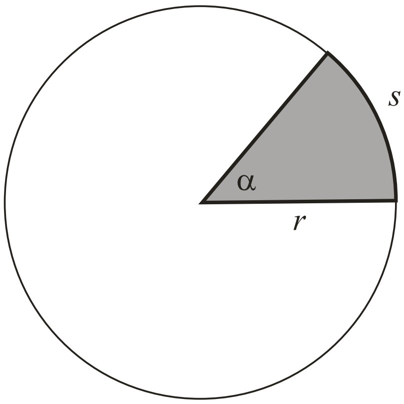
2. TRIGONOMETRIJA[1]

2.1 Merjenje kota



Naj bo r polmer kroga in s dolžina loka na krožnici. Radian α meri kot katerega izhodišče je središče krožnice kot razmerje

$$\alpha = \frac{s}{r}$$

Dolžina polkroga radija 1 je $\pi = 3.145192...$[2]. Pretvorba med stopinjami in radiani je naslednja

$$\boxed{180^0 = \pi \,\mathrm{rad}}$$

Na osnovi te formule dobimo radiane iz stopinj z

$$\breve{\alpha} = \frac{\pi}{180}\alpha^0 \approx 0.017 \times \alpha^0$$

stopinje iz radianov pa

$$\alpha^0 = \frac{180}{\pi}\breve{\alpha} \approx 57.3 \times \breve{\alpha}$$

PRIMER 2.1: Pretvori kot 54^0 v radiane.

$$54\pi/180 = 0.9425\,\mathrm{rad}$$

PRIMER 2.2: Pretvori kot $2\pi/3$ radianov v stopinje.

$$\frac{2\cancel{\pi}}{3}\frac{180}{\cancel{\pi}} = 60^0$$

Naloge

1. Naslednje kote izrazi v radianih:

   a) 30^0 b) 45^0 c) 90^0 d) 135^0 e) 270^0

2. Naslednje kote izrazi v stopinjah

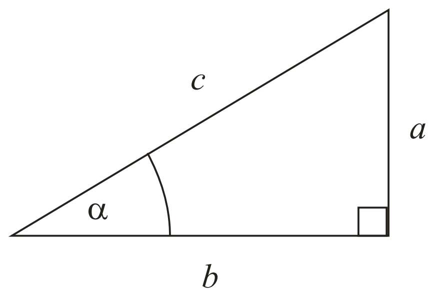
   b) $\pi/2$ b) $3\pi/2$ c) $\pi/4$ c) 3π

---

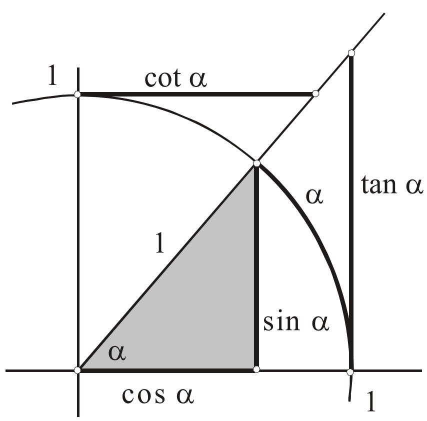
[1] **Trigonometríja** izhaja iz grških besed trigonon - *trikotnik* + metria - *merjenje*.
[2] W.Jones (1706) π od 'periphery' (obod)

2.1 Osnovna trigonometrijska razmerja

Osnovne trigonometrijske funkcije, sinus[3], kosinus, tangens in kotangens kota α so definirane z naslednjimi razmerji stranic pravokotnega trikotnika



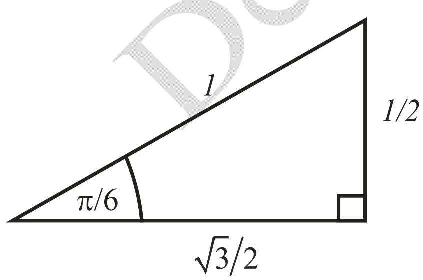
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$



Vrednosti trigonometričnih razmerij, ki jih dobimo z uporabo enotskega kroga ponazarja naslednja slika

2.3 Nekaj vrednosti

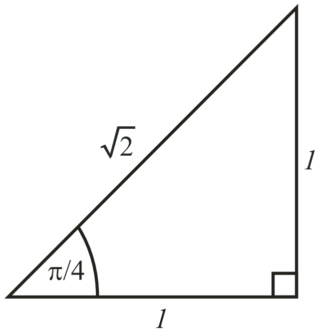
S pomočjo enakostraničnega trikotnika lahko določimo trigonometrijska razmerja za kote 30^0 in 60^0.



$$\sin 30^0 = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30^0 = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}/3$$

[3] Izraz *sinus* izhaja iz latinske besed *sinus rectus arcus* , ki jo je uporabil L.P.Fibonacci (1170-1250)

Trigonometrijska razmerja za kot 45^0 dobimo s pomočjo enakokrakega pravokotnega trikotnika. Po Pitagorovem izreku je hipotenuza enakokrakega trikotnika, ki ima kateti dolžine 1 enaka $\sqrt{2}$ zato je



$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^0 = 1$$

Pregled vrednosti trigonometrijskih razmerij, ki se jih da določiti s pomočjo enakostraničnega in enakokrakega trikotnika so podane v naslednji tabeli

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
radiani	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

2.4 Zveze med trigonometrijskimi razmerji

S pomočjo sinusa in kosinusa kota lahko definiramo preostali trigonometrijski razmerji tangens in kotangens

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \textbf{(1)}$$

Ostale identitete lahko s pomočjo Pitagorevega[4] izreka. Za poljuben kot α velja

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Z upoštevanjem definicij kotnih razmerij dobimo

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

Izrazi za $\cos\alpha$ **in** $\sin\alpha$ **pomočjo** $\tan\alpha$. Če zgornji izraz delimo $\cos^2\alpha$ in uredimo dobimo

[4] Pitagora (6 stoletje BC). Grški filozof.

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Od tu izrazimo

$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \textbf{(3)}$$

Če iz (1) izrazimo $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha$ in upoštevamo zgornji izraz $\cos\alpha$ dobimo

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \textbf{(4)}$$

Opomba. Dobljene izrazi se imenujejo *identitete*, ker veljajo za vsako vrednost kota α. Z besedo *enačba* označujemo izraze, ki veljajo le za določene vrednosti α., kot nprr: $3\cos^2\alpha+5\sin\alpha=1$.

PRIMER 2.3: Poenostavi $(1+\cot\alpha)/\sin\alpha$.

Rešitev

$$\frac{1+\cot^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\cos^2\alpha/\sin^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}=\frac{1}{\sin^3\alpha}$$

PRIMER 2.4: Reši enačbo $\sin\theta=\cot\theta$.

Rešitev

$$\begin{aligned}\sin\theta=\cot\theta \quad&\Rightarrow\quad \sin\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ &\Rightarrow\quad \sin^2\theta=\cos\theta\\ &\Rightarrow\quad 1-\cos^2\theta=\cos\theta\\ &\Rightarrow\quad \cos^2\theta+\cos\theta-1=0\end{aligned}$$

Označimo $x=\cos\theta$ pa dobimo kvadratno enačbo

$$x^2+x-1=0$$

Ta ima rešitvi

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Iskani kot je

$$\cos\theta_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \cos\theta_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

PRIMER 2.5: Iz enačb $x = 2\sin\theta$ in $y = 3/\cos\theta$ izloči θ.

Rešitev.

$$x = 2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\theta$$

$$y = 3/\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{y}\right)^2 = \cos^2\theta$$

Z uporabo trigonometrijske identitete (2)

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{y}\right)^2 = 1$$

Naloge

3. Poenostavi naslednje izraze

   a) $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$

   b) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$

   c) $\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(1-\cos\theta)$

4. Reši naslednji enačbi

   a) $4\sin^2\theta + 2.5 = 5\cos\theta$

   b) $3\cot^2\beta + \dfrac{1}{\sin\beta} + 1 = 0$

5. Iz naslednjih parov enačb izloči θ

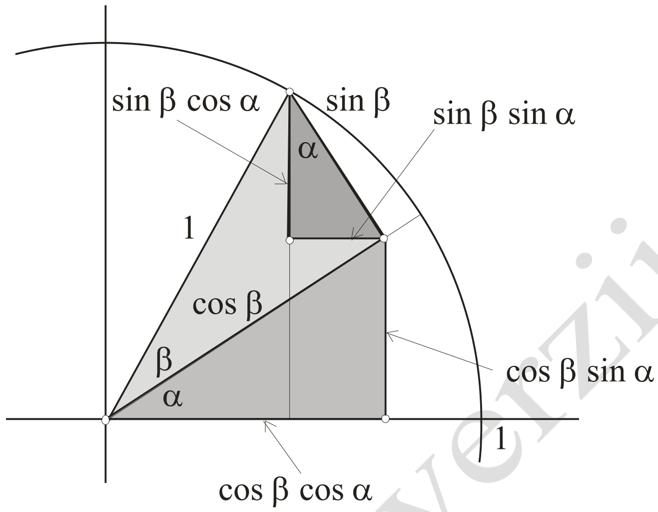
   a) $x = 3\tan\theta \quad y = \dfrac{3}{\cos\theta}$

   b) $x = 1+\cos\theta \quad y = 1-\sin\theta$

2.5 Adicijske zveze

Iz spodnje slike lahko razberemo naslednji zvezi:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (5)$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (6)$$



Če (5) delimo z (6) dobimo

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad (7)$$

V primeru, ko je $\alpha=\beta$ preidejo izrazi (5), (6) in (7) v

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (8)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad (9)$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad (10)$$

Če v (9) upoštevamo (2) dobimo

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

Zamenjamo α z $\alpha/2$ pa dobimo trigonometrijske izraze za polovične kote

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (11)$$

Ti identiteti medsebojno delimo

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{12}$$

PRIMER 2.6: Poenostavi $\tan\alpha+\cot\alpha$.

Rešitev

$$\begin{aligned}\tan\alpha+\cot\alpha&=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\\&=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\\&=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\underline{\underline{\frac{2}{\sin 2\alpha}}}\end{aligned}$$

PRIMER 2.7: Reši enačbo $\sin 3\theta=\sin\theta$.

Rešitev

$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=\sin\left(2\theta+\theta\right)\\&=\sin 2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos 2\theta\\&=2\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\\&=3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta\end{aligned}$$

Ta izraz izenačimo z $\sin\theta$ pa dobimo

$$\left(3\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\sin\theta=\sin\theta$$

Rešitev te enačbe je $\sin\theta=0$. V primeru, ko je $\sin\theta\neq 0$ enačba preide v

$$3\cos^2\theta-\sin^2\theta-1=0 \quad\Rightarrow\quad 2\cos^2\theta-1=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

PRIMER 2.8: Izračunaj $\sin 15^0$.

Rešitev

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad&\Rightarrow\quad \alpha=30^0\\&\Rightarrow\quad \sin 15^0=\sqrt{\frac{1-\cos 30^0}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}\\&\Rightarrow\quad \underline{\underline{\sin 15^0=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}}\end{aligned}$$

Naloge

6. Poenostavi naslednje izraze
   a) $\sin 2\phi \cos\phi + \sin\phi \cos 2\phi$
   b) $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$
   c) $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

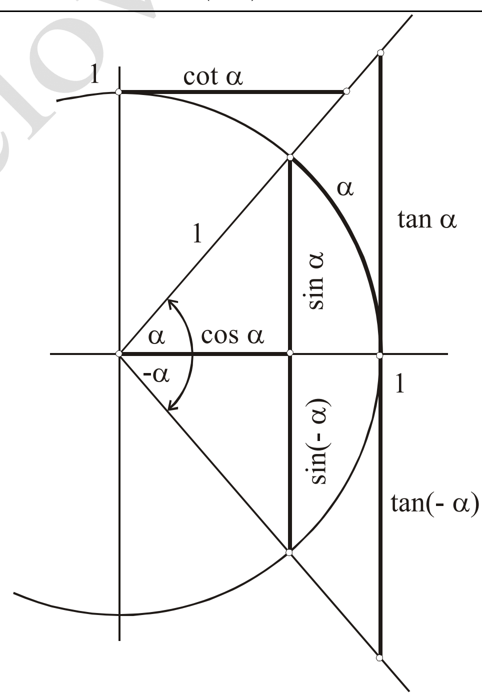
7. Reši naslednje enačbe
   a) $\cos 2\theta + \cos 4\theta = 0$
   b) $\sin 3\theta - \sin\theta = \cos 2\theta$
   c) $\sin 3\theta - \sin\theta = 0$
   d) $\cos 2\theta = \sin\theta$

8. Izračunaj vrednosti
   a) $\sin 22.5^0$
   b) $\cos 75^0$

2.5 Negativni koti, koti večji od 90^0

Po dogovoru je zasuk v smeri urinega kazalca je negativen, v obratni pozitiven. Pomen trigonometrijskih razmerij za negativne kote je viden na spodnji skici Iz te slike preberemo:

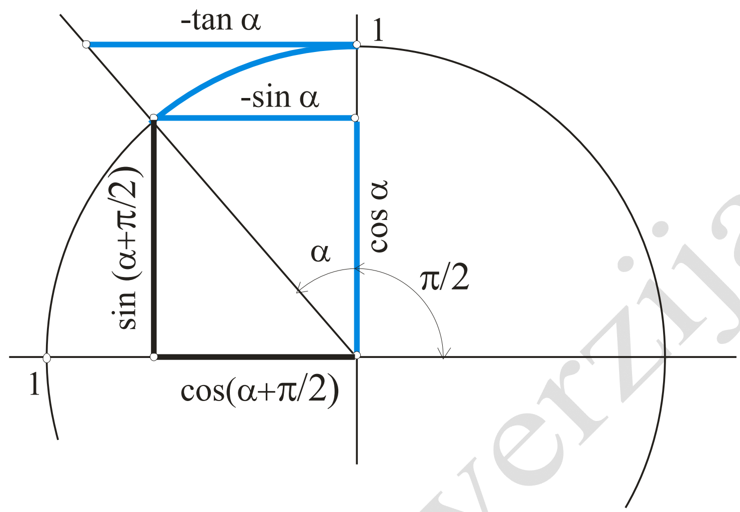
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \tag{13}$$



Identitete za razliko kotov sledijo neposredno iz (5) in (6):

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (14)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (15)$$

Pomen trigonometrijskih razmerij za kote večje od 900 kaže spodnja slika



Iz slike preberemo

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha \qquad (16)$$

S pomočjo trigonometričnih identitet (1) sta

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\alpha \qquad \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\tan\alpha \qquad (17)$$

2.7 Izraz $A\sin\alpha+B\cos\alpha=?$

Ta izraz primerjamo s (5). Torej, če postavimo

$$A=R\cos\beta \quad B=R\sin\beta$$

dobimo

$$\begin{aligned}A\sin\alpha+B\cos\alpha&=R\sin\alpha\cos\beta+R\cos\alpha\sin\beta\\&=R\left(\sin\alpha\cos\beta+R\cos\alpha\sin\beta\right)\\&=R\sin(\alpha+\beta)\end{aligned} \qquad \textbf{(18)}$$

Torej

$$A\sin\alpha + B\cos\alpha = R\sin(\alpha+\beta) \qquad \textbf{(19)}$$

pri čemer je

$$R = \sqrt{A^2+B^2} \quad \text{in} \quad \tan\beta = \frac{B}{A}.$$

R se imenuje **amplituda**, kot β pa **faza.**

PRIMER 2.9: Izrazi $\sin\alpha + \cos\alpha$. v obliki $R\sin(\alpha+\phi)$

Rešitev. V danem primeru sta $A = 1$ in $B = 1$. Zato

$$R = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \tan\varphi = \frac{B}{A} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Torej

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

PRIMER 2.10: Reši enačbo $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

Rešitev. Enačbo zapišemo v obliki (19). Najprej je

$$R = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \qquad \tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Enačbo smo na ta način preoblikovali v

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Prva od možnih rešitev te enačbe je

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -\frac{\pi}{6}}}$$

Naloge

9. V obliki $R\sin(\alpha+\phi)$ izrazi naslednje izraze

a) $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$
b) $2\sin\alpha + \cos\alpha$
c) $4\sin\alpha + 3\cos\alpha$

10. Reši naslednje enačbe

a) $\cos x - \sin x = 0.5$

b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

c) $3\sin\alpha + 1 = \cos x$