon premic, ki potekajo skozi točki:

a) $(-2,1),(-1,-4)$ b) $(5,1),(-3,4)$

c) $(3,4),(4,-3)$ d) $(3,5),(-1,-1)$

2. V naslednjih nalogah skiciraj in določi enačbo premice (splošno, odsekovno in normalno), ki gre skozi točki.

a) $(5,7),(-1,4)$ b) $(1,1),(3,2)$

c) $(-1,4),(3,4)$ d) $(1,2),(-1,3)$

3. Določi naklon in presek z y osjo (začetno vrednost) naslednjih premic.

a) $2y = 5x + 9$ b) $2x + 5y = 0$

c) $5x + 9y - 27 = 0$ d) $x - y = 14(x + 2y)$

4. Katera od točk $A(-1,2)$, $B(1,1)$ in $C(-3,4)$ leži na premici $3x - y + 2 = 0$?

5. V naslednjih nalogah nariši točko, skiciraj premico in izračunaj njuno medsebojno oddaljenost

a) $y = 2x - 3,\ (-1,3)$ b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1,\ (-1,1)$

c) $2x - y + 1 = 0,\ (0,0)$ d) $-x + y + 2 = 0,\ (1,-1)$

6. Skiciraj naslednje pare premic in določi njihovo presečišče.

a) $\begin{array}{l} 4x+3y=7 \\ 3x-4y+1=0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} y=4x-10 \\ 4y=11-x \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ -2x+3y=4 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ 2(x+y)=3(x-y)+1 \end{array}$

7. Določi kote med naslenjimi pari premic.

a) $\begin{array}{l} x+3y-8=0 \\ 9x-3y+12=0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} y=2x-5 \\ 2y=10+x \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ 2x-5y-1=0 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} 2x=y-1 \\ x/2+y/3=1 \end{array}$

8. V naslednjih nalogah določi enačbi premic, ki gresta skozi podano točko in sta podani premici vzporedni in pravokotni

a) $y = 2x - 3,\ (-1,3)$ b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1,\ (-1,1)$

c) $2x - y + 1 = 0,\ (0,0)$ d) $-x + y + 2 = 0,\ (1,-1)$

KROŽNICA

1. V naslednjih nalogah določi enačbo kroga, ki ima središče v podani točki *T* in ima polmer *r*. Skiciraj krog.

a) $T(1,1),\ r=3$ b) $T(-1,2),\ r=5$

c) $T(0,4),\ r=2$ d) $T(1,-1),\ r=1$

2. V naslednjih nalogah določi enačbo kroga, ki ima središče v podani točki *T* in poteka skozi točko *A*. Skiciraj krog.

a) $T(-1,-1),\ A(2,1)$

b) $T(2,-1),\ A(-1,-5)$

c) $T(3,0),\ A(-2,5)$

d) $T(6,-7),\ A(0,0)$

3. V naslednjih nalogah določi središče in polmer vsakega od krogov.

a) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

b) $x^2+(y-3)^2=9$

c) $x^2+y^2-2x+y-3/4=0$

d) $2x^2+2y^2+8x+4y+3=0$

e) $-x^2-y^2+8x-4y-11=0$

f) $3x^2+3y^2-6x+36-8=0$

4. Katera od točk $A(-1,1)$, $B(1,-2)$ in $C(-2,2)$ leži na krogu $x^2+y^2=5$?

5. Določi presečišče kroga in premice.

a) $\begin{array}{l} x^2+y^2+5x=0 \\ x+y=0 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} (x-1)^2+y^2=4 \\ 2x-y+1=0 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x^2+y^2+2x=0 \\ x+y+1=0 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} (x-2)^2+(y+1)^2=9 \\ y=3x-1 \end{array}$

ELIPSA

1. Katera od točk $A(1,2)$, $B(6,1)$, $C(-5,0)$ in $D(0,5)$ leži na elipsi $9x^2+25y^2=225$?

2. Zapiši enačbo elipse v središčni legi.

a) $\begin{array}{l} a=6 \\ b=3 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} a=5 \\ e=3 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} a+b=8 \\ e=4 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} a-b=1 \\ \varepsilon=1/2 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} a=1 \\ \varepsilon=3/4 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} e=2 \\ \varepsilon=2/5 \end{array}$

3. Določi polosi, središče, gorišča in ekscentričnost elipse.

a) $4x^2+9y^2=36$

b) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

c) $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$ d) $3x^2+5y^2-18x+10y-88=0$

HIPERBOLA

1. Zapiši enačbo hiperbole v središčni legi.

a) $\begin{array}{l} a=5 \\ b=2 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} a=3 \\ e=4 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} b=\sqrt{3} \\ e=2 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} a-b=1 \\ e=3 \end{array}$

2. Določi polosi, središče, gorišča in asimptote hiperbole.

a) $5x^2-4y^2=20$ b) $16x^2-y^2=4$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$ d) $x^2-8y^2-2x-32y-39=0$

3. Izračunaj presečiščne točke med paroma krivulj.

a) $\begin{array}{l} x^2-3y^2=1 \\ 2x-3y=1 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x^2-y^2=16 \\ x^2+y^2=34 \end{array}$

PARABOLA

4. Najdi enačbo parabole, ki ima teme v točki *F* in gre skozi točko *T*.

a) $F(1,0),\ T(2,1)$ b) $F(0,1),\ T(1,2)$

c) $F(1,1),\ T(0,0)$ d) $F(3,0),\ A(2,3)$

5. Skiciraj naslednje parabole. Določi gorišče.

a) $y=x^2-4x+7$ b) $y=-x^2+4x-1$

c) $y=-2x^2+8x-5$ d) $y=3x^2+6x+2$

6. Izračunaj presečiščne točke med pari krivulj.

a) $\begin{array}{l} y=4x^2 \\ x^2+y^2+2y-3=0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} y=2x^2 \\ y=5x+1 \end{array}$

c) $\begin{aligned} y &= x^2 + 4x + 5 \\ y &= x^2 - 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= 1 \\ y &= -x^2 + 1 \end{aligned}$