

Spoštovana študentka in cenjeni študent

Veseli me, da Vas ta predmet zanima. Na tem mestu so zapisana nekatera pojasnila dokumentov, ki se nanašajo na drugi del predmeta Mehanika in hidromehanika. Drugi del predmeta namreč obsega predvsem dinamiko in osnove hidromehanike. Prvi del tega predmeta obsega statiko, ki jo predava prof. Milan Batista. Slednji je tudi nosilec predmeta. Pogoji za pristop k ustnemu izpitu je pozitivna ocena iz kolokvijev, tako iz statike kot iz dinamike, ali pa pozitivna ocena pisnega izpita iz teh dveh delov predmeta.

Priloženi dokumenti niso skripta za navedene vsebine, pač pa so prirejeni zapiski predavanj za predstavitev vsebin na prosojnicah. Gre torej za zaporedje prosojnic, ki se nahaja v 15-ih word dokumentih. Vmes so tudi nekatere vaje. Ene vaje so rešene in služijo kot primeri obravnavanih vsebin. Druge vaje pa so zgolj nakazane in se rešujejo pri vajah, ki predavanjem sproti sledijo. Omeniti velja, da tudi vsebina še ni dokončna. Morda bom tudi katero od obstoječih vsebin zgostil, drugo pa obarval s kakšnimi zanimivimi primeri. Nekoč bodo te prosojnice predelane v obliko, ki je primerna za skripto.

Ker gre za prvo elektronsko verzijo zapiskov predavanj za prosojnice, je v njej zagotovo precej napak. Tako npr. opažam, da v natisnjeni obliki vektorske količine, ki naj bi bile pisane s poudarjenim in odebeljenim tiskom, niso odebeljene v slikah, kot tudi ne v nekaterih izrazih. Zaradi barvnih slik nekatere skice natisnjene v črno-belem tisku niso primerno jasne. Prisotne so tudi vsebinske, kot tipkarske napake, tu in tam so stavki niso v celoti zapisani. Vendar sem mnenja, da bodo zapiski tudi v takšni obliki lahko študentu v pomoč, zato sem se odločil, da naj bodo objavljeni na spletni strani fakultete in sicer na:

www.fpp.edu/~milanb/tpmeh/malacic

Vsem, ki me bodo opozorili na napake, pa morda tudi svetovali, kako jih odpraviti, se v naprej zahvaljujem.

S pozdravi,
<http://www.mbss.org>

izred.prof.dr. Vlado Malačič
malacic@mbss.org

Piran, 17. feb. 2007

PREGLED PREDAVANJ

OSNOVE DINAMIKE

I. Matematične osnove in definicije nekaterih fizikalnih količin

Skalarni produkt in delo sile
Vektorski produkt in navor sile
Časovni odvod skalarne in vektorske količine (trenutna hitrost in pospešek, moč)
Časovni integrali (hitrost kot funkcija pospeška, opravljena pot kot funkcija hitrosti)
Kartezični in polarni koordinatni sistem v ravnini

II. Opis gibanja

Tirnica, parametrični zapis gibanja in opravljena pot
Premočno gibanje
Kroženje - osnovne lastnosti
Enakomerno kroženje in centripetalna sila, neenakomerno kroženje
Inercialen in rotirajoči opazovalni sistem, Coriolisova in centrifugalna sistemska sila
Nihanje (projekcija kroženja)

III. Ravnoesje telesa

Newtonovi zakoni
Pogoji za ravnoesje točkastega telesa
Vztrajnost in sprememba gibanja togega telesa
Sila lepenja in trenja, aktivne in reakcijske sile, vztrajnostna sila
Ravnoesje navorov, navor vzporednih sil, težišče, navor dvojice sil, gonilni navor

IV. Vrtilna količina

Izrek o vrtilni količini točkastega telesa (vztrajnostni moment točkastega telesa)
Vrtilna količina sistema točkastih teles
Vrtilna količina in vztrajnostni moment togega telesa
Steinerjevo pravilo, primeri vztrajnostnega momenta
Vrtenje togega telesa, gavnne osi vrtenja
Ohranitev ravnoesja za togo telo

V. Delo in energija

Delo pri translatorskem gibanju in pri rotaciji telesa
Kinetična energija togega telesa
Potencialna energija, delo konzervativnih sil
Prožnostna energija
Izrek o ohranitvi mehanske energije

Literatura

1. Stropnik J., 1987. *Osnove dinamike*, VPŠ Piran.
2. Kladnik R., 1974. *Osnove fizike, I*, DZS.
3. Hannah J. In Hillier M. J., 1971, 3rd ed. 1995. *Applied Mechanics*. Person Education Limited, Harlow, UK.
4. Kittel C., W. D. Knight, M.A. Ruderman, 1979 (1982). *Mehanika* (v hrvaščini), Tehnička knjiga, Zagreb ((prevod 'Mechanics', Berkeley Univ.)
5. Muršič M., 1991. *Osnove tehniške mehanike, III, Dinamika*, Akademska založba
6. Kladnik R., 1975. *Zbirka fizikalnih problemov z rešitvami* (Mehanika, toplota, akustika), DZS.
7. Kladnik R. In Šolinc H., 1996. *Zbirka fizikalnih nalog z rešitvami, I*, DZS

Pregled predavanj

OSNOVE HIDRODINAMIKE

VI. Definicija tekočine, laminaren in turbulenten tok

VII. Strižna napetost in viskoznost

VIII. Kontinuitetna enačba, tok po ceveh

IX. Hidrostatika (HS paradoks, HS sila, jezovi in rezervoarji, statična sila vzgona, metacenter)

X. Bernoullijeva enačba (Ventourijeva cev)

XI. Uporaba Bernoullijeve enačbe (sod, zastojni tlak)

XII. Poiseuillov tok (za viskozno tekočino ne velja Bernoullijeva enačba)

XIII. Reynoldsovo število, Stokesov zakon upora,

XIV. Dinamični upor kot posledica porazdelitve

- tangencialne napetosti po površini telesa (kožni efekt)
- hitrosti tekočine in s tem tlaka tekočine na telo

XV. Dinamična sila vzgona

Literatura

1. Stropnik J., 1987. Osnove hidrodinamike
2. Kladnik R., 1974. Osnove fizike, I, DZS.

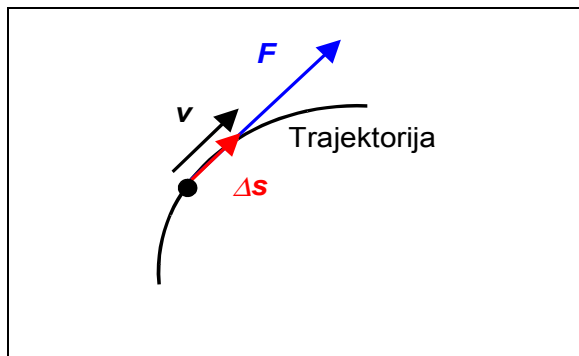
Predavanja so na:

www.fpp.edu/~milanb/tpmeh/malacic

I. MATEMATIČNE OSNOVE S FIZIKO

I.1 SKALARNI PRODUKT IN DELO SILE

- i. Naj je majhen pomik točkastega telesa $\Delta \mathbf{s}$ $\uparrow \uparrow$ s silo \mathbf{F} .



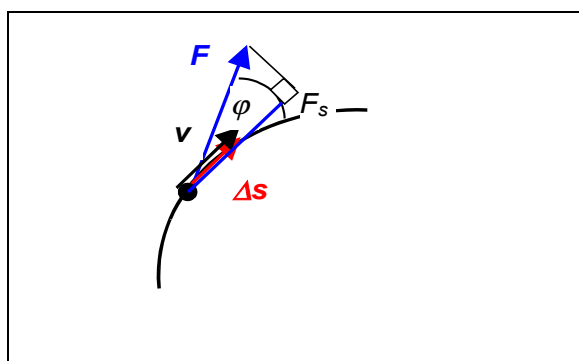
Definicija:

Delo sile ΔA pri majhnem pomiku je definirano kot:

$$\Delta A = F \Delta s$$

Sila \mathbf{F} je konstanta med majhnim pomikom telesa $\Delta \mathbf{s}$.

- ii. Majhen pomik točk. telesa ni vzporeden s silo ($\Delta \mathbf{s} \nparallel \mathbf{F}$)



Delo sile ΔA pri majhnem pomiku je definirano kot:

$$\Delta A = \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{s},$$

kjer \bullet označuje skalarni produkt dveh vektorjev. Zopet si zamislimo, da je delo sestavljeno iz produkta tiste komponente

sile F_s , ki je vzporedna s pomikom, torej:

$\Delta A = \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{s} = F_s \Delta s$. V pravokotnem trikotniku je

$$\cos \varphi = \frac{\text{prile znica}}{\text{hipotenuza}} = \frac{F_s}{F} \Rightarrow F_s = F \cos \varphi. \text{ Zato je delo sile } \mathbf{F}, \text{ ki ni}$$

vzporedna s pomikom $d\mathbf{s}$ enako:

$$\Delta A = F \cos \varphi \Delta s.$$

Celotno delo zunanje sile vzdolž gibanja telesa pa je vsota del sile vseh drobnih pomikov:

$$A = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_i \Delta A_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_i F_i \Delta s_i \cos \varphi_i = \int F \cos \varphi ds = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

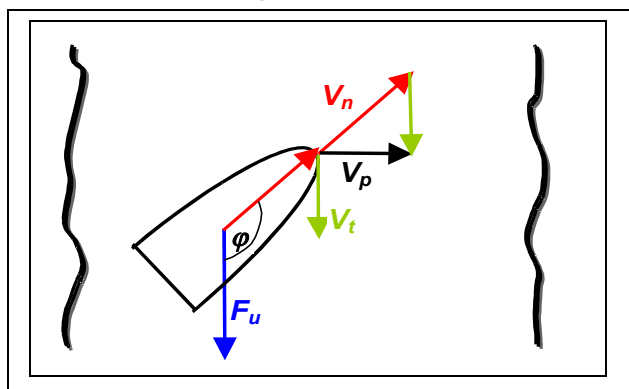
Če je sila konstantna med gibanjem telesa (ohranja jakost in smer glede na smer gibanja), jo lahko postavimo izven integrala

$$A = \int F \cos \varphi ds = F \cos \varphi \int ds = F \cos \varphi s = Fs \cos \varphi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

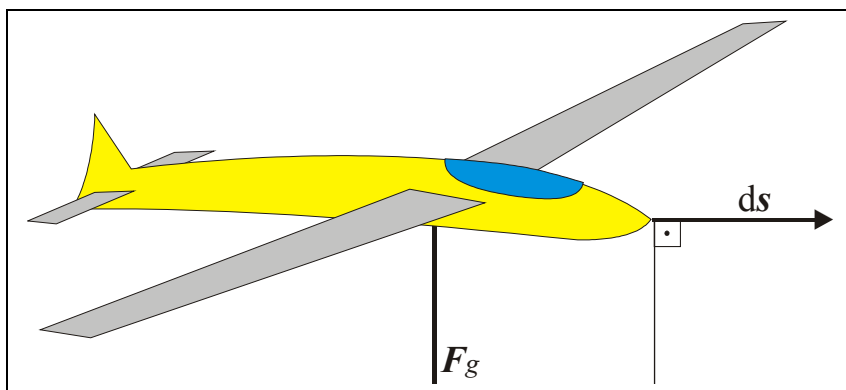
Delo je enostaven skalarni produkt vektorja sile in vektorja opravljenega premočrtnega pomika poti samo takrat, ko je sila konstantna (gibanje pa premočrtno). $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$, Če $\mathbf{F} \uparrow \uparrow \mathbf{s}$ je $A = Fs$. Enota za delo: [N m = kg (m/s²) m = kg m²/s² = J].

Vaje

1. Gibanje plovila pod kotom glede na rečni tok.



2. Letalo, delo sile teže pri horizontalnem gibanju



Če sta

sila in pomik pravokotna, $\varphi = \pi/2$, $\cos \varphi = 0$ in je delo sile pri pomiku ds : $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, zato je tudi celotno delo, ki je vsota teh prispevkov

$$A = \int F \cos \varphi ds = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Delo sile, ki je pravokotna na pomik telesa, na katerega sila deluje, je enako nič.

1.2 DEFINICIJA MOČI

$$\text{MOČ} = P = \text{delo na časovno enoto} = \frac{dA}{dt}$$

Enota za moč: $[W = J/s = N \text{ m} /s = \text{kg} (\text{m}/\text{s}^2) \text{ m}/\text{s} = \text{kg} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}]$.
 Diferencial dela je sorazmeren z močjo $dA = P dt$, delo je časovni integral moči:

$$A = \int dA = \int P dt$$

Če je moč $P = \text{konst.}$, samo tedaj velja, da je

$$A = P \int dt = Pt.$$

Ker velja $dA = F \cos \varphi ds$, je moč

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{F \cos \varphi ds}{dt} = F \cos \varphi v = Fv \cos \varphi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

kjer je \mathbf{v} hitrost točkastega telesa. Če je $\mathbf{F} \uparrow \uparrow \mathbf{v}$, je $\cos \varphi = 1$, samo tedaj velja za trenutno moč, ki je funkcija časa t :

$$P(t) = Fv,$$

v vsakem trenutku – ni nujno, da sta sila in hitrost konstantni.

Vaje

Povprečna vlečna moč motorja vozila je 20 kW. Koliko je delo, ki ga opravi motor v eni minuti? Koliko pa je, če upoštevamo, da je izkoristek motorja 80 %?. Naj elektromotor požene vozilo mase 1200 kg z mesta s stalnim pospeškom. Kolika je končna hitrost vozila?

$$m = 1200 \text{ kg}$$

$$P = 30 \text{ kW}$$

$$t = 60 \text{ s}$$

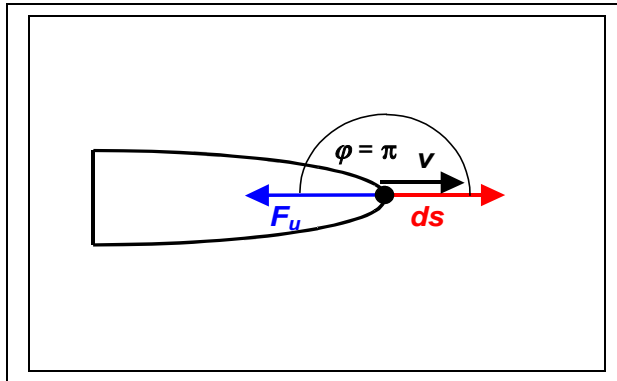
$$\eta = 0,8$$

$$A = P t = 18 \times 10^5 \text{ J}$$

$$A = \Delta W = W_k - W_{k0} = W_k = mv^2/2 \Rightarrow v = (2A/m)^{1/2}$$

$$A_0 = \eta A \Rightarrow v_0 = (2A_0/m)^{1/2} = (2\eta A / m)^{1/2}$$

3. Plovilo, delo sile upora



$$F_u \uparrow \downarrow v; F_u \uparrow \downarrow ds$$

$$dA = \mathbf{F}_u \cdot d\mathbf{s} = F_u ds \cos \pi$$

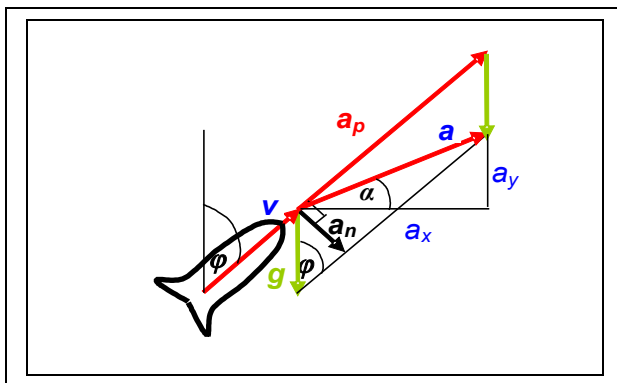
$$dA = -F_u ds < 0.$$

Sila, ki nasprotuje gibanju, opravi **negativno** (zaviralno) delo.

VAJE: Kladnik, 1996, str. 14, vaja 1.33, str. 12, vaja 1.26.

4. Raketa, njeni pospeški

VAJE: Hannah and Hillier, 1971, vaje 1, 2 str. 69:



$$a_n = a \sin \varphi$$

Celotni pospešek je vektorska vsota:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{g} = (a_x, a_y)$$

njegova jakost: iz skalarnega produkta

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = (\mathbf{a}_p + \mathbf{g})^2$$

$$\mathbf{a}_p = (a_p \sin \varphi, a_p \cos \varphi), \quad \mathbf{g} = (0, -g),$$

$$\tan \alpha = a_y / a_x$$

$$\mathbf{a} = (a_p \sin \varphi, a_p \cos \varphi - g) = (a_x, a_y), \quad a_x = a_p \sin \varphi, \quad a_y = a_p \cos \varphi - g$$

$$a^2 = (\mathbf{a}_p + \mathbf{g})^2 = (\mathbf{a}_p + \mathbf{g}) \cdot (\mathbf{a}_p + \mathbf{g}) =$$

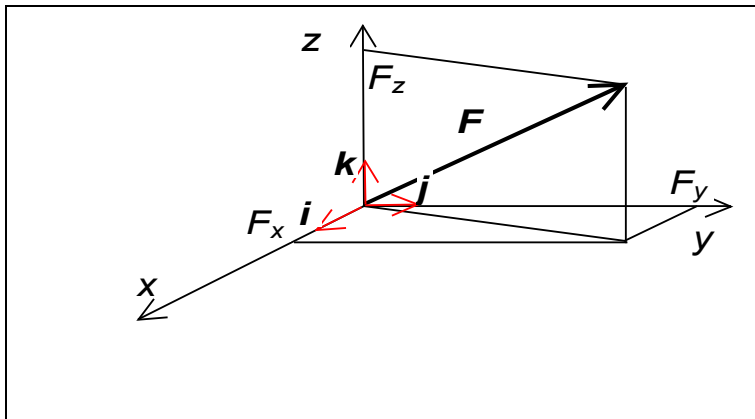
$$(a_p \sin \varphi, a_p \cos \varphi - g) \cdot (a_p \sin \varphi, a_p \cos \varphi - g) = a_p^2 \sin^2 \varphi + (a_p \cos \varphi - g)^2$$

$$a^2 = a_p^2 \sin^2 \varphi + a_p^2 \cos^2 \varphi + g^2 - 2 a_p g \cos \varphi$$

$$a = (a_p^2 \sin^2 \varphi + a_p^2 \cos^2 \varphi + g^2 - 2 a_p g \cos \varphi)^{1/2}$$

$$\alpha = \text{Atan}(a_y / a_x) = \text{Atan}((a_p \cos \varphi - g) / a_p \sin \varphi)$$

1.3 KOMPONENTNI ZAPIS SKALARNEGA PRODUKTA



Enotni vektorji:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

$$|\mathbf{i}| = 1 = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}|$$

Komponentni zapis vektorja sile:

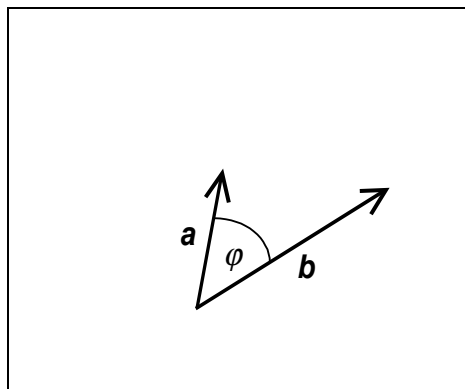
$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = F_x (1, 0, 0) + F_y (0, 1, 0) + F_z (0, 0, 1)$$

$$\mathbf{F} = (F_x, 0, 0) + (0, F_y, 0) + (0, 0, F_z) = (F_x, F_y, F_z)$$

Majhen pomik točkastega telesa $d\mathbf{s} = (dx, dy, dz)$

$d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$. Delo sile na telo pri majhnem pomiku:

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k})$$



Skalarni produkt dveh vektorjev \mathbf{a} in \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi \quad \{= 0, \text{ če } \varphi = \pi/2\}$$

$$\quad \{= ab, \text{ če } \varphi = 0\}$$

zato: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad 1 \cos(0) = 1,$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 1 \cdot 1 \cos(\pi/2) = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + F_x dy \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + F_x dz \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} +$$

$$F_y dx \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + F_y dy \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + F_y dz \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} +$$

$$F_z dx \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + F_z dy \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + F_z dz \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$$

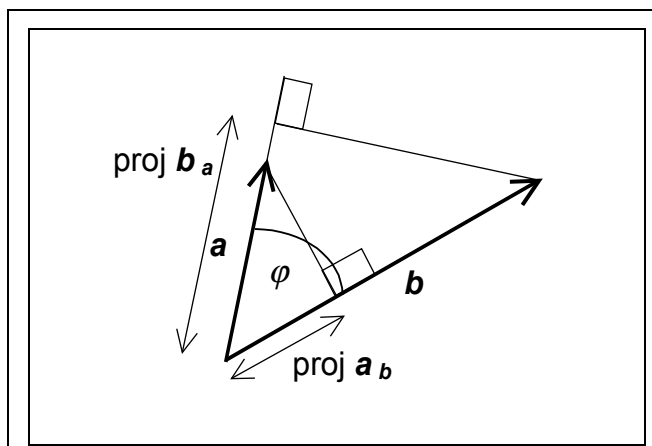
$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F ds \cos \varphi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Če $\mathbf{F} = \text{konst.}$ in gibanje po premici:

$$A = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^x F_x dx + \int_0^y F_y dy + \int_0^z F_z dz = F_x \int_0^x dx + F_y \int_0^y dy + F_z \int_0^z dz$$

$$A = F_x x + F_y y + F_z z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}; \quad \mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z); \quad \mathbf{s} = (x, y, z)$$



Skalarni produkt dveh vektorjev \mathbf{a} in \mathbf{b} :

Projekcija vektorja \mathbf{a} na \mathbf{b} :

$$\text{proj } \mathbf{a}_b = a \cos \varphi$$

$$\text{ker: } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = b \text{ proj } \mathbf{a}_b.$$

Velja tudi:

$$\text{proj } \mathbf{b}_a = b \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \text{ proj } \mathbf{b}_a.$$

Če $\varphi = \pi/2 \Rightarrow \text{proj } \mathbf{b}_a = \text{proj } \mathbf{a}_b = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Ponovitev:

Delo zunanje sile pri majhnem pomiku telesa je skalarni produkt sile in majhnega pomika:

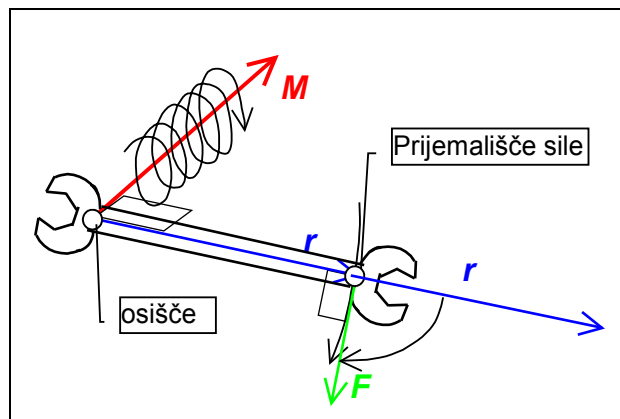
$$\begin{aligned} dA &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos \varphi \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz. \end{aligned}$$

Če $\mathbf{F} = \text{konst.}$ na premočrtni poti delca $\Rightarrow \varphi = \text{konst.}$

$$A = F s \cos \varphi = F_x x + F_y y + F_z z$$

Delo sile, ki je pravokotna na gibanje telesa, t.j. pravokotna na hitrost in na majhen pomik telesa ($\varphi = \pi/2$, $\cos \varphi = 0$), je enako nič. Največje delo opravi sila, ki deluje na telo v smeri njegovega gibanja ($\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$). Zaviralne sile (trenje, upor), ki nasprotujejo gibanju ($\varphi = \pi$, $\cos \varphi = -1$), pa opravijo negativno delo ($A < 0$).

I.4 VEKTORSKI PRODUKT DVEH VEKTORJEV IN NAVOR SILE

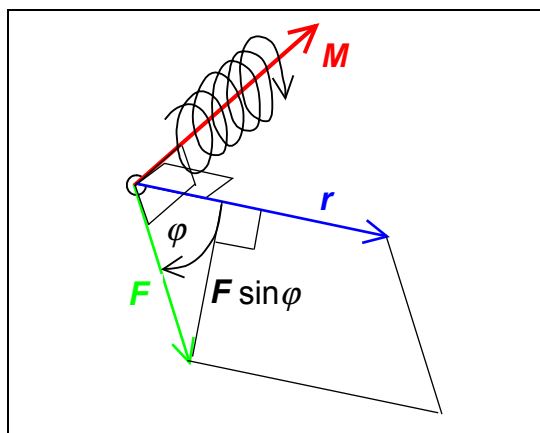


- i. $r \perp F$: Ročica od osišča do prijemališča sile r je pravokotna na silo F . Ročico premaknemo v prijemališče sile in jo po najkrajši poti sukamo proti sili.

Navor M sile kaže v smeri lezenja desnega vijaka. Njegova smer je pravokotna tako na silo F , kot na vektor prijemališča sile r . Velikost navora pa je določena kot produkt:

$$M = r F$$

- ii. r ni pravokotna na F , med njima je kot φ .



Ponovno za določitev smeri navora sukamo vektor prijemališča sile r proti sili F po najkrajši poti. Smer navora M je po definiciji določena kot smer lezenja desnega vijaka in je ponovno pravokotna tako na r , kot na F , čeprav r ni pravokotna na F . Jakost navora pa je določena kot ploščina

paralelograma, ki ga napenjata r in F , torej:

$$M = r F \sin \varphi$$

Tako smo določili vektor navora po smeri in po jakosti. Drugače povedano: Vektor navora M je vektorski produkt med vektorjem prijemališča sile r in silo F , ali:

$$M = r \times F.$$

Komponentni zapis

$$i = (1, 0, 0); j = (0, 1, 0); k = (0, 0, 1)$$

$$r = x i + y j + z k = (x, y, z);$$

$$F = F_x i + F_y j + F_z k = (F_x, F_y, F_z)$$

$$M = r \times F = (x i + y j + z k) \times (F_x i + F_y j + F_z k)$$

$$M = x F_x i \times i + y F_x j \times i + z F_x k \times i +$$

$$x F_y i \times j + y F_y j \times j + z F_y k \times j +$$

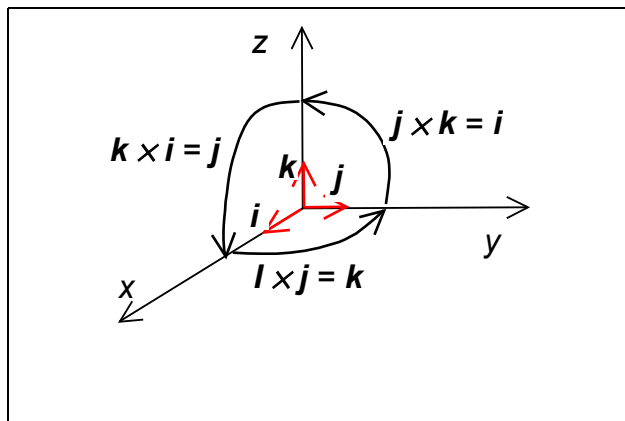
$$x F_z i \times k + y F_z j \times k + z F_z k \times k$$

$$i \times i = ? \quad |i \times i| = |i||i|\sin 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \quad \{a \times b = a b \sin \varphi\}$$

$$\Rightarrow i \times i = j \times j = k \times k = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$$

$$i \times j = ? \quad |i \times j| = |i||j|\sin(\pi/2) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1; |i \times k| = 1$$

$$i \times j = k = (0, 0, 1); \quad j \times k = i = (1, 0, 0); \quad k \times i = j = (0, 1, 0)$$



$$j \times i = -(i \times j) = -k$$

$$k \times j = -(j \times k) = -i$$

$$i \times k = -(k \times i) = -j$$

$$M = \mathbf{0} + y F_x (-k) + z F_x j +$$

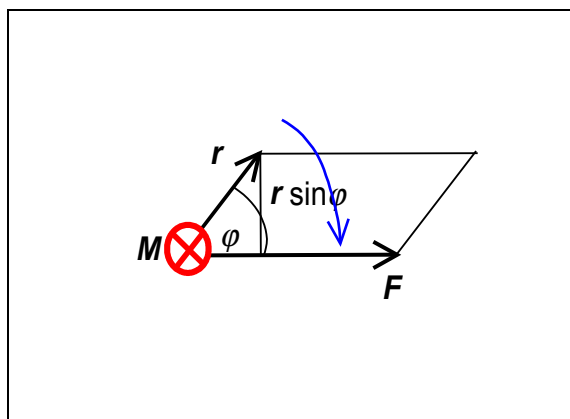
$$x F_y k + \mathbf{0} + z F_y (-i)$$

$$+ x F_z (-j) + y F_z i + \mathbf{0}$$

$$M = (y F_z - z F_y)i + (z F_x - x F_z)j + (x F_y - y F_x)k$$

$M = r \sin \varphi F = r_{\perp} F$, kjer je r_{\perp} dolžina ročice, ki je pravokotna na silo.

$$M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



Ponovitev:

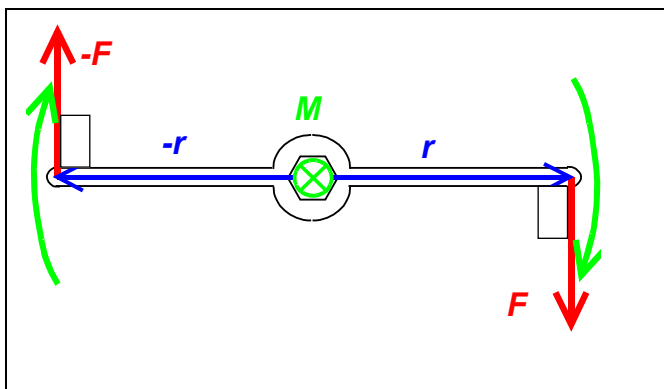
Skalarni produkt dveh vektorjev – je skalar: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos \varphi$.

Če $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Vektorski produkt dveh vektorjev je vektor, za njegovo jakost velja:

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = a b \sin \varphi$. Če $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$, ali $\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$.

1.5 NAVOR DVOJICE SIL



- iii. Dve sili, ki sta si vzporedni in nasprotno smiselni ter ne ležita na isti nosilki (premici) tvorita navor dvojice sil okoli poljubne točke v ravnini sil.

Navor sile \mathbf{F} je $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \times$

\mathbf{F} , po jakosti $M_1 = r F \sin(90^\circ) = r F$.

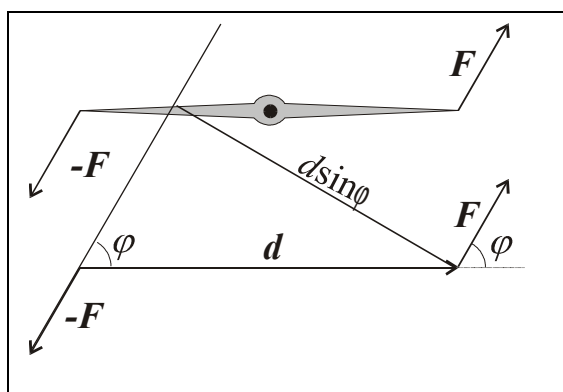
Navor sile $-\mathbf{F}$ pa je $\mathbf{M}_2 = -\mathbf{r} \times (-\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Navor dvojice sil je vsota navorov posameznih sil:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 2\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{d} \times \mathbf{F},$$

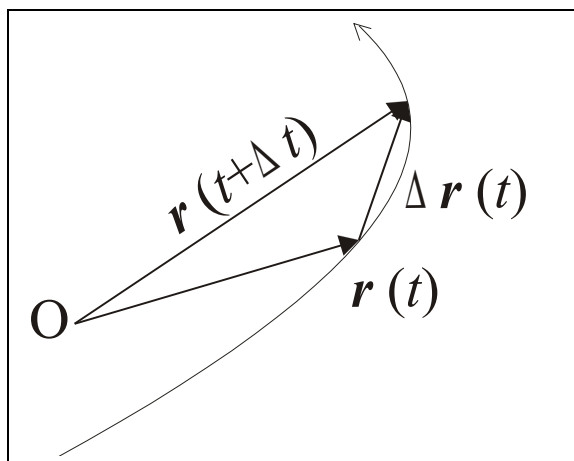
kjer je jakost navora

$$M = d F \sin(\varphi).$$



$\mathbf{d} = 2\mathbf{r}$ je vektor, ki povezuje prijemališče sile $-\mathbf{F}$ s prijemališčem sile \mathbf{F} , φ pa kot med vektorjem zveznice prijemališč \mathbf{d} in silo \mathbf{F} . Zgornji izraz velja tudi za dvojico sil, katerih zveznica prijemališč ni pod pravim kotom glede na smer sile:

I.6 TRENUTNA HITROST TOČKASTEGA TELESA, OZ. HITROST GIBANJA TEŽIŠČA TOGEGA TELESA



r – radij vektor lege točkastega telesa
 Δr – vektor difference pozicij telesa v trenutkih $t + \Delta t$ in t . Trenutna hitrost je definirana kot časovni odvod radij vektorja delca:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt = dx(t)/dt \mathbf{i} + dy(t)/dt \mathbf{j} + dz(t)/dt \mathbf{k} =$$

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t) \mathbf{i} + v_y(t) \mathbf{j} + v_z(t) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = (v_x, v_y, v_z)$$

$$v_x = dx/dt; \quad v_y = dy/dt; \quad v_z = dz/dt;$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Kot φ med radij vektorjem in osjo x, kotna hitrost ω (njena jakost):

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

kar smo opredelili kot časovni odvod skalarne količine.

1.7 TRENUTNI POSPEŠEK TOČKASTEGA TELESA

je časovni odvod hitrosti:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t) \mathbf{i} + v_y(t) \mathbf{j} + v_z(t) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt = d v_x(t)/dt \mathbf{i} + d v_y(t)/dt \mathbf{j} + d v_z(t)/dt \mathbf{k} =$$

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t) \mathbf{i} + a_y(t) \mathbf{j} + a_z(t) \mathbf{k}$$

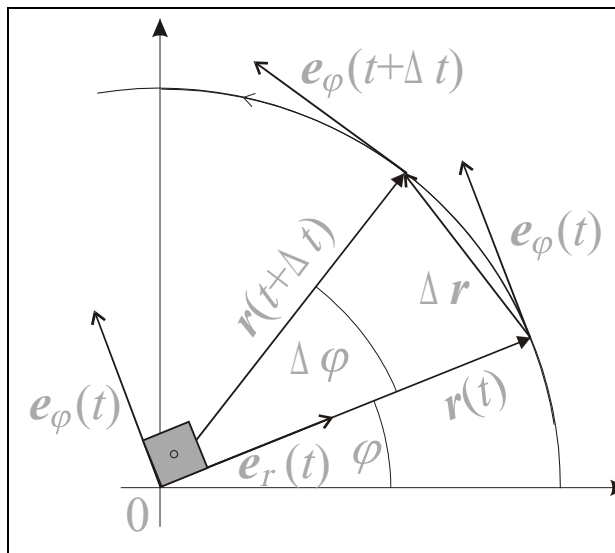
$$\mathbf{a}(t) = (a_x, a_y, a_z)$$

$$a_x = dv_x/dt; \quad a_y = dv_y/dt; \quad a_z = dv_z/dt;$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

II. KROŽENJE TOČKASTEGA TELESA

II.1 Uvod



Je gibanje, pri katerem je dolžina radij vektorja lege točkastega telesa konstantna:

$|\mathbf{r}(t)| = r = \text{konst.} \neq r(t)$. Radij vektor $\mathbf{r}(t)$ pa se

spreminja po smeri, zato je funkcija časa.

To velja tako za *enakomerno*, kot za *neenakomerno* kroženje. Velja tudi $\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{v}(t)$ za vsak t .

Pri *enakomernem* kroženju je *jakost obodne hitrosti* točke stalna:

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \text{konst.} \neq v(t).$$

S časom pa se stalno spreminja njena smer: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$.

Pri *neenakomernem* kroženju pa *jakost hitrosti* krožečega točkastega telesa *ni* konstantna, se spreminja

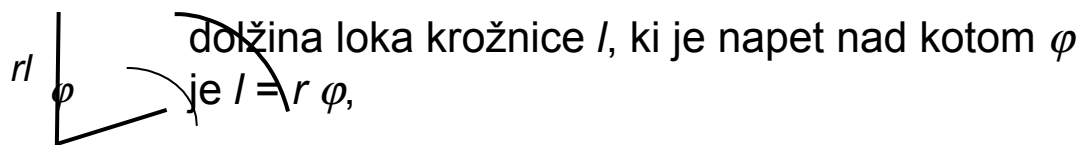
$$v = v(t) = |\mathbf{v}(t)| \neq \text{konst.}$$

kot se stalno spreminja njena smer: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$.

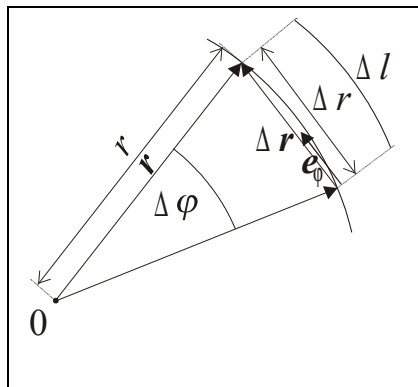
$\mathbf{e}_\varphi(t)$ – enot. vektor v smeri gibanja oz. hitrosti \mathbf{v} točke po krožnici, s časom spreminja smer: $\mathbf{e}_\varphi(t) \hat{=} \hat{=} \mathbf{v}(t)$.

$\mathbf{e}_r(t) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ je enot. vektor radij vektorja točke \mathbf{r} . Tudi ta se

spreminja po smeri. Velja: $|\mathbf{e}_\varphi| = 1$, $|\mathbf{e}_r| = 1$, v vsakem trenutku: $\mathbf{e}_\varphi \perp \mathbf{e}_r$.



dolžina loka Δl , ki je napet nad majhnim kotom $\Delta\varphi$ pa je



$$\Delta l = r \Delta\varphi.$$

Za majhne kote $\Delta\varphi$ velja, da je dolžina loka pribl. enaka dolžini tetive Δr :

$$\Delta\varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta r \rightarrow \Delta l = r\Delta\varphi,$$

$$|\Delta \mathbf{r}| = \Delta r \cong r\Delta\varphi, \text{ ker } \Delta \mathbf{r} \uparrow \uparrow \mathbf{e}_\varphi :$$

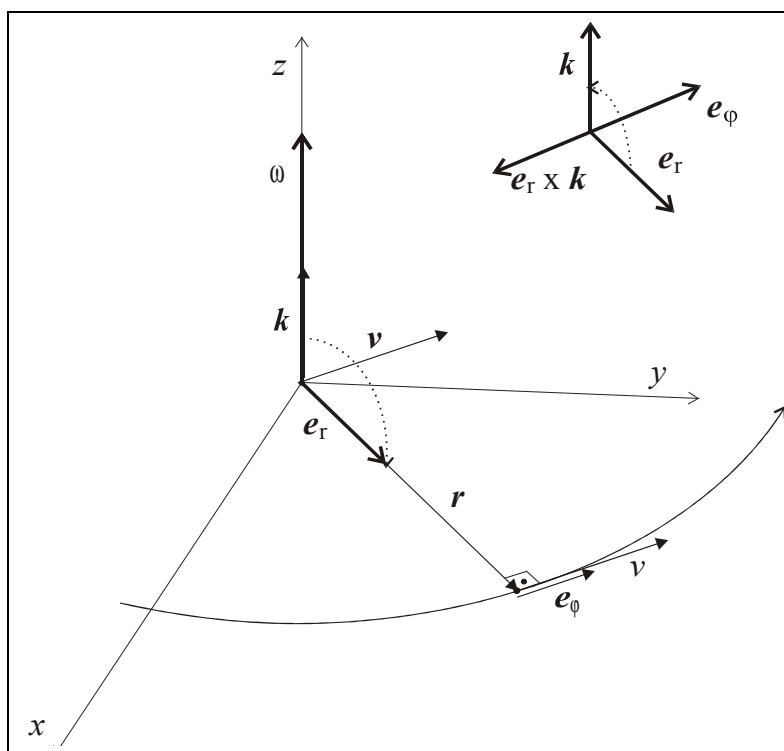
$$\Delta\varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta \mathbf{r} \rightarrow r\Delta\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} \mathbf{e}_\varphi = r \mathbf{e}_\varphi \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \mathbf{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Časovni odvod kota je kotna hitrost $\omega = d\varphi/dt$, zato za vsako kroženje velja

$$\mathbf{v}(t) = r \omega \mathbf{e}_\varphi.$$

Jakost obodne hitrosti v je povezana s kotno hitrostjo ω :



$\mathbf{v}(t) = r \omega$.
Obodna hitrost in kotna hitrost sta po jakosti stalni pri enakomernem kroženju.

$$\omega \times \mathbf{r} = \mathbf{v}$$

[rad/s * m = m/s]

$$\mathbf{v} = -\mathbf{r} \times \omega$$

$$\mathbf{v} = r \omega \mathbf{e}_\varphi$$

$$v = r \omega$$

Preverjanje:

$$\omega = \omega \mathbf{k}, \mathbf{r} = r \mathbf{e}_r; \quad -\mathbf{r} \times \omega = -r\omega \mathbf{e}_r \times \mathbf{k} = r\omega \mathbf{e}_\varphi$$

II.2 ENAKOMERNO KROŽENJE TOČKASTEGA TELESA IN CENTRIPETALNI POSPEŠEK

Pri *enakomernem* kroženju je *jakost obodne hitrosti* točke stalna:

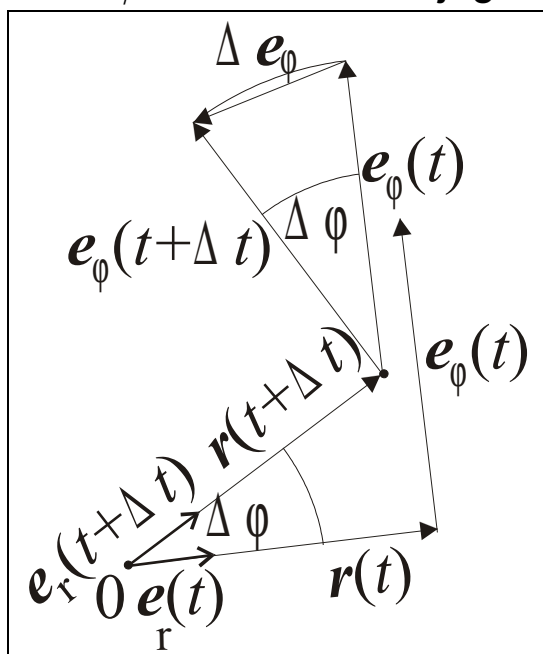
$$v = |\mathbf{v}(t)| = \text{konst.} \neq v(t).$$

S časom pa se stalno spreminja njena smer: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Seveda se ohranja tudi dolžina radij vektorja $r = \text{konst.}$

Ali ima točkasto telo pri enakomernem kroženju pospešek?

Enotni vektor \mathbf{e}_φ ima smer obodne hitrosti, saj je:

$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_\varphi$. Zanima nas njegoa časovna sprememba pri



kroženju. Ponovno uporabimo načelo, da sta si dolžina loka in sekanta pri majhnem kotu skoraj enaka:

$$\Delta\varphi \rightarrow 0 \Rightarrow |\Delta\mathbf{e}_\varphi| \rightarrow |\mathbf{e}_\varphi| \Delta\varphi = \Delta\varphi$$

$$\Delta\mathbf{e}_\varphi \uparrow\downarrow \mathbf{e}_r, \Delta\mathbf{e}_\varphi \uparrow\downarrow \mathbf{r}, \text{ torej: } \Delta\mathbf{e}_\varphi = -\Delta\varphi \mathbf{e}_r$$

Pri enakomernem kroženju se jakost hitrosti ohrani ($v = \text{konst.} \Rightarrow \Delta v = 0$), zato iz $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_\varphi \Rightarrow \Delta\mathbf{v} = v \Delta\mathbf{e}_\varphi = -v \Delta\varphi \mathbf{e}_r$. To uporabimo pri formuli za pospešek:

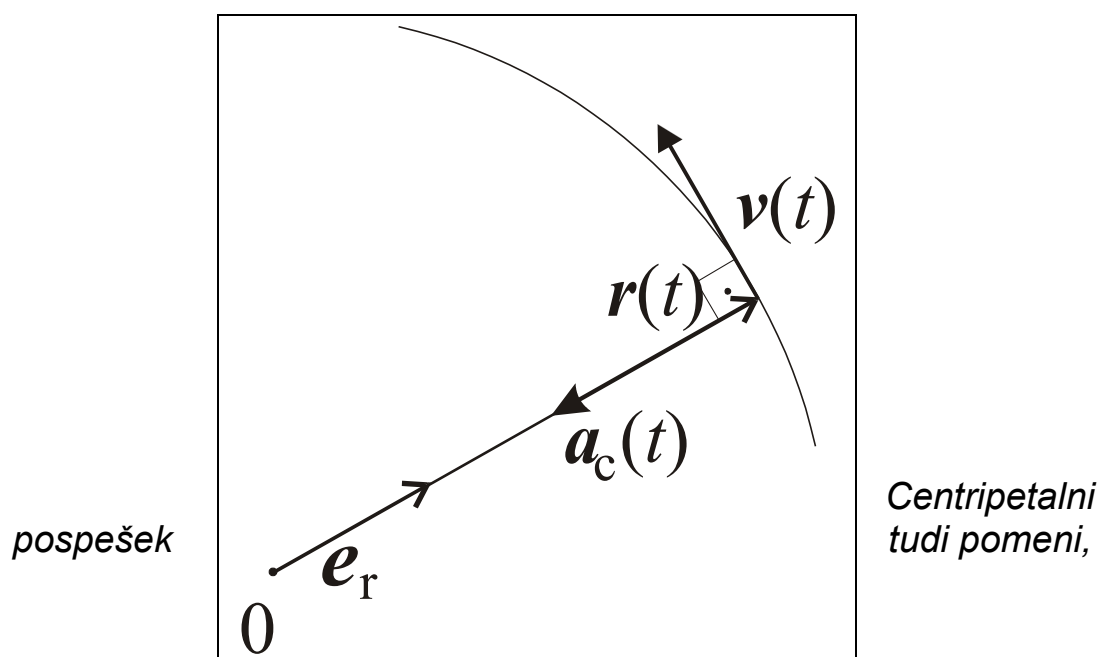
$$\mathbf{a}_c(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} v \mathbf{e}_r = -\frac{d\varphi}{dt} v \mathbf{e}_r = -\omega v \mathbf{e}_r,$$

$$a_c = \omega v$$

To pomeni: *enakomerno* kroženje je *pospešeno* gibanje, krožeče točkasto telo občuti pospešek, ki je usmerjen *proti centru* kroženja, imenuje se radialni ali **centripetalni** pospešek. Ta zagotavlja stalno spremembo smeri hitrosti – njen odklon proti centru kroženja.

Ker je $v = r \omega$, izračunamo centripetalni pospešek iz obodne, ali iz kotne hitrosti:

$$a_c = v \omega = r \omega^2 = v^2/r.$$



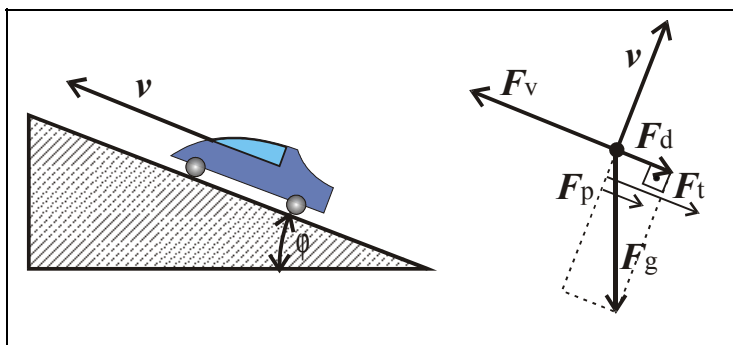
da (po 2. Newtonovem zakonu) obstaja tudi centripetalna ali radialna sila:

$$F_c = m a_c = m r \omega^2 = m v^2/r,$$

kjer smo z m označili maso krožečega telesa, z a_c pa centripetalni pospešek. Tudi sila je usmerjena proti centru kroženja.

VAJE

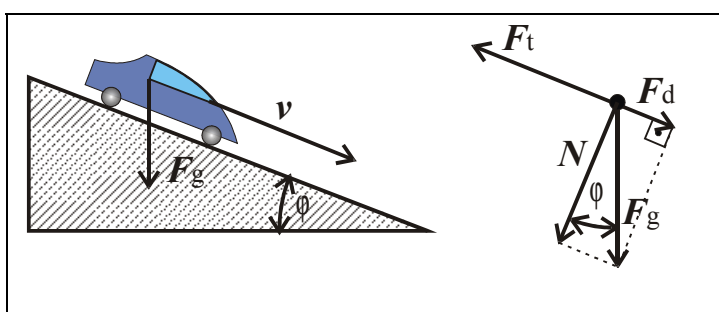
1.



$v = \text{konst.}$,
vozilo je
vlečeno.
 $m = 1,2 \text{ t}$
 $\tan \varphi = 5 \%$
 $v = 72 \text{ km/h}$

$$P_{\text{vlečna}} = ? \quad P_v = F_v v; \quad F_v = ?$$

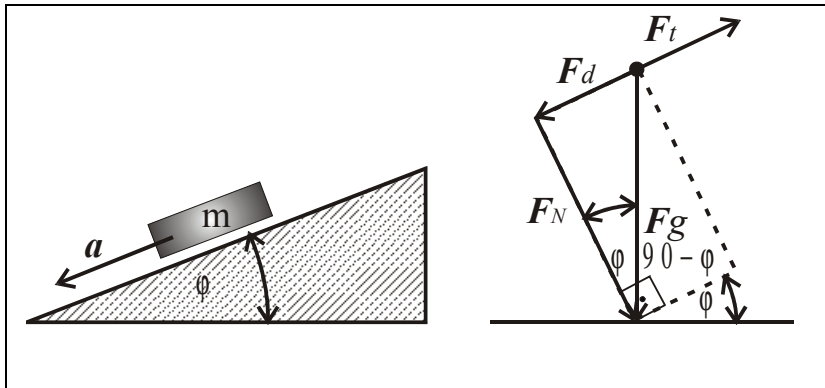
2.



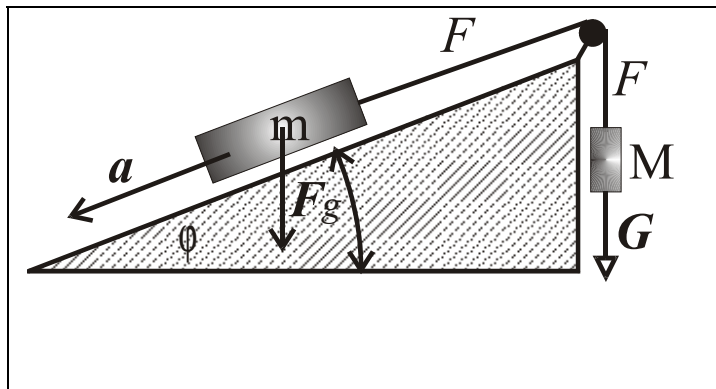
Avto se giblje
navzdol z

enako hitrostjo, kot se je prej navzgor, zato bo k_t enak.
Kolik je k_t ?

3. Kolikšen je k_t , da je pospešek $a = 0$?



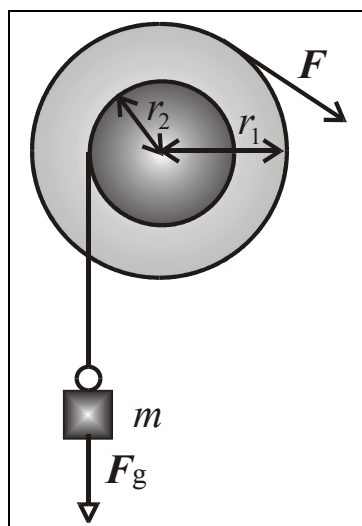
4. Klada



$F = ?$
Zapiši
ravnovesje
sil za klado
 m in za
breme M , pri
čemer se
breme (in

klada) gibljeta s pospeškom a .

5.



Kolikšno breme lahko
dvignemo s silo 50 N?

$$F = 50 \text{ N}$$

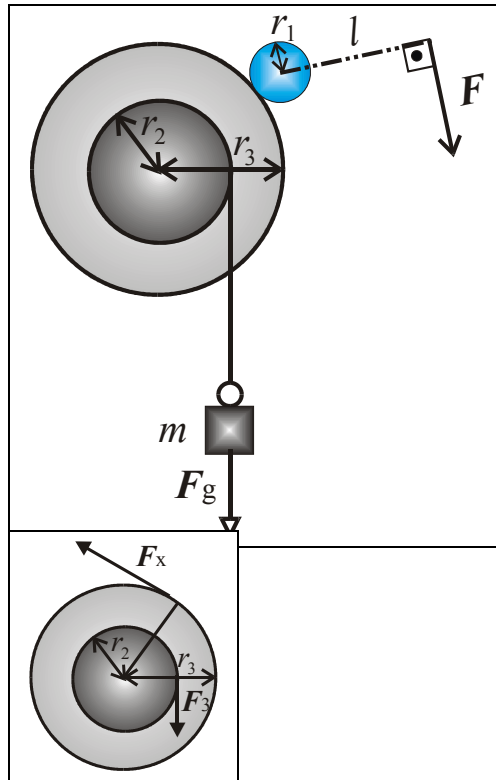
$$r_2 = 20 \text{ cm}$$

$$r_1 = 40 \text{ cm}$$

$$m = ?$$

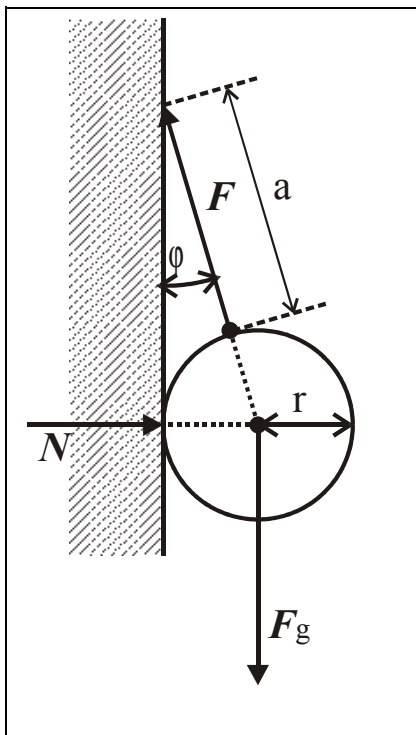
$$\sum_i M_i = 0$$

6.



Dvojni škripec (močno trenje med njima), ali dva mirujoča zobnika
 $F = 50 \text{ N}$, $r_1 = 10 \text{ cm}$,
 $r_2 = 20 \text{ cm}$, $r_3 = 30 \text{ cm}$,
 $l = 40 \text{ cm}$
 $m = ?$

7.



$a = 40 \text{ cm}$
 $m = 5 \text{ kg}$
 $R = 9 \text{ cm}$
 $N = ?$ $F = ?$

- I. Ravnovesje sil
- II. Ravnovesje navorov

II.3 NEENAKOMERNO KROŽENJE

Za vsako kroženje velja: $|\mathbf{r}| = r = \text{konst.}$, $\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{v}(t)$.

Enakomerno kroženje:

jakost obodne hitrosti $|\mathbf{v}| = v = \text{konst.}$,

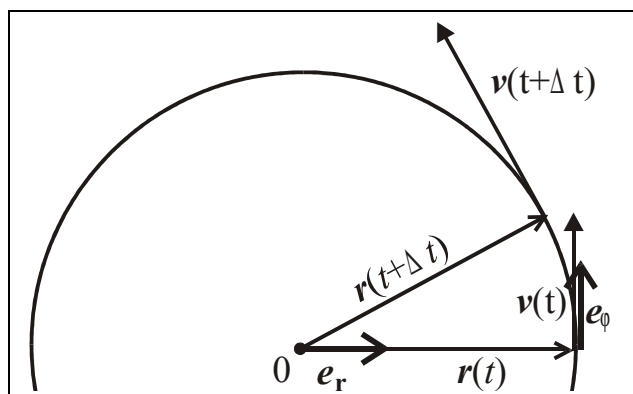
Neenakomerno kroženje: $|\mathbf{v}| = v(t)$ - NI konst., hitrost se s časom spreminja po jakosti in po smeri. Vendar še vedno velja, da ima hitrost \mathbf{v} smer tangente na krožnico in da je \perp na \mathbf{r} . Zato $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_t = r\omega \mathbf{e}_\varphi$; $v = r\omega$.

Pospešek

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_r + \Delta \mathbf{v}_t$$

$\Delta \mathbf{v}_r$ – radialna sprememba hitrosti, kot pri enakomernem kroženju,

$\Delta \mathbf{v}_t$ – tangencialna sprememba hitrosti, le pri *neenakomernem* kroženju.



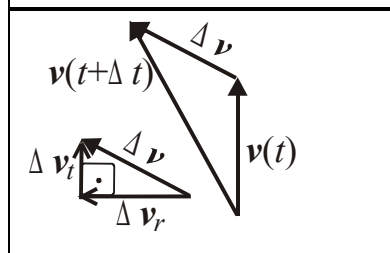
$\Delta \mathbf{v}_r \uparrow \downarrow \mathbf{r}, \mathbf{e}_r$:

$$\Delta \mathbf{v}_r = -v\Delta\varphi \mathbf{e}_r$$

$\Delta \mathbf{v}_t \uparrow \uparrow \mathbf{v}, \mathbf{e}_\varphi$:

$$\Delta \mathbf{v}_t = \Delta v_t \mathbf{e}_\varphi$$

$$\Delta \mathbf{v} = -v\Delta\varphi \mathbf{e}_r + \Delta v_t \mathbf{e}_\varphi \Rightarrow$$



$$\frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = -\frac{v\Delta\varphi}{\Delta t} \mathbf{e}_r + \frac{\Delta v_t}{\Delta t} \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v\Delta\varphi}{\Delta t} \mathbf{e}_r + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t} \mathbf{e}_\varphi = -v\omega \mathbf{e}_r + \frac{dv_t}{dt} \mathbf{e}_\varphi,$$

$v = v_t = r\omega$, ker je $r = \text{konst.} \Rightarrow$

$dv/dt = r d\omega/dt$, kjer je kotna hitrost $\omega = d\varphi/dt$ [rad/s].

$$\mathbf{a}(t) = -v\omega \mathbf{e}_r + \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_\varphi = -v\omega \mathbf{e}_r + r \frac{d\omega}{dt} \mathbf{e}_\varphi,$$

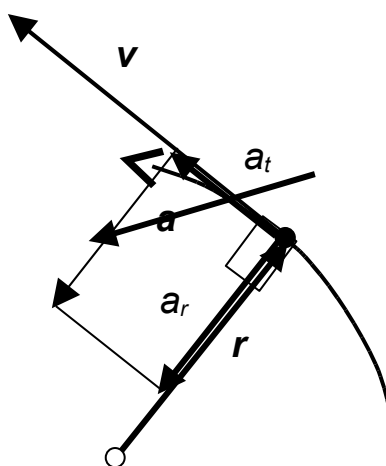
rad. posp. tang. posp.

Vpeljemo kotni pospešek $\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$, *tangencialni* ali obodni pospešek je tedaj $a_t = r\alpha$, celotni pospešek pa:

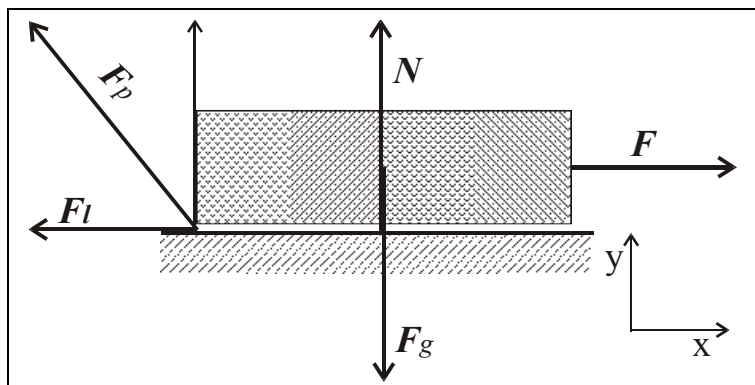
$$\mathbf{a}(t) = -r\omega^2 \mathbf{e}_r + r\alpha \mathbf{e}_\varphi = -a_c \mathbf{e}_r + a_t \mathbf{e}_\varphi,$$

kjer je radialni ali centripetalni pospešek: $a_c = r\omega^2$,
tangencialni ali obodni pospešek: $a_t = r\alpha$,
jakost celotnega pospeška pa je

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}.$$



III. Trenje in lepenje



I. Telo miruje, čeprav delujemo nanj z vlečno silo F .

1. Newtonov zakon: $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$

$$\mathbf{N} + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_l + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

\mathbf{N} – normalna sila podlage, ki uravnovesi silo teže \mathbf{F}_g
 \mathbf{F}_l – sila lepenja, s katero podlaga deluje zaviralno na telo in uravnoveša vlečno silo. Komponentni zapis ravnovesja sil:

$$x: \quad -F_l + F = 0; \quad y: \quad N - F_g = 0.$$

Telo miruje, četudi povečujemo vlečno silo, in s tem tudi silo lepenja, vse dokler je jakost obeh sil manjša od mejne vrednosti

$$F = F_l \leq k_l N,$$

ki je sorazmerna normalni sili podlage N , sorazmer. koeficient k_l pa je koeficient lepenja. Celotna sila podlage \mathbf{F}_p je vektorska vsota sil \mathbf{F}_l in \mathbf{N} :

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_l + \mathbf{N}$$

II. Telo enakomerno drsi po podlagi, zopet velja

$$\sum_i F_i = \mathbf{0},$$

le da tokrat namesto silo lepenja nadomesti sila trenja,

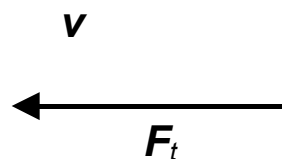
$$x: \quad -F_t + F = 0; \quad y: \quad N - F_g = 0,$$

za silo trenja pa velja, da je sorazmerna normalni sili podlage

$$F_t = k_t N,$$

kjer nastopa koeficient trenja, ki je manjši od koeficienta lepenja k_l :

stična ploskev	k_t	k_l
voda-led	0,02	
kamen-les	0,4	
železo-železo	0,57	0,74
steklo-steklo	0,4	0,94
baker-steklo	0,53	0,68



Sila trenja je vedno zaviralna, deluje v nasprotni smeri gibanja telesa.

$$k_t < k_l$$

k_t, k_l sta f(materiala stične ploskve), k_t pa še f(hitrosti telesa), n f(velikosti stične površine).

IV. Sistemska vztrajnostna sila

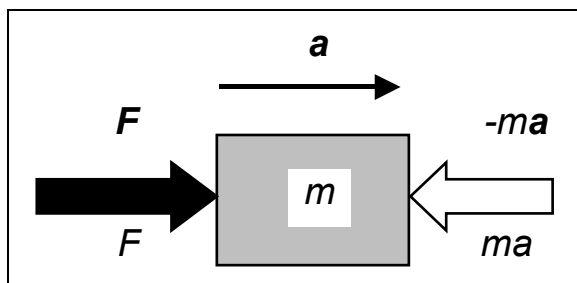
2. Newton. zakon: $F = \sum_j F_j = ma$

kjer je a pospešek, velja le v *inercialnem* ali nepospešenem koordinatnem sistemu. V njem seveda opazujemo tudi telesa, ki se pospešeno gibljejo.

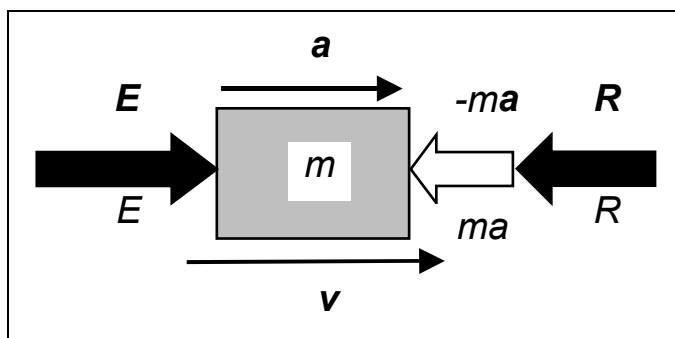
D'Alembertovo načelo: sistemu dejanskih (zunanjih) sil, ki delujejo na opazovano telo, lahko dodamo **vztrajnostno ali inercialno silo**: $F_i = -ma$

Ko to silo dodamo, dobimo iz 2. Newton. zakona za opazovano telo, ki se giblje pospešeno, da so zanj vse sile (ne samo zunanje) v ravnovesju:

$$F + (-ma) = F + F_i = 0.$$



Na tak način se približamo obravnavanju v statiki, čeprav se telo giblje pospešeno. Inercialna, vztrajnostna, efektivna ali reverzna sila je vedno usmerjena v nasprotni smeri pospeška telesa.



Delujoča sila E ('effort'), ki premag. silo upora ali trenja R (reakcij. sila) in hkrati zagotavlja pospešek a telesu:

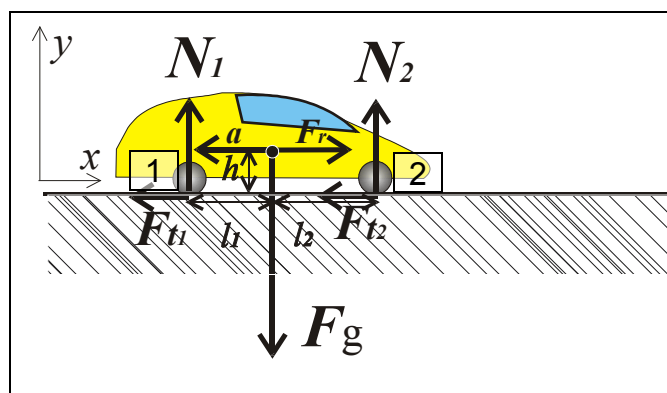
$$ma = E - R \Rightarrow E = ma + R.$$

Pospeševalna sila je $F = ma = E - R$.

Aktivne in reakcijske sile:

- aktivne: lahko **povzročijo spremembo gibanja opazovanega telesa** ali sistema
- reakcijske sile: **ne morejo vplivati na spremembo gibanja**. Sem sodijo reakcije podlage, na katerih se nahaja breme, reakcija zgloba (ležaja), vztrajnostna sila, pa tudi nekatere sile trenja.

PRIMER



Vozilo zavira

$$m = 1400 \text{ kg}$$

$$l_1 = 1,3 \text{ m}; l_2 = 1,7 \text{ m}$$

$$h = 0,5 \text{ m}$$

$$v_1 = 72 \text{ km/h},$$

$$v_2 = 57,6 \text{ km/h na}$$

$$\text{razdalji } s = 200 \text{ m.}$$

$$N_1 = ? \quad N_2 = ?$$

pojemek (negativen pospešek) v smeri $-x$ povzročita sili trenja:

$$x: \quad ma = F_{t1} + F_{t2}.$$

$$\text{Reakcijska sila trenja:} \quad F_r = -ma$$

$$y: \quad N_1 + N_2 = F_g$$

Enakomerno pojemajoče gibanje: $v_2 = v_1 + at$; $a < 0$, $F_r > 0$

$$\Rightarrow \quad t = (v_2 - v_1)/a$$

$$s = v_1 t + at^2/2 = v_1 (v_2 - v_1)/a + (v_2 - v_1)^2/(2a)$$

$$s = (v_2^2 - v_1^2)/(2a) \Rightarrow a = (v_2^2 - v_1^2)/(2s). \quad \text{Navora v točkah}$$

1 in 2: (veljati mora $N_1 + N_2 = F_g$)

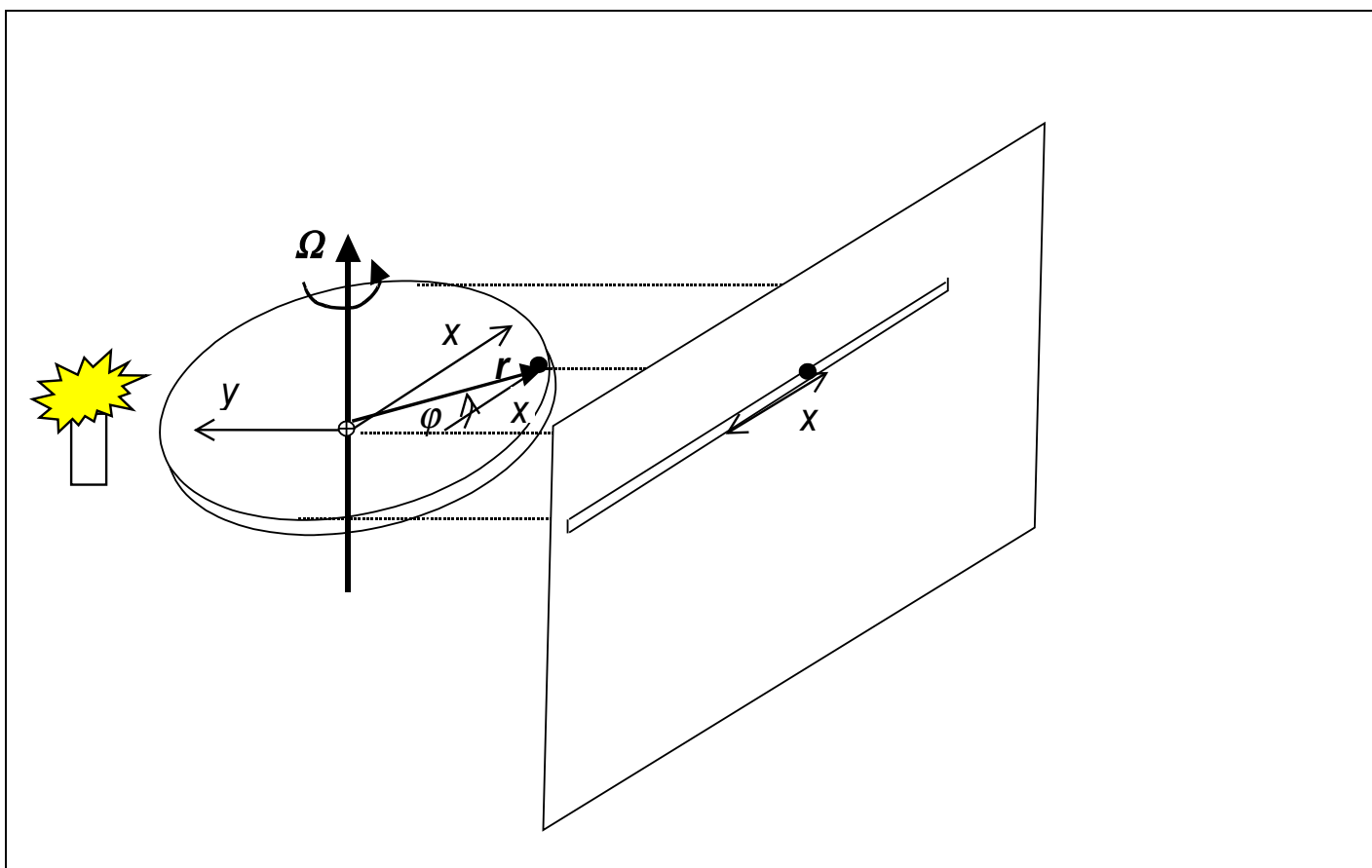
$$F_g l_1 - N_2(l_1 + l_2) + F_r h = 0 \Rightarrow N_2 = (F_g l_1 + F_r h)/(l_1 + l_2)$$

$$-F_g l_2 + N_1(l_1 + l_2) + F_r h = 0 \Rightarrow N_1 = (F_g l_2 - F_r h)/(l_1 + l_2)$$

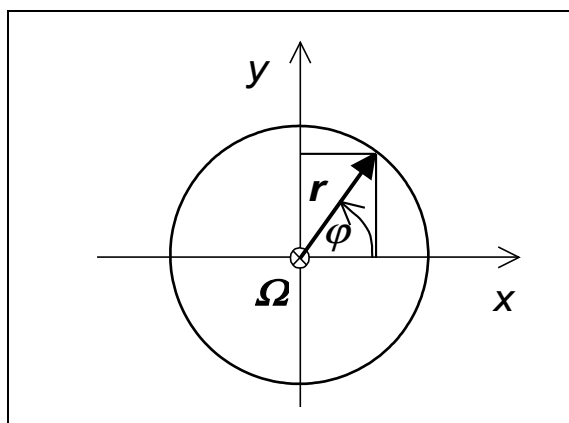
V. NIHANJE

V.1 KINEMATIKA NIHANJA

Nihanje si predstavljamo kot 2D projekcijo kroženja na premico v ravnini, ki je pravokotna na ravnino kroženja masne točke:



Naj je v trenutku $t = 0$ kot, ki ga točka oklepa z x -osjo $\varphi = 0$
Kot $\varphi = \Omega t$, kjer naj je Ω stalna kotna hitrost kroženja
masne točke.



$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi.$$

Parametrični zapis kroženja, parameter je čas t:

$$x = r \cos(\Omega t); \quad y = r \sin(\Omega t)$$

x – odmik točke od centra

implicitni zapis kroženja:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

eksplicitni zapis:

$$y = \pm (r^2 - x^2)^{1/2}$$

Obodna hitrost kroženja:

$$v = r\Omega$$

$$x(t) = r \cos(\Omega t);$$

$$v_x = dx/dt \Rightarrow$$

$$v_x = r\Omega (-\sin(\Omega t)) = -r\Omega \sin(\Omega t);$$

$$y(t) = r \sin(\Omega t);$$

$$v_y = dy/dt \Rightarrow$$

$$v_y = r\Omega \cos(\Omega t);$$

$$(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = v = r\Omega$$

$$a_x = dv_x/dt \Rightarrow a_x(t) = -r\Omega^2 \cos(\Omega t) = -\Omega^2 x$$

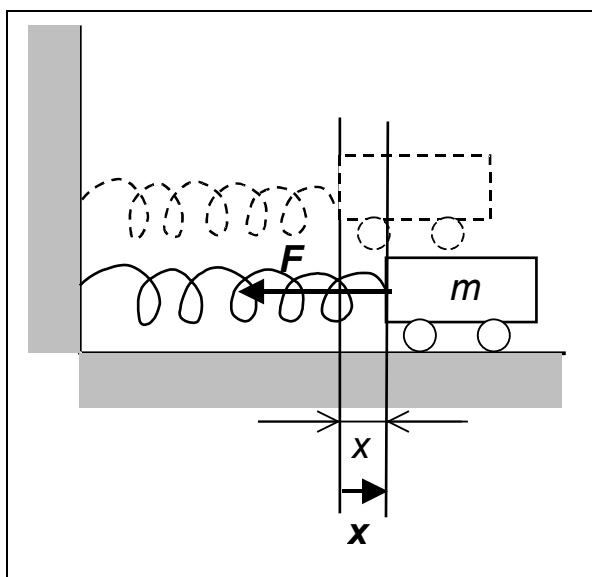
$$a_y = dv_y/dt \Rightarrow a_y(t) = -r\Omega^2 \sin(\Omega t) = -\Omega^2 y$$

$$a_x \propto -x, \text{ če } x > 0 \Rightarrow a_x < 0; \quad a_y \propto -y, \text{ če } y > 0 \Rightarrow a_y < 0.$$

2. Newton. z.: če obstaja $a_x \Rightarrow$ obstaja $F_x = ma_x$,

$F_x = -m\Omega^2 x$; podobno obstaja $F_y = -m\Omega^2 y$, torej je celotna sila $F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = m\Omega^2(x^2 + y^2)^{1/2} = m\Omega^2 r^2 =$ centripetalna sila pri kroženju.

V.2 DINAMIKA NIHANJA



Voziček naj se giblje brez trenja, sila vzmeti ga vleče vedno nazaj proti ravnovesni legi, v kateri se voziček tudi umiri po iznihavanju. Sila vzmeti je *povratna sila*: $\mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{x}$. Take vrste sila je potrebna pri vsakem nihanju.

V prvem približku predpostavimo, da nihanje *ni* dušeno.

2. N. z.: $F = ma$; Hookov z.: $F = -kx$ ($\mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{x}$) \Rightarrow
(k je konstanta vzmeti)

$$ma = -kx,$$

$$a = dv/dt = d^2x/dt^2,$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \left(\frac{k}{m} \right) x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \text{ vpeljemo konstanto:}$$

$k/m = \omega^2$ in dobimo diferencialno enačbo drugega reda (vsebuje drugi odvod) za lastno nihanje:

$$\omega^2 x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Ta enačba ima splošno rešitev sestavljeno iz sinusnih in kosinusnih funkcij:

$$x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t);$$

$$dx/dt = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t);$$

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] = -\omega^2 x,$$

zato tudi dobimo izpolnjeno diferencialno enačbo, ko rešitev vstavimo v njo:

$\omega^2 x - \omega^2 x = 0$ za vsako rešitev $x(t)$ (za vsak trenutek t).

Tako spoznamo, da je *krožilna frekvenca* $\omega = (k/m)^{1/2}$. Ta je tem manjša, večja je masa telesa, ki niha in je tem večja, bolj ko je vzmet 'trda'.

Konstanti A in B določimo iz začetnih pogojev (začetnega odmika od ravnovesne lege in začetne hitrosti telesa, ki niha).

1. Naj je v $t = 0$ odmik $x = x_0$ in hitrost $v = 0 \Rightarrow$

$$x(t=0) = A \cos 0 + B \sin 0 = A = x_0;$$

$$v(t=0) = dx/dt_{t=0} = -A\omega \sin 0 + B\omega \cos 0 = B\omega = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Tako postane rešitev določena kot:

$$x = x_0 \cos(\omega t), \text{ iz nje pa sledi}$$

$$v = -x_0 \omega \sin(\omega t)$$

2. Če pa je v $t = 0$ odmik $x = 0$ in hitrost $v = v_0 \Rightarrow$

$$x(t=0) = A \cos 0 + B \sin 0 = A = 0;$$

$$v(t=0) = dx/dt_{t=0} = -A\omega \sin 0 + B\omega \cos 0 = B\omega = v_0 \Rightarrow$$

$B = v_0/\omega$. Rešitev:

$$x = -(v_0/\omega) \sin(\omega t), \text{ od kod sledi } v = v_0 \cos(\omega t).$$

DN 1: Zapiši pospešek v obeh primerih.

DN 2: Določi konstanti A in B, če je odmik v $t = 0$ enak $x_0/2$ in hitrost enaka $x_0\omega/4$. Zapiši enačbe odmika, hitrosti in pospeška.

V.3 NUMERIČNO REŠEVANJE ENAČBE ZA NIHANJE V EXCELU

Uvedemo oznake $x' = dx/dt$, $x'' = d^2x/dt^2$ in zapišemo enačbo za lastno nedušeno nihanje:

$$\omega^2 x + x'' = 0,$$

kjer je ω krožilna frekvenca ($\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, kjer je ν frekvenca nihanja in $T = 1/\nu$ njegova perioda). Nihanje, ki je opisano z diferencialno enačbo drugega reda (v njej nastopa drugi odvod), zapišemo kot sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda, ki je lažje numerično rešljiv. Poleg enačbe za odmik vpeljemo v sistem še enačbo za hitrost v ($= x' = dx/dt$) nihajočega delca:

$$\begin{aligned}x' &= v, \\v' &= -\omega^2 x.\end{aligned}$$

Druga enačba sledi iz prvotne enačbe za nihanje. Ta sistem dveh diferencialnih enačb prvega je zato popolnoma ekvivalenten prejšnji enačbi drugega reda.

Numeričen približek diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}v &= \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}, \\v' &= \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t},\end{aligned}$$

zapišemo diferencialni enačbi z diferenčnimi približki:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx v,$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx -\omega^2 x.$$

To je sistem približnih enačb, ki ga lahko rešujemo v programu, kot je Excel. Zato zapišimo še kaj pomenijo difference:

$\Delta x = x_{n+1} - x_n$, kjer sta $x_n = x(t_n)$ in $x_{n+1} = x(t_{n+1})$,
pri čemer se trenutka t_n in t_{n+1} naj razlikujeta za majhen časovni interval: $t_{n+1} - t_n = \Delta t$. Podobno velja
 $\Delta v = v_{n+1} - v_n$, kjer $v_n = v(t_n)$ in $v_{n+1} = v(t_{n+1})$.

Tako dobimo enačbi:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \approx v_n, \quad \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \approx -\omega^2 x_n,$$

ki ju zapišemo v eksplicitni obliki: količine v novem trenutku so na levi strani enačbe. Te se izražajo s količinami v prejšnjih trenutkih, ki so na desni strani enačbe. Približni enačaj kar nadomestimo z enačajem, pri čemer se zavedamo, da gre za približen račun:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n, \quad v_{n+1} = v_n - \Delta t \omega^2 x_n.$$

S postopkom zaporednih izračunov lahko pričnemo, če poznamo začetni vrednosti za odmik $x_0 = x(t_0)$ in hitrost $v = v(t_0)$, kjer naj je začetni čas $t_0 = 0$. Zgornji zapis za numeričen izračun sledi najenostavnejši Eulerjevi metodi za reševanje diferencialnih enačb.

Naj sta začetna pogoja za nihanje:

$$x_0 = 1 \text{ m}, \quad v_0 = 0 \text{ m/s.}$$

Perioda nihanja naj bo $T = 1 \text{ s}$ ($\nu = 1/T = 1/\text{s}$, $\omega = 2\pi \nu = 2\pi/\text{s}$). Zato, da bodo diferenčni približki za odvode zadovoljivi, moramo izbrati časovni korak $\Delta t \ll T$. Naj je zato $\Delta t = 0,01 \text{ s}$. Naj čas teče v intervalu ene periode $t \in [0, 1] \text{ s}$ po korakih Δt .

Natančnost numerične rešitve bomo ocenili s primerjavo z točno analitično rešitvijo. Pri navedenih začetnih pogojih je točna rešitev:

$$x = x_0 \cos(\omega t),$$

$$v = -x_0 \omega \sin(\omega t) = -v_0 \sin(\omega t),$$

kjer je amplituda hitrosti $v_0 = x_0 \omega = 2\pi \text{ m/s}$.

Excel tabela:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	X0(m)	V0(m/s)	omega(/s)	delta_t(s)	cas(t)	X(m)	V(m/s)	Xtocno(m)	Vtocno(m)
1									
2	1	0	6.283185	0.01	0	1	0	1	0
3					0.01	0.998156	-0.39478	0.998027	-0.39478
4					0.02	0.996052	-0.78957	0.992115	-0.78957
5					0.03	0.988156	-1.18279	0.982287	-1.18279
6					0.04	0.976329	-1.5729	0.968583	-1.5729
7					0.05	0.9606	-1.95834	0.951057	-1.95834
8					0.06	0.941016	-2.33757	0.929776	-2.33757
9					0.07	0.91764	-2.70907	0.904827	-2.70907
10					0.08	0.89055	-3.07134	0.876307	-3.07134
11					0.09	0.859836	-3.42291	0.844328	-3.42291
12					0.1	0.825607	-3.76236	0.809017	-3.76236
13									
14									
15									
16									

V.4 POVEZAVA MED KOLIČINAMI PRI NIHANJU

I. Odmik, pospešek, frekvenca in perioda

Iz enačbe za lastno nedušeno nihanje

$$\omega^2 x + d^2x/dt^2 = 0,$$

kjer je pospešek $a = d^2x/dt^2 = x''$ sledi, da je pospešek pri nihanju $a = -\omega^2 x$. Za jakost pospeška vzemimo le pozitivne (absolutne) vrednosti, brez dodatnih oznak

$$a = \omega^2 x,$$

zato od tod lahko izrazimo krožilno frekvenco, frekvenco in periodo nihanja kot funkcije pospeška in odmika od ravnovesne lege:

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\text{pospešek}}{\text{odmik}}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{x}{a}} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{odmik}}{\text{pospešek}}}.$$

II. Odmik in hitrost pri nihanju

Naj je odmik pri nihanju podan kot $x = x_0 \cos(\omega t)$. Ker je hitrost časovni odvod odmika $v = x' = dx/dt$, je

$$v = -x_0 \omega \sin(\omega t) = -v_0 \sin(\omega t),$$

kjer je amplituda hitrosti podana z amplitudo odmika in krožilno frekvenco: $v_0 = x_0 \omega$. Ker pa velja, da je

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1, \text{ (od kod to sledi?)}$$

izrazimo $\sin(\omega t) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)}$, tako da je

$$v = -x_0 \omega \sin(\omega t) = \pm x_0 \omega \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)} = \pm \omega \sqrt{x_0^2 - x_0^2 \cos^2(\omega t)}$$

$$v = \pm \omega \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

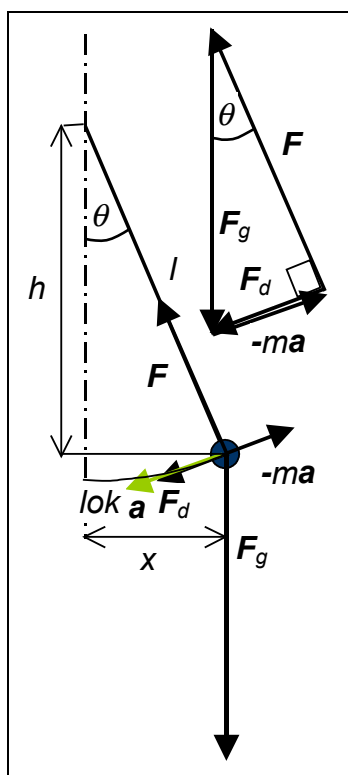
Kadar nas zanima hitrost pri nihanju zgolj po jakosti in ne tudi po smeri (predznaku), jo izračunamo iz krožilne frekvence, amplitude odmika in odmika:

$$v = \omega \sqrt{x_0^2 - x^2}.$$

Za pospešek pri nihanju pa amplituda odmika ni potrebna:

$$a = \omega^2 x.$$

V.5 ENOSTAVNO NIHALO



Masna točka m je pritrjena na lahek drog dolžine l , ali pa visi na napeti nitki. F je sila vrvice na maso, $F \perp F_d$, $F_d = F_g \sin \theta$.

Enačba gibanja:

$$ma = F_d = mg \sin \theta \Rightarrow a = g \sin \theta.$$

Velja $\sin \theta = x/l$.

Ker velja, da je $lok = r\theta \Rightarrow \theta = lok/r$ in ker je za majhne kote $\sin \theta \cong \theta \Rightarrow$

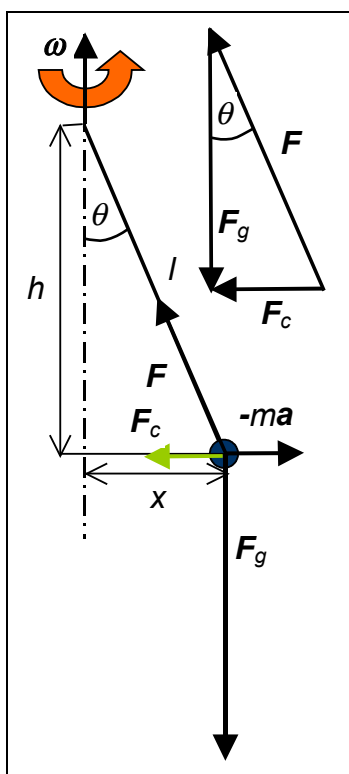
$\sin \theta = x/l \cong lok/l$, zato

$a = g \sin \theta = g x/l \cong g lok/l$, po smeri pa sta odmik in pospešek skorajda nasprotna. Ker pri nihanju velja

$$a = \omega^2 x = x g/l \Rightarrow \omega^2 = g/l \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

V.6 KROŽEČE GIBANJE NIHALA



Navadno nihalo kroži s krožilno frekvenco ω . Na masno točko deluje centripetalna sila $F_c = ma_c = m \times \omega^2$, ki je usmerjena vodoravno, vedno proti osi vrtenja (središču kroženja). Vztrajnosna sila (centrifugalna), $-ma$ pa je usmerjena navzven, proč od osi. Kroženje je pospešeno gibanje. Centripetalna sila zagotavlja horizontalno komponento sile v vrvi. Slednja je po jakosti enaka: $F = (F_g^2 + F_c^2)^{1/2}$. Iz geometrije problema sledi: $\tan\theta = x/h = F_c/F_g = x \omega^2/g$. Za majhne odklone od vertikale je

$\tan\theta \cong \sin\theta = x/l$. Za razmerje F_c/F_g torej velja:

$x \omega^2/g \cong x/l \Rightarrow$ krožilna frekvenca, frekvenca in perioda kroženja nihala postanejo:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

kar so enaki izrazi kot pri nihanju nihala. Vendar se moramo zavedati, da če bi vrteli nihalo s krožilno frekvenco manjša od te vrednosti, se nihalo sploh ne bi odklonilo, če pa z večjo frekvenco od te mejne, pa bi se kroglica nihala pričela dvigati in bi za tem opisovala stožec. Če je $\omega \gg (g/l)^{1/2}$, tedaj odmik od ravnovesne lege ni več majhen in velja

$$x/h = x \omega^2/g \Rightarrow h = g/\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}},$$

kjer nastopa 'višina' h namesto dolžine l nihala.

V.7 NIHANJE - VAJE**Seminarska naloga**

I. za numerični izračun enačbe nihanja

$$\omega^2 x + x'' = 0,$$

s pomočjo diferenčnih enačb prvega reda po Eulerjevi metodi:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n, \quad v_{n+1} = v_n - \Delta t \omega^2 x_n$$

Uporabi v Excel programu namesto $\Delta t = 0,01$ s dva druga koraka:

a) $\Delta t = 0,1$ s

b) $\Delta t = 0,001$ s.

V obeh primerih čas t teče v korakih Δt v intervalu $[0, 1]$, kjer je $t_n = n\Delta t$, kjer je $n = 0, 1, 2, \dots$

Primerjaj rezultate v vseh korakih Δt tako, da narišeš diagram razlike med numerično rešitvijo in pravo, analitično rešitvijo za vsak trenutek t_n , to je

$$x_n - x_0 \cos(\omega t_n).$$

Seminarska naloga

II. Numerično rešuj po Eulerjevi metodi dušeno nihanje, za katerega velja enačba

$$x'' + \gamma x' + \omega^2 x = 0,$$

kjer je faktor dušenja $\gamma = 0.1/s$.

Uporabi ekvivalenten sistem enačb

$$x'' = v' = -\gamma x' - \omega^2 x \text{ in } x' = v,$$

ki ga rešuješ po postopku:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n, \quad v_{n+1} = v_n(1 - \gamma\Delta t) - \Delta t \omega^2 x_n.$$

Seminarska naloga

III. Numerično rešuj po Eulerjevi metodi vsiljeno dušeno nihanje, za katerega velja enačba

$$x'' + \gamma x' + \omega^2 x = F(t),$$

a) kjer je $F = \text{konst.} = 2 \text{ m/s}^2$

b) $F(t) = A \cos(\Omega t)$, kjer je $A = 0.3 \text{ m}$ in $\Omega = \pi / \text{s}$

IV. Analitična rešitev za dušeno nihanje je:

$$x = x_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega t) + x_2 e^{-\alpha t} \sin(\omega t),$$

kjer naj so konstante $x_1 = 0,5 \text{ m}$, $x_2 = 0,2 \text{ m}$, $\alpha = 0,1/\text{s}$ in $\omega = 2 \pi/\text{s}$. Koliki so odmik x , hitrost $v = dx/dt$ in pospešek $a = dv/dt$ nihajočega telesa po času $t = 2 \text{ s}$?

VI. Gibalna količina

Naj se telo mase m giblje le premočrtno, nanj deluje v času t povprečna zunanja sila F . zaradi delovanja sile se spremeni hitrost težišča telesa od v_0 do v . Povprečen pospešek a je:

$$a = \frac{(v - v_0)}{t}.$$

2. Newton. zakon se tako zapiše:

$$F = ma = m \frac{(v - v_0)}{t},$$

tega množimo s časom, v katerem je delovala povprečna sila in dobimo

$$Ft = mv - mv_0 = G - G_0,$$

kjer je vpeljana gibalna količina $G = mv$, ki je zgolj hitrost množena z maso. Produkt Ft se imenuje *impulz sile*, ali *sunek sile*. Zgornja enačba pove, da je sprememba gibalne količine enaka sunku sile. Če sunka sile ni, se gibalna količina ohranja:

$$mv = mv_0,$$

kar imenujemo *izrek o ohranitvi gibalne količine*.

Če pri poljubnem gibanju telesa v *prostoru* deluje v času t povprečna zunanja sila F , se zaradi delovanja sile spremeni hitrost težišča telesa od v_0 do v . Povprečen pospešek a

$$a = \frac{(v - v_0)}{t},$$

Newtonov zakon in sprememba gibalne količine v vektorski obliki:

$$F = ma = m \frac{(v - v_0)}{t}$$

$$Ft = mv - mv_0 = G - G_0,$$

kar lahko zapišemo komponentno pri gibanju telesa v ravnini:

$$(F_x, F_y)t = m(v_x, v_y) - m(v_{x0}, v_{y0}) = (G_x, G_y) - (G_{x0}, G_{y0})$$

ali za vsako komponento posebej:

$$x: \quad F_x t = mv_x - mv_{x0} = G_x - G_{x0}$$

$$y: \quad F_y t = mv_y - mv_{y0} = G_y - G_{y0}.$$

Če je v časovnem intervalu t , v katerem se je zgodila sprememba hitrosti telesa, delovala nanj časovno spremenljiva sila, potem se spomnimo, kako se povprečna sila izračuna:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{t} \sum_i F_i \Delta t,$$

če se ta zvezno spreminja s časom, je potrebno narediti zelo gosto vsoto, zmanjšati Δt :

$$\langle F \rangle = \frac{1}{t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i F_i \Delta t = \frac{1}{t} \int_0^t F dt,$$

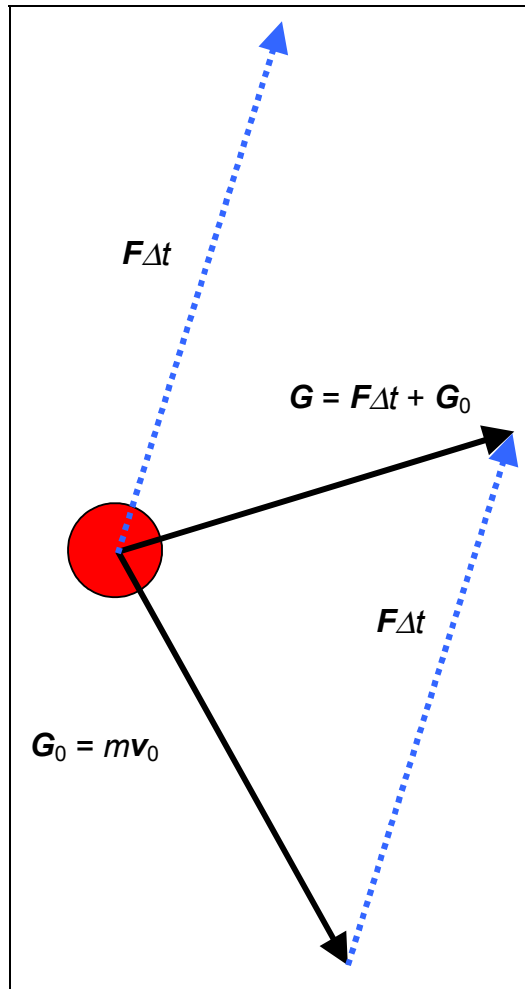
V izrazu za spremembo gibalne količine nadomestimo Ft z $\langle F \rangle t$, tega pa izrazimo z integralom:

$$\int_0^t F dt = mv - mv_0 = G - G_0.$$

Izraz za spremembo gibalne količine je splošnejši od 2. Newtonovega zakona, saj velja tudi v primeru, če se masa telesa, ki ga opazujemo, ne ohranja.

Primer spremembe gibalne količine

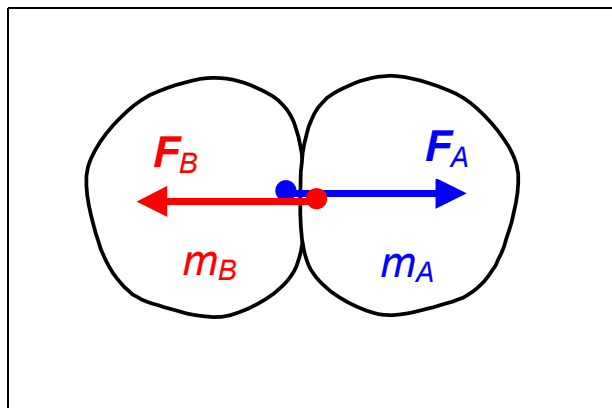
I. Premo gibanje telesa



čas delovanja sile naj je Δt , zato se sprememba gibalne količine zapiše:

$$F\Delta t = G - G_0 = mv - mv_0.$$

VII. TRKI (BINARNI)



Naj telo B , ki ima maso m_B in začetno hitrost \mathbf{v}_{B1} deluje v obdobju stika (trka) s silo \mathbf{F}_A na drugo telo mase m_A , ki ima začetno hitrost \mathbf{v}_{A1} . Torej deluje telo B na telo A s sunkom sile:

$$\mathbf{S}_A = \int_0^t \mathbf{F}_A dt,$$

zato po izreku o spremembi gibalne količine telo B povzroči spremembo gibalne količine telesu A :

$$\int_0^t \mathbf{F}_A dt = m_A (\mathbf{v}_{A2} - \mathbf{v}_{A1}).$$

Telo A pa deluje na telo B s sunkom sile:

$$\mathbf{S}_B = \int_0^t \mathbf{F}_B dt$$

in povzroči spremembo gibalne količine telesu B

$$\int_0^t \mathbf{F}_B dt = m_B (\mathbf{v}_{B2} - \mathbf{v}_{B1}).$$

Po 3. Newton. zakonu: $\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B$, zato je

$$\mathbf{S}_B = \int_0^t \mathbf{F}_B dt = -\int_0^t \mathbf{F}_A dt = -\mathbf{S}_A.$$

Združimo enačbi za spremembo gibalnih količin obeh teles:

$$\mathbf{S}_B = m_B (\mathbf{v}_{B2} - \mathbf{v}_{B1}) = -\mathbf{S}_A = -m_A (\mathbf{v}_{A2} - \mathbf{v}_{A1}),$$

v tej enačbi lahko pozabimo na sunke sil in zapišemo izrek o ohranitvi gibalne količine:

$$m_A \mathbf{v}_{A1} + m_B \mathbf{v}_{B1} = m_A \mathbf{v}_{A2} + m_B \mathbf{v}_{B2} = \text{konst.},$$

ki pravi: skupna gibalna količina vseh teles pred trkom je enaka skupni gibalni količini vseh teles po trku.

Ohranitev gibalne količine vseh teles, ki so udeležena pri trku velja za vsako vrsto trka, tako za prožne, kot za neprožne trke. Med trkom delujejo močne notranje sile med telesi, ki trčijo. Za spremembo gibalne količine sistema vseh teles pa so potrebne zunanje sile, kot je potrebna zunanja sila, da telo dobi pospešek. Za trk v 2D ravnini ta izrek o ohranitvi gibalne količine vseh teles pri trku pomeni dve enačbi:

$$\begin{aligned} x: & \quad m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} \\ y: & \quad m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}. \end{aligned}$$

VII.1 IDEALEN PROŽNI TRK

Pri prožnem trku teles se poleg skupne gibalne količine ohranja tudi kinetična energija. za sistem dveh teles A in B to pomeni:

$$W_{kA1} + W_{kB1} = W_{kA2} + W_{kB2},$$

ali

$$m_A \frac{v_{A1}^2}{2} + m_B \frac{v_{B1}^2}{2} = m_A \frac{v_{A2}^2}{2} + m_B \frac{v_{B2}^2}{2},$$

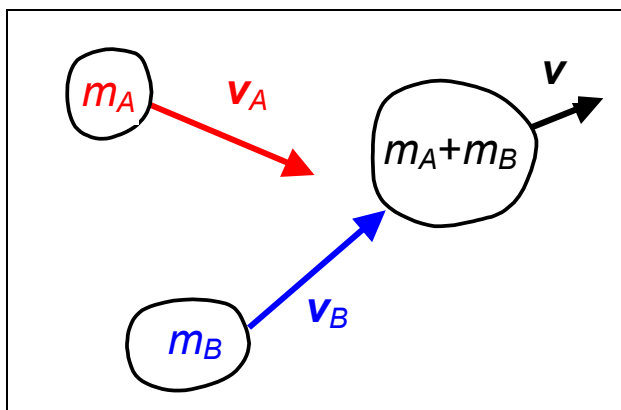
poleg ohranitve skupne kinetične energije pa se seveda ohranja tudi gibalna količina.

VII.2 NEPROŽNI TRK

Pri tem se skupna kinetična energija teles, ki so udeležena pri trku, ne ohranja. Del začetne kinetične energije se porabi za notranjo energijo in tudi za deformacijsko energijo, zato: $W_{k2} < W_{k1}$, kjer je W_{k1} začetna kinetična energija, W_{k2} pa končna skupna kinetična energija teles po trku. Velja:

$$W_{k2} - W_{k1} = W_{notranja} - W_{deformacija}.$$

1. PRIMER NEPROŽNEGA TRKA DVE MASI GLINE



Dve glini se pri trku sprimeta, ohranja se gibalna količina:

$$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B = (m_A + m_B) \mathbf{v}.$$

Za premi (1D) trk (vzdolž premice) se sistem poenostavi:

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v,$$

od tod pa dobimo hitrost sprijete mase gline:

$$v = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}.$$

Kinetična energija se pri tem trku ne ohranja, deformacijska energija je maksimalna, telesi sta po trku najbolj deformirani, prožnoste energije praktično ni:

$$W_{k1} = m_A \frac{v_A^2}{2} + m_B \frac{v_B^2}{2} = W_{k2} + W_D = m_A \frac{(m_A + m_B) v^2}{2} + W_D,$$

deformacijska energija je enaka razliki med kinetično energijo pred trkom in tisto po trku:

$$W_D = W_{k1} - W_{k2} = m_A \frac{v_A^2}{2} + m_B \frac{v_B^2}{2} - m_A \frac{(m_A + m_B) v^2}{2}.$$

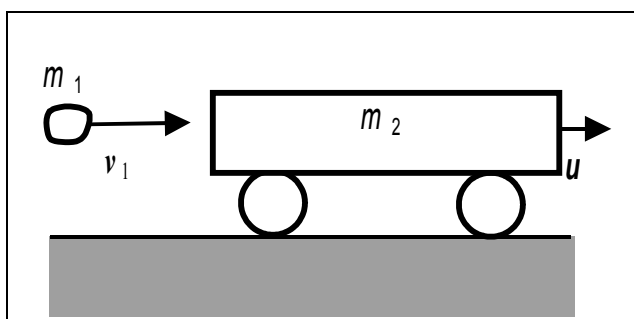
Če telo B pred trkom miruje, je $v_B = 0 \Rightarrow$

$$v = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B},$$

$$W_D = m_A \frac{v_A^2}{2} - m_A \frac{(m_A + m_B)v^2}{2} = m_A \frac{v_A^2}{2} - m_A^2 \frac{v_A^2}{(m_A + m_B)2},$$

$$W_D = \frac{m_A v_A^2}{2} \frac{m_B}{(m_A + m_B)} = W_{k1} \frac{m_B}{(m_A + m_B)}$$

2. PRIMER NEPROŽNEGA TRKA



Kepa gline prileti v voz, ki je miroval. Po sunku se ustavi.

$$m_1 = 12.5 \text{ kg}$$

$$m_2 = 64 \text{ kg}$$

$$v_1 = 12 \text{ m/s}$$

$$s = 100 \text{ m}$$

$$u = ? \quad a = ? \quad F_{\text{zaviral}} = ? \quad A_{\text{zaviralno}} = ?$$

Začetno hitrost vozička in gline, ki se na vozičku obdrži, določimo iz ohranitve gibalne količine pri trku:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u,$$

kjer je $u(0) = u$, začetna hitrost vozička. Po trku naj se voziček giblje enakomerno pojemajoče, ustavi se po času t_0 , ki ga ne poznamo:

$$u(t_0) = 0 = u - a t_0 \Rightarrow u = a t_0 \Rightarrow t_0 = u/a$$

kjer je a pojemek ($a > 0$). Poznamo opravljeno pot, zato jo zapišemo za enakomerno pojemajoče gibanje:

$$s = \langle u \rangle t_0 = [u(t_0) + u(0)]/2 t_0 = u/2 t_0 = (u t_0)/2 = a t_0^2 / 2 \Rightarrow$$

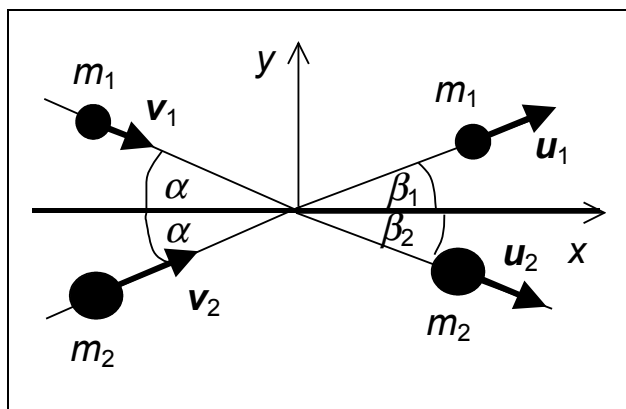
$$s = u^2/(2a) \Rightarrow a = u^2/(2s).$$

$$F_{zav} = (m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2) u^2/(2s),$$

$$A_{zav} = F_{zav} s = W_{kk} = (m_1 + m_2)u^2/2, \quad W_{kz} = m_1 v_1^2/2,$$

$$W_{kk}/W_{kz} = ?$$

3. PRIMER TRKA



Po ledu drsita dve ploščici
 $m_1 = 6 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$,
 obe pod kotom $\alpha = 30^\circ$
 glede na x-os, s
 hitrostima
 $v_1 = 3 \text{ m/s}$, $v_2 = 10 \text{ m/s}$.
 Po trku odleti prva
 ploščica s hitrostjo $u_1 =$

6 m/s pod kotom $\beta_1 = 30^\circ$. Kaj pa druga ploščica?
 $u_2 = ?$ $\beta_2 = ?$

Ohranitev gibalne količine

$$x: \quad m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \alpha = m_1 u_1 \cos \beta_1 + m_2 u_2 \cos \beta_2$$

$$y: \quad -m_1 v_1 \sin \alpha + m_2 v_2 \sin \alpha = m_1 u_1 \sin \beta_1 - m_2 u_2 \sin \beta_2$$

$$x)^2: \quad (m_2 u_2 \cos \beta_2)^2 = [(m_1 v_1 + m_2 v_2) \cos \alpha - m_1 u_1 \cos \beta_1]^2$$

$$y)^2: \quad (m_2 u_2 \sin \beta_2)^2 = [-(m_1 v_1 - m_2 v_2) \sin \alpha + m_1 u_1 \sin \beta_1]^2$$

$$x)^2 + y)^2; \quad \sin^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_2 = 1$$

$$(m_2 u_2)^2 = [(m_1 v_1 + m_2 v_2) \cos \alpha - m_1 u_1 \cos \beta_1]^2 +$$

$$[(m_1 v_1 - m_2 v_2) \sin \alpha + m_1 u_1 \sin \beta_1]^2$$

$$u_2 = \text{D. N.}$$

$$y/x): \quad m_2 u_2 \sin \beta_2 / (m_2 u_2 \cos \beta_2) = \tan \beta_2 = \text{D. N.}$$

D.N. končaj.

4. PRIMER – NEPROŽNI TRK

Svinčeni metek mase $m_1 = 80$ g s hitrostjo 52 m/s trči v svinčeno telo mase $m_2 = 240$ g. Kolika je energija, ki se porabi za deformacijo in za segrevanje, če je trk neprožen? Kolikšno pa je povišanje temperature, če se vsa energija pretvori v toploto? ($c_p = 129,6$ J/(kgK))

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u \Rightarrow$$

$$u =$$

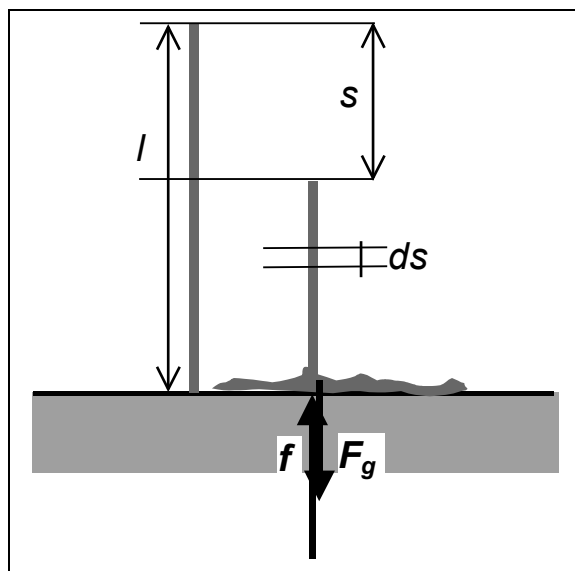
$$W_{kz} = m_1 v_1^2/2, \quad W_{kk} = (m_1 + m_2)u^2/2 =$$

$$W_{kk} - W_{kz} = Q = (m_1 + m_2)c_p \Delta T,$$

$$\Delta W_k = \frac{v_1^2 m_1}{2} \left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right] = (m_1 + m_2) c_p \Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta T = ?$$

5. PRIMER PADAJOČA VERIGA



Verigo spustimo na palubo. S koliko silo deluje na palubo veriga?
 F_g – sila teže padajoče verige

f – sila podlage – ta ni enaka sili teže verige na tleh $\mu = dm/ds$ [kg/m] masa verige na enoto dolžine.

Majhen košček verige z maso $dm = \mu ds$ ima tik

pred padcem na tla največjo hitrost $v = g t$ (prosti pad), v času t se ta delec verige spusti za $s = g t^2/2$, čas iz obeh enačb izločimo $v^2 = 2 g s$. V tem trenutku t je tudi dolžina verige s na tleh, torej se nahaja na tleh masa $m = \mu s$, zato ta del verige na tleh deluje na tla s silo teže:

$$F_g = \mu s g.$$

Košček verige mase dm pred padcem ima hitrost $v = ds/dt$ in zato tudi gibalno količino $dG = dm v = \mu ds ds/dt$.

Sprememba gibalne količine po padcu ($= 0$) glede na tisto pred padcem je enaka sunku sile podlage (hitrost je usmerjena navzdol, zato je z neg. predznakom):

$$0 - \mu ds ds/dt = f dt,$$

ali

$$- \mu (ds/dt)^2 = -\mu v^2 = f,$$

Vendar pa ta enačba ni kompletna, ker ne upošteva, da sila podlage mora uravnovestiti tudi silo teže verige, ki je že na tleh, zato

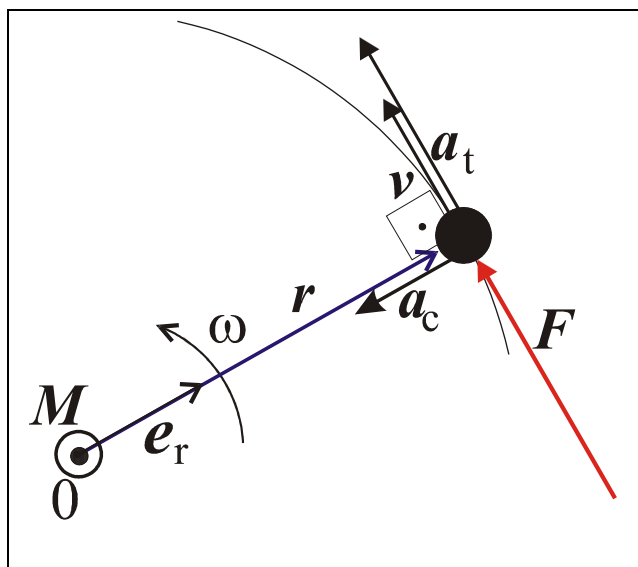
$$- \mu (ds/dt)^2 - F_g = - \mu v^2 - \mu s g = -\mu 2s g - \mu s g = -3\mu s g = f,$$

$$| f | = 3\mu s g = 3 F_g : t = 0, s = 0, f = 0; t = t_{\max} \quad | f | = 3 F_{g\text{tot.}}$$

VIII.VRTILNA KOLIČINA IN VZTRAJNOSTNI MOMENT

VIII.1 NAVOR IN KOTNI POSPEŠEK PRI KROŽENJU TOČKASTEGA TELESA

(Applied Mechanics: Dynamics of a rotating particle)



Zunanja sila F naj deluje na krožeče točkasto telo v tangencialni smeri, stalno spreminja smer, ki je vzporedna hitrosti telesa. Telo naj je pritrjeno s togo palico dolžine r v osišče O in naj okrog njega kroži brez trenja (idealni ležaj). Sila izvaja navor

glede na osišče

$$M = r \times F.$$

Ker je $r(t) \perp v(t)$, je jakost navora

$$M = r F.$$

Tangencialno delujoča sila po 2. Newton. zakonu zagotavlja tangencialni pospešek $a_t = r \alpha$, kjer je α kotni pospešek ($= d\omega/dt$, kjer je ω kotna hitrost). Torej je navor:

$$M = r m a_t = m r^2 \alpha = J \alpha$$

Navor na osišče je sorazmeren kotnemu pospešku krožečega točkastega telesa. Sorazmernostni faktor

$$J = m r^2$$

imenujemo *vztrajnostni moment* točkastega telesa.

Vztrajnostni moment tankega obroča polmera r in mase m se tudi izračuna po tej formuli za J , za ostala toga telesa pa to ne velja.

VIII.2 VRTILNA KOLIČINA TOČKASTEGA TELESA

2. Newtonov zakon $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ zapišimo s pomočjo gibalne količine $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$

$$\mathbf{F} = d\mathbf{G}/dt,$$

slednja zveza velja tudi, če se masa telesa ne ohranja in sledi iz izreka o ohranitvi gibalne količine (sunek sile = sprememba gibalne količine). Vpeljemo novo količino, vrtilno količino $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{G} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

Zanima nas časovna sprememba $\mathbf{\Gamma}$, pri čemer naj se masa krožečega telesa ne spreminja:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \\ \frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt} &= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}, \end{aligned}$$

saj je $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = m \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$. Torej je

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{G}}{dt}.$$

Ker je $d\mathbf{G}/dt = \mathbf{F}$, velja:

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M},$$

saj je navor na osišče $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Torej velja, da za spremembo vrtilne količine točkastega telesa:

Sprememba vrtilne količine na časovno enoto je enaka navoru zunanje sile.

Izrek o ohranitvi vrtilne količine pa pravi: Če ni navora zunanjih sil, se vrtilna količina ohranja: $\mathbf{M} = \mathbf{0} = d\mathbf{\Gamma}/dt \Rightarrow \mathbf{\Gamma} = \text{konst.}$, $\mathbf{\Gamma}$ ni funkcija časa. Ta izrek velja tudi za vrtenje togega telesa.

VIII.3 CENTRALNA SILA IN VRTILNA KOLIČINA TOČKASTEGA TELESA

Naj je sila \mathbf{F} centralna sila:

$$\mathbf{F} = f(r) \mathbf{e}_r,$$

kjer je \mathbf{e}_r enotni vektor vzdolž radij vektorja do opazovane masne točke. Primera centralne sile sta centripetalna sila $\mathbf{F} = -mr\omega^2 \mathbf{e}_r$ in gravitacijska sila. Centralna sila leži vedno na nosilki, ki gre skozi izhodišče koordinatnega sistema in je po jakosti odvisna le od oddaljenosti od izhodišča, $F = f(r)$. Zapišimo s kolikim navorom deluje centralna sila na center kroženja, pri čemer upoštevajmo $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times f(r) \mathbf{e}_r = r \mathbf{e}_r \times f(r) \mathbf{e}_r = r f(r) \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = \mathbf{0}.$$

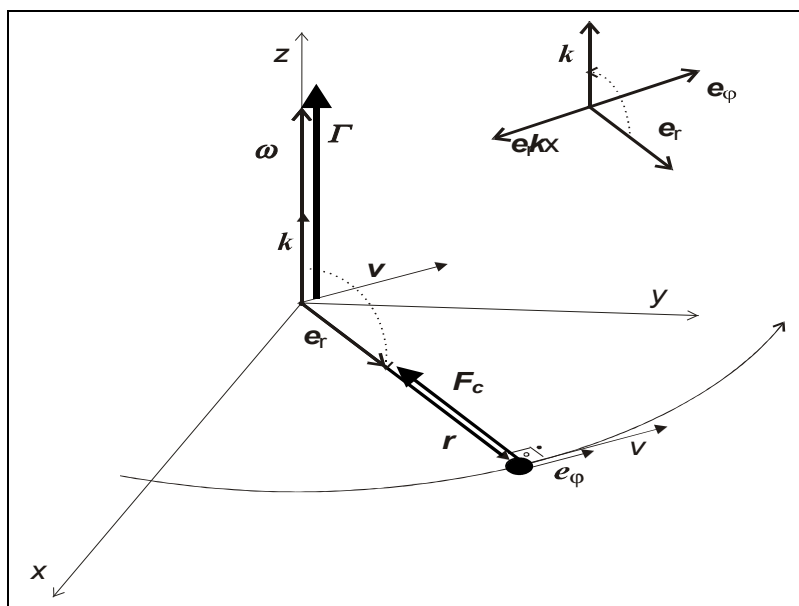
Centralna sila ne izvaja navora na center kroženja. Ker pa je navor take sile enak nič, se ohranja vrtilna količina krožečega telesa, če nanj deluje samo centralna sila:

$\mathbf{M} = \mathbf{0} = d\mathbf{\Gamma}/dt \Rightarrow \mathbf{\Gamma} = \text{konst.}$ Ker pri enakomernem kroženju deluje na krožeče telo samo centripetalna sila (radialna ali centralna sila), se *ohranja vrtilna količina* (točkastega) telesa, ki *enakomerno kroži* (ima stalno kotno hitrost).

Za točkasto krožeče telo je obodna hitrost $\mathbf{v} = r \omega \mathbf{e}_\varphi$, vrtilna količina pa:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = r \mathbf{e}_r \times m r \omega \mathbf{e}_\varphi = m r^2 \omega \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = m r^2 \omega \mathbf{k}.$$

$\mathbf{\Gamma} \uparrow \uparrow \mathbf{k}$. Ker je $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$, tudi $\boldsymbol{\omega} \uparrow \uparrow \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{\Gamma} = m r^2 \boldsymbol{\omega}$ in je $\mathbf{\Gamma} \uparrow \uparrow \boldsymbol{\omega}$. To velja za točkasto telo, le v posebnih primerih tudi za togo telo.



Vrtilna količina pri pospešenem kroženju točkastega telesa

Pokazali smo, da velja za točkasto telo:

$$\Gamma = mr^2 \omega \Rightarrow \Gamma = mr^2 \dot{\omega}.$$

Že pri navoru tangencialne sile smo vpeljali vztrajnostni moment točkastega telesa $J = mr^2$, ki ga vstavimo v izraz za vrtilno količino:

$$\Gamma = J\omega, \quad \dot{\Gamma} = J\dot{\omega}.$$

Pokazali smo, da se pri enakomernem kroženju ohranja vrtilna količina. Kako je pri neenakomernem kroženju točkastega telesa z vrtilno količino? Tedaj delujeta dve sili na krožeče telo, centripetalna (centralna) in tangencialna sila. Njuna vsota je celotna zunanja sila na krožečo točko:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_t, \quad \mathbf{F}_c = -mr\omega^2 \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{F}_t = m \mathbf{a}_t = m r \alpha \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{F}_c \perp \mathbf{F}_t.$$

Navor obeh sil na osišče krožečega telesa:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_t) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_c + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_t.$$

Prvi člen nan desni je navor centralne (centripetalne) sile – za tega smo pokazali, da je enak nič, ostane navor tangencialne sile:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_t = \mathbf{r} \times m r \alpha \mathbf{e}_\varphi = m r^2 \alpha \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = m r^2 \alpha \mathbf{k} \\ \mathbf{M} &= m r^2 \alpha \mathbf{k} = d\Gamma/dt. \end{aligned}$$

Pri enakomernem kroženju je $\alpha = 0 \Rightarrow \mathbf{M} = 0 \Rightarrow \Gamma = \text{konst.}$ Pri neenakomernem kroženju $\alpha \neq 0$ in se vrtilna količina ne ohranja. Ponovno zapišemo navor z vztraj. momentom točk. telesa $J = mr^2$:

$$\mathbf{M} = J \alpha \mathbf{k} \Rightarrow \dot{\Gamma} = J \alpha,$$

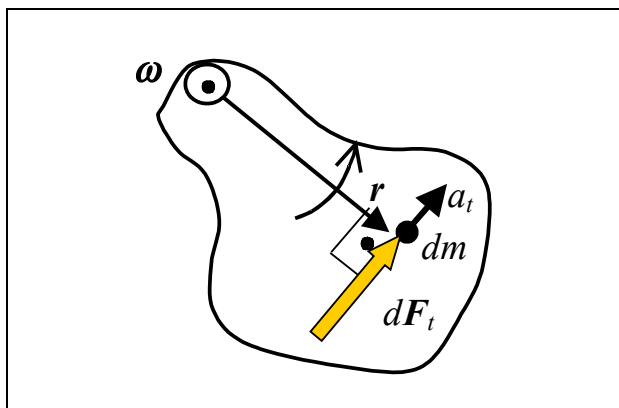
od prej vemo, da

$$\Gamma = J\omega = J\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\Gamma} = J\dot{\omega}.$$

Torej za točkasto krožeče telo velja $\dot{\Gamma} \uparrow \uparrow \mathbf{M}$, kar v splošnem ne velja za togo telo.

VIII.4 ROTACIJA TOGEGA TELESA OKOLI STALNE OSI

(Applied Mechanics: Dynamics of rotating body)



Navor, ki zagotavlja kotni pospešek α togemu telesu, ki se vrti okoli osišča dobimo tako, da najprej zapišemo silo $d\mathbf{F}_t$, ki zagotavlja tangencialni pospešek \mathbf{a}_t masnemu

delcu dm togega telesa:

$d\mathbf{F}_t = dm \mathbf{a}_t$, kjer je $d\mathbf{F}_t \perp \mathbf{r}$. Navor sile $d\mathbf{F}_t$ na osišče je:

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_t,$$

ker je $d\mathbf{F}_t \perp \mathbf{r}$, je $dM = r dF_t$.

Skupen navor na osišče je vsota majhnih navorov

$$M = \int r dF_t = \int r dm a_t = \int r^2 \alpha dm,$$

kjer smo upoštevali, da je $a_t = r\alpha$. Ker imajo vsi masni delci togega telesa enak kotni pospešek α , lahko slednjega izpostavimo pred integral:

$$M = \alpha \int r^2 dm,$$

kjer M pomeni vsoto vseh zunanjih navorov.

Tako smo dobili za togo telo podoben izraz za navor, kot smo ga imeli za točkasto telo:

$$M = \alpha m r^2 = \alpha J,$$

kjer smo uvedli vztrajnostni moment točkastega telesa kot $J = m r^2$.

VIII.5 VZTRAJNOSTNI MOMENT TOGEGA TELESA

Uvedemo *vztrajnostni moment za togo telo*:

$$J = \int r^2 dm,$$

s katerim zapišemo navor zunanjih sil na togo vrteče se telo okoli stalne osi na enak način kot smo to naredili za točkasto telo

$$M = J\alpha.$$

Izraz za vztrajnostni moment togega telesa lahko zapišemo tudi kot produkt celotne mase telesa in *krožilnim* polmerom togega telesa r_J :

$$J = \int r^2 dm = m r_J^2,$$

kjer je $r_J^2 = J/m$.

VIII.6 VZTRAJNOSTNI NAVOR (DVOJICE)

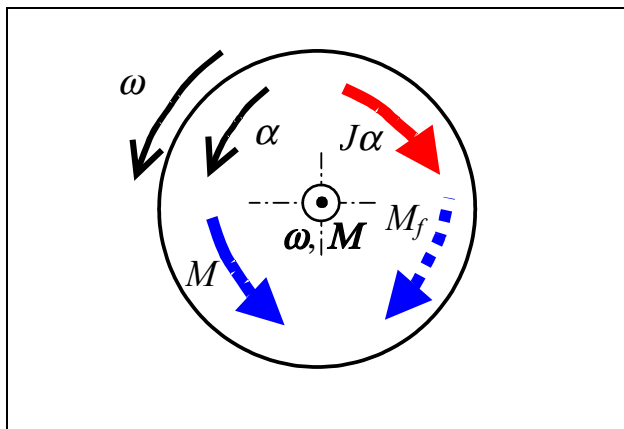
Primerjajmo izraza

$$F = ma$$

$$M = J\alpha.$$

Vztrajnostni moment J ima podoben pomen pri rotaciji togega telesa, kot ga ima masa pri translatorsnem gibanju (težišča) telesa. Podobno kot smo vpeljali vztrajnostno silo, ki ima smer nasprotno pospešku telesa in 'nasprotuje' zunanji sili, si lahko predstavljamo *vztrajnostni* navor (navidezne dvojice sil) telesa jakosti $J\alpha$, ki nasprotuje zunanjemu navoru M in katerega smer nasprotuje kotnemu pospešku α . V takem opisu tudi pospešeno rotacijo telesa obravnavamo kot statičen problem, podobno kot smo s pomočjo vztrajnostne sile premočrtno pospešeno gibanje telesa prevedli na statičen problem (vsota vseh sil, vztrajnostne in zunanjih, je enaka nič). Vztrajnostni navor je *reakcijski navor* – ta ni aktivni navor, ki 'poganja' vrtenje.

VIII.7 POSPEŠENO VRTENJE GREDI



Gred z vztrajnikom vztrajnostnega momenta J se vrti s kotno hitrostjo ω , ki se ji povečuje jakost s kotnim pospeškom α . Tega zagotavlja zunanji navor motorja, zato je predznak in usmeritev

kotnega pospeška α enaka predznaku in smeri delovanja navora M . Navor *trenja* M_f v ležaju pa vedno *nasprotuje smeri vrtenja*. Vztrajnostni navor $J\alpha$ pa nasprotuje pospeševanju vrtenja, ima nasprotno smer kotnega pospeška α . Navor M mora premagovati vztrajnostni navor in navor trenja:

$$M = J\alpha + M_f, \text{ ali}$$

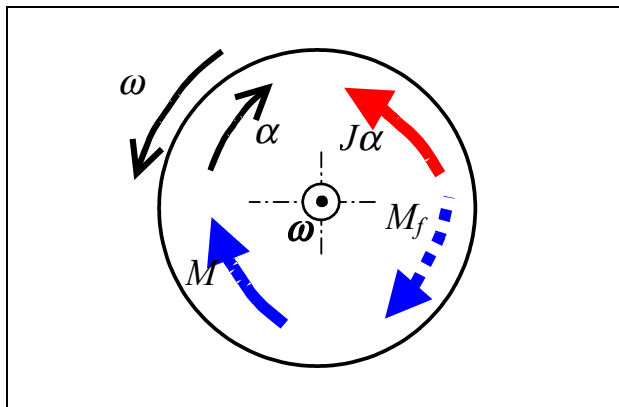
$$M - M_f - J\alpha = 0,$$

kar pomeni 'ravnovesje' navorov (zunanjih in vztrajnostnega), čeprav je vrtenje pospešeno. Še najbolj korektna pa je oblika:

$$J\alpha = \text{vsota zunanjih navorov} = M - M_f.$$

Občutek za izvajanje zunanjega navora ($M = J\alpha + M_f$) dobimo, ko želimo s pedali pospešiti hitrost kolesu. Tedaj premagujemo vztrajnostni navor $J\alpha$, ki je tem večji, hitreje kot pospešujemo (večji α) in navor skupnega trenja (ležaji in ostalo).

VIII.8 ZAVIRANJE VRTENJA GREDI



Gred zaviramo z zunanjo zavoro.

Tokrat se kotna hitrost ω zmanjšuje po jakosti, spremeni se smer kotnega pospeška α , smer delovanja vztrajnostnega navora, ki nasprotuje kotnemu

pospešku. Spremenjena je tudi smer aktivnega navora M , ki zagotavlja α . Ohranja pa se smer navora trenja ležaja M_f , ker je smer vrtenja enaka kot v prejšnjem primeru, M_f pa deluje zaviralno. Tokrat z aktivnim navorom M , s katerim zaviramo, premagujemo vztrajnostni navor, 'pomaga' pa mu navor trenja ležaja:

$$M - M_f = J\alpha, \text{ ali}$$

$$M - M_f - J\alpha = 0, \text{ ali}$$

$$J\alpha = \text{vsota zunanjih navorov} = M + M_f,$$

kjer je α absolutna vrednost kotnega pospeška. Če pa ni zunanjsa zaviralnega navora M , pa velja:

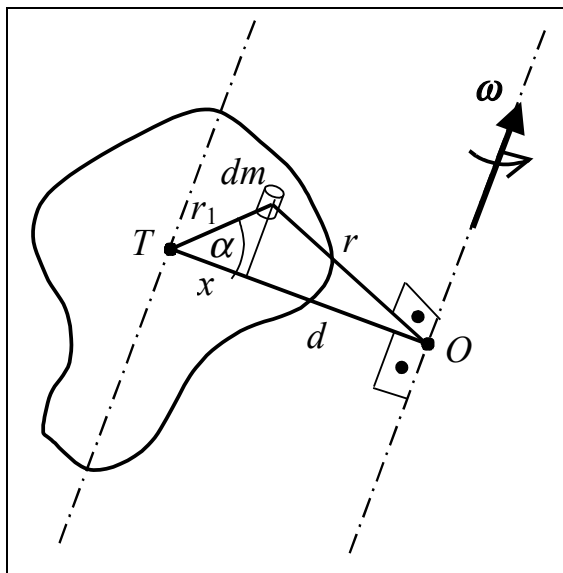
$$J\alpha = M_f.$$

V obeh primerih (pospeševanje in zaviranje gredi) velja:

- navor trenja nasprotuje vrtenju
- vztrajnostni navor nasprotuje spremembi kotne hitrosti navora.

VIII.9 STEINERJEVO PRAVILO

Če poznamo vztrajnostni moment telesa za vrtenje okoli osi, ki gre skozi težišče T (lastni vztrajnostni moment), nas zanima, kako izračunamo vztrajnostni moment za vrtenje togega telesa okoli osi, ki ne gre skozi težišče, pač pa



skozi točko O , pa je vzporedna tisti skozi težišče.

Vztrajnostni moment mase dm za vrtenje okoli osi, ki gre skozi T je : $dJ_c = r_1^2 dm$
 \Rightarrow vztrajnostni moment mase m pri vrtenju okoli težiščne osi, ki gre skozi T je $J_c = \int r_1^2 dm$, ki je *lastni vztrajnostni moment*.

Vztrajnostni moment za vrtenje okoli vzporedne osi

je pač po formuli,

$$J = \int r^2 dm,$$

kjer je r oddaljenost mase dm od osi. Ker velja kosinusni izrek za nepravokoten trikotnik:

$$r^2 = r_1^2 + d^2 - 2 r_1 d \cos \alpha,$$

ki ga izkoristimo v izrazu za vztrajnostni moment:

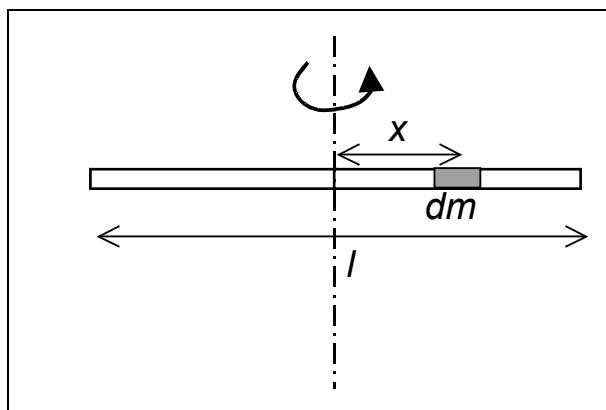
$$\begin{aligned} J &= \int [d^2 + r_1^2 - 2 r_1 d \cos \alpha] dm = \\ J &= d^2 \int dm + \int r_1^2 dm - 2 d \int r_1 \cos \alpha dm \\ J &= m d^2 + J_c - 0. \end{aligned}$$

tretji integral na desni je enak nič, ker je $r_1 \cos \alpha = x$ – projekcija oddaljenosti mase dm na zveznico med T in O . Ker je T težišče, se x enako razteza v pozitivno smer, kot v negativno, integral po vseh x je zaradi te simetrije enak nič. Tako smo s *Steinerjevim pravilom* vztrajnostni moment okoli poljubne osi J izrazili z momentom okoli težiščne osi J_c

$$J = m d^2 + J_c,$$

kjer je d oddaljenost med osema.

Vztrajnostni moment tanke palice



$$J_c = ?$$

$$dm/dV = \rho \Rightarrow dm = \rho dV,$$

$dV = S dx$, kjer je S presek palice.

Predpostavimo, da je palica *homogena*, da se njena gostota ne spreminja z lego mase

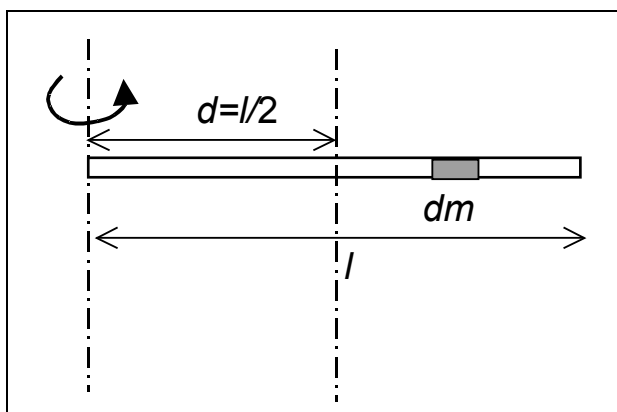
dm , oz. $\rho = \text{konst.}$ Vztraj. moment tako izračunamo:

$$J_c = \int x^2 dm = \int x^2 \rho dV = \int x^2 dx,$$

$$J_c = \rho S \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \rho S \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho S}{3} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^3 - \left(-\frac{l}{2} \right)^3 \right] = \rho S \frac{l^3}{12}.$$

Ker je celotna masa $m = \rho S l \Rightarrow$

$$J_c = m \frac{l^2}{12}.$$



Vztrajnostni moment palice, ki jo vrtimo okoli enega konca izračunamo po Steinerjevem pravilu

$$J = m d^2 + J_c = m l^2/4 + m l^2/12$$

$$J = m l^2/3.$$

Splošna oblika za vztrajnostne momente vseh togih teles pri vrtenju okoli glavnih (lastnih) osi

Vztrajnostni moment palice: $J = m l^2/12$, kjer je l dolžina

Vztrajnostni moment valja: $J = m R^2/2$, kjer je R polmer valja

Vztrajnostni moment krogle: $J = 2m R^2/5$

Vztrajnostni moment ima vedno enoto kg m^2 in je sestavljen iz:

$$J = \text{faktor} \cdot \text{masa} \cdot \text{značilna_dimenzija}^2,$$

ali:

$$J = m r_J^2,$$

kjer je r_J *krožilni* polmer ('radius of gyration') togega telesa, $r_J^2 = J/m$.

Izrek o spremembi vrtilne količine Γ togega telesa za vrtenje okoli lastne osi, ki je pod delovanjem navora zunanjih sil M :

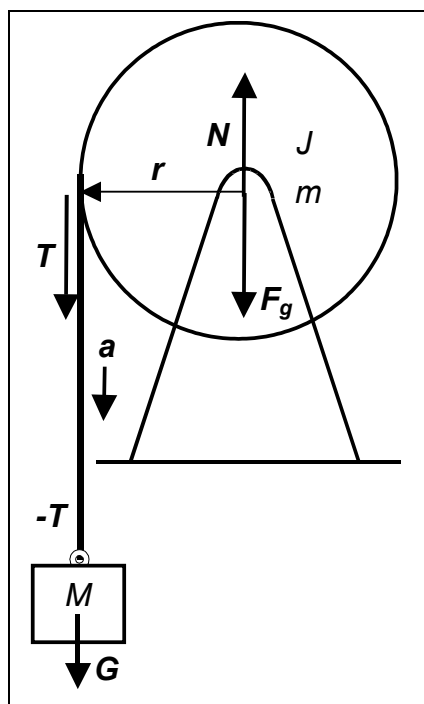
$$M = \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = J\alpha,$$

$$M = J \alpha$$

VAJE: izpelji vztrajnostni moment valja

ZAHTEVNA naloga za določenega študenta:
Izpeljava vztrajnostnega momenta za kroglo.

VAJA za vztrajnostni moment



Kolika je rezultančna sila na obešeno telo? Kolik je rezultančni navor na kolo?

N – sila ležajev ('podlage') na os kolesa

T – sila napetosti vrvi, $G = M g$;

Gibanje bremena:

$$M a = G - T = M g - T.$$

Na kolo škripca sili F_g in N ne delujeta z navorom, tega ustvarja le sila T , njen navor povzroči kotni pospešek:

$$T r = J \alpha.$$

Ker se vrv giblje skupaj s kolesom po obodu, tangencialni (obodni) pospešek kolesa = pospešku bremena:

$$a = r \alpha \Rightarrow \alpha = a/r,$$

tega vstavimo v enačbo za pospešeno rotacijo škripca:

$T r = J a/r \Rightarrow T = J a/r^2$, silo v vrvi pa vstavimo enačbo za gibanje bremena: vztraj. moment za valj: $J = m r^2/2$

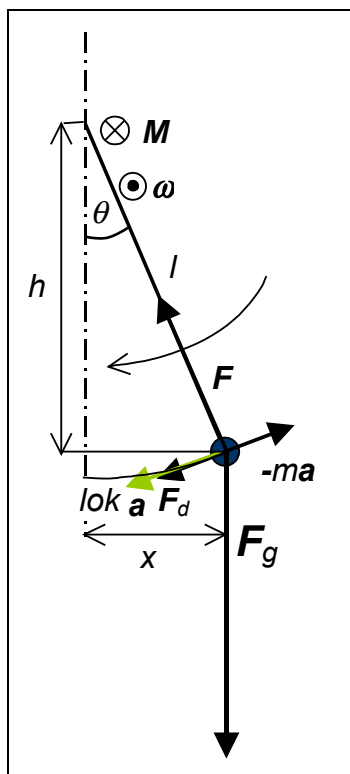
$$M a = M g - J a/r^2 \Rightarrow a = g / \left[1 + \frac{J}{M r^2} \right] = g / (1 + m/2M).$$

Če je $J = 0$ $\Rightarrow a = g$, če $J \ll 0 \Rightarrow a < g$. Večji ko je polmer kolesa in lažje kot je kolo škripca (manjši je njegov vztrajnostni moment) in večja kot je masa bremena, bližji je a težnemu pospešku g . Gre za enakomenrno pospešeno padanje bremena. Če je bila v trenutku $t = 0$ hitrost $v(0) = 0 \Rightarrow v = a t$, globina padanja $h = a t^2/2 \Rightarrow$

$$v^2 = 2 a h \Rightarrow v^2 = 2 g h / \left[1 + \frac{J}{M r^2} \right]. \text{ Mase škripca ni?}$$

VIII.10 NIHALA KOT TOGA TELESA

VIII.10.1 ENOSTAVNO NIHALO



Masna točka m je pritrjena na lahek drog dolžine l , ali pa visi na napeti nitki. F je sila vrvice na maso, $F \perp F_d$, Sila teže točkaste mase izvaja *navor* na osišče nihala.

$M = -x F_g$ – predznak minus, ker navor nasprotuje večanju kota θ , gre za *povratni* navor (za nihanja so značilni povratni navori in/ali povratne sile).

Za majhne odklone:

$x = l \sin \theta \cong l \theta \Rightarrow M = -l \theta mg$. Izrek o spremembi vrtilne količine pravi:

$$M = J \alpha = J d^2 \theta / dt^2,$$

kjer je J vztraj. moment točkastega telesa (palica je tanka in lahka, jo zanemarimo): $J = m l^2 \Rightarrow -l \theta mg = m l^2 d^2 \theta$

$$/ dt^2 \Rightarrow d^2 \theta / dt^2 + [g/l] \theta = 0.$$

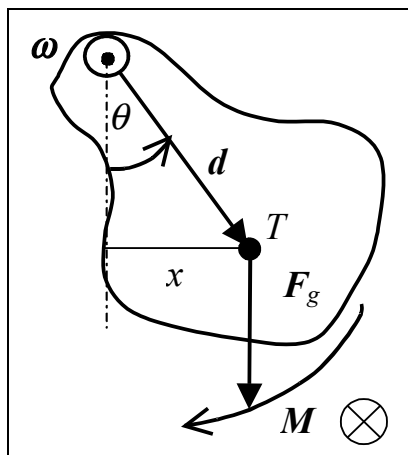
Pišemo $g/l = \omega^2$, (kvadrat krožilne frekvence), rešitev že poznamo:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

kjer je φ začetni fazni pomik, θ_0 pa amplituda nihanja kota odklona θ . Ker $\omega^2 = g/l \Rightarrow$ perioda enostavnega (matematičnega) nihala

$$T = 2 \pi (l/g)^{1/2}.$$

VIII.10.2 FIZIČNO NIHALO



T – težišče telesa. Navor sile teže je *povratni* navor:

$M = -x F_g = -d \sin \theta m g \cong -d \theta m g$
za majhne odklone θ . Ker

$$M = J \alpha = J d^2 \theta / dt^2 \Rightarrow$$

$$-d \theta m g = J d^2 \theta / dt^2 \Rightarrow$$

$$d^2 \theta / dt^2 + \theta dm g / J = 0. \text{ Vpeljemo}$$

$$\omega^2 = gmd/J, \text{ rešitev } d^2 \theta / dt^2 + \omega^2 \theta = 0$$

je sinusno nihanje kota odklona težišča od navpičnice:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

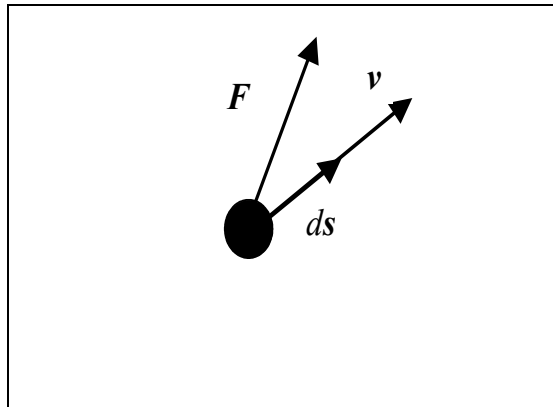
$$\text{perioda pa je: } T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

VAJA:

Tanek obroč kolesa, obešen na žebelj na steni, zaniha. Naj je njegova masa 1,5 kg, polmer pa 0,3 m. Kolik je nihajni čas, če je vztrajnostni moment kolesa 0,2 kg m²?

IX. DELO IN ENERGIJA

IX.1 DELO ZUNANJE SILE PRI TRANSLACIJSKEM GIBANJU



Majhen pomik točkastega telesa ds s silo F .

Delo sile ΔA pri majhnem pomiku je definirano kot:

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

kjer \cdot označuje skalarni produkt dveh vektorjev. Zato je delo sile

F , ki ni vzporedna s pomikom ds enako:

$$dA = F \cos \varphi ds.$$

Celotno delo zunanje sile vzdolž gibanja telesa pa je vsota del sile vseh drobnih pomikov:

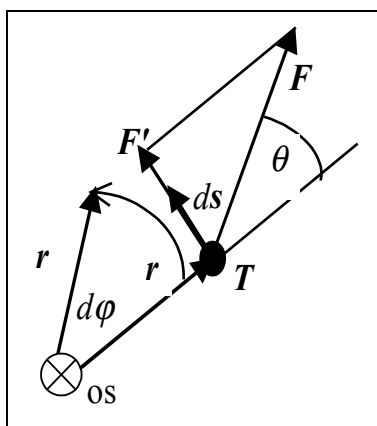
$$A = \int F \cos \varphi ds = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Če je sila konstantna med gibanjem telesa (ohranja jakost in smer glede na smer gibanja), jo lahko postavimo izven integrala

$$A = \int F \cos \varphi ds = F \cos \varphi \int ds = F \cos \varphi s = Fs \cos \varphi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

Delo je enostaven skalarni produkt vektorja sile in vektorja opravljenega premočrtnega pomika poti samo takrat, ko je sila konstantna (gibanje pa premočrtno). $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$, Če $F \uparrow \uparrow s$ je $A = Fs$.

IX.2 DELO ZUNANJE SILE PRI ZASUKU TELES



$F \perp os$. Pomik $ds = r d\varphi$ - za toliko se pomakne prijemališče sile F . Njena projekcija na pomik težišča telesa T za ds je $F' = F \sin \theta$, $F' \uparrow \uparrow ds$. Delo sile pri tem pomiku ob zasuku težišča je $dA = F' ds = dA = F \sin \theta ds$. Pomik ds ob zasuku: $ds = r d\varphi \Rightarrow$

$$dA = F \sin \theta r d\varphi. \text{ Navor sile } M = Fr \sin \theta \Rightarrow dA = M d\varphi$$

$$A = \int M d\varphi$$

Če sila \mathbf{F} ni pravokotna na os, je izraz za delo bolj kompliciran, brez izpeljave navedemo:

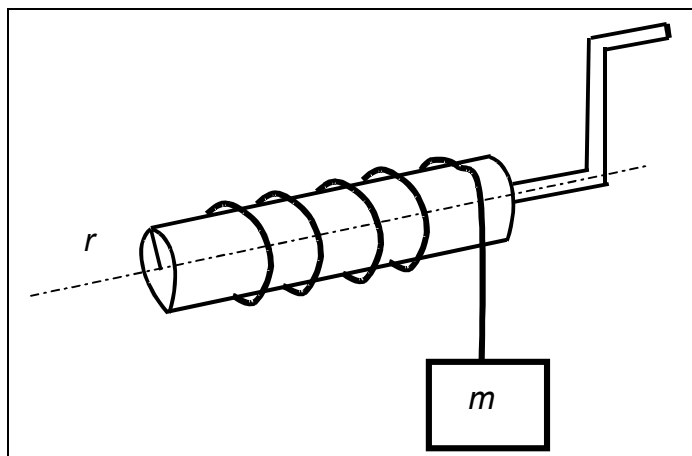
$$A = \int \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt$$

ki ga primerjamo z izrazom za delo pri translatorsnem gibanju:

$$A = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt,$$

vidimo, da pri delu sile pri rotaciji togega telesa navor nadomesti silo, kotna hitrost pa translacijsko hitrost.

VAJA



$A = ?$

Utež se spusti za dh ,

sila teže opravi delo

$dA = mg dh$, hkrati

izvede navor

$M = mgr$: pomik

navzdol za dh

pomeni zasuk za $d\varphi$,

pomik dh je enak

loku $ds = dh = r d\varphi$.

Delo $dA = M d\varphi = mgr dh/r = mg dh$. Pri tem problemu je delo sile pri rotaciji = delo enake sile pri transl. pomiku.

IX.3 IZREK O OHRANITVI KINETIČNE ENERGIJE PRI TRANSLACIJSKEM GIBANJU

$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, 2. Newton. z. $\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow dA = m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$, ker je $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt \Rightarrow dA = m(d\mathbf{v}/dt) \cdot \mathbf{v}dt = m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, pri translacijskem gibanju je $d\mathbf{v} \parallel \mathbf{v} \Rightarrow$
 $dA = m v dv$

$$A = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = m \frac{v^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = m \frac{v_2^2}{2} - m \frac{v_1^2}{2},$$

Vpelje se kinetična energija

$$W_k = m \frac{v^2}{2},$$

Sprememba kinetične energije je enaka delu zunanje sile

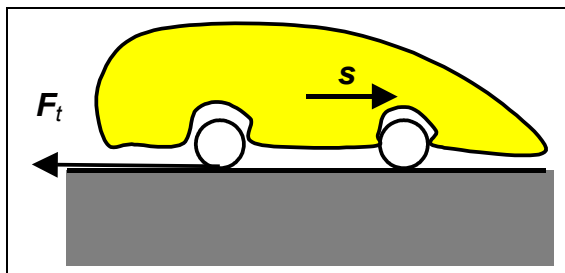
$$A = W_{k2} - W_{k1}.$$

Izrek o ohranitvi kinetične energije pri translacijskem horizontalnem gibanju se glasi: kinetična energija se ohranja, če je delo zunanjih sil enako nič.

Če je delo zunanje sile zaviralno ($\mathbf{F} \perp d\mathbf{s}$), $A < 0 \Rightarrow$ končna kinetična energija je manjša od začetne:

$$W_{k2} < W_{k1}.$$

VAJA:



$$v_0 = 72 \text{ km/h}$$

$$v_k = 0$$

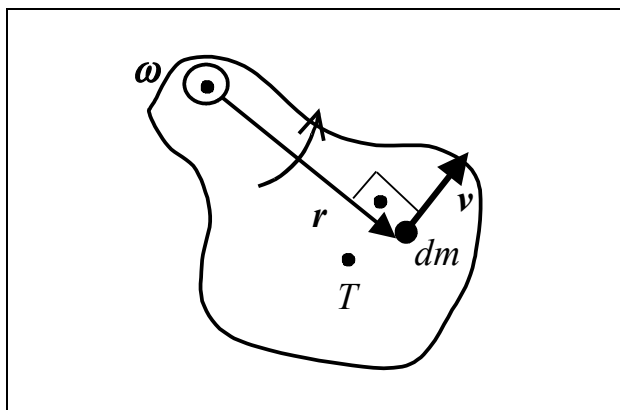
$$k_t = 0,5 - \text{blokiranje}$$

$$s = ?$$

$$F_t = mg k_t, A_t = F_t s = mg k_t s =$$

$$W_{k2} - W_{k1}$$

IX.4 ROTACIJSKA ENERGIJA TOGEGA TELESA



Vsake del togega telesa, ki je oddaljen od osi za r ima krožilno hitrost

$v = r\omega$. Kinetična energija za masni košček dm je

$dW_k = dm (r\omega)^2/2 \Rightarrow$
ROTACIJSKA KINETIČNA ENERGIJA:

$$W_k = \int dW_k = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm = \frac{1}{2} J \omega^2 = W_{rot}.$$

Vztrajniki imajo velik $J \Rightarrow$ med vrtenjem lahko oddajo veliko kinetične energije pri manjšanju kotne hitrosti, če zaviralni navor ni prevelik.

Naj se togo telo vrtili okoli težišča, pri čemer se težišče giblje.

Vpeljemo celotno kinetično energijo togega telesa:

$$W_k = W_{ktran} + W_{rot},$$

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

kjer je v_c^2 hitrost gibanja težišča, J_c pa lastni vztrajnostni moment za vrtenje okoli težiščne osi.

Celotno delo zunanjih sil zaradi translacije in rotacije telesa:

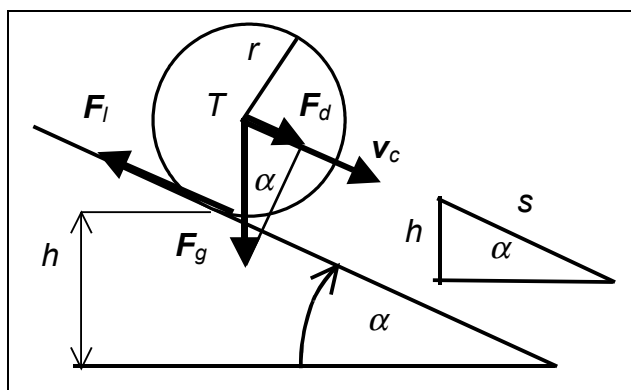
$$A = \int \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt + \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

[če sta sila in navor stalna $A = M\omega t + Fs$]. Izrek o spremembi kinetične energije se glasi

$$A = \int \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt + \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = W_{k2} - W_{k1} =$$

$$A = \frac{mv_{c2}^2}{2} - \frac{mv_{c1}^2}{2} + \frac{J_c \omega_2^2}{2} - \frac{J_c \omega_1^2}{2}$$

VAJA

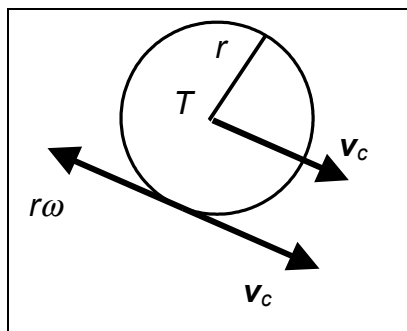


Krogla se kotali na klancu. Kolika je hitrost težišča v_c na dnu klancu, če je bila na vrhu $v_{c0} = 0$? $W_{k0} = 0$. $F_d = F_g \sin \alpha$, delo zunanje sile pri gibanju po klancu, je delo dinamične komponente sile teže, ki povzroči spremembo

celotne kinetične energije toge krogle:

$A_d = mg \sin \alpha s = mgh$ – delo sile teže. Končna W_k :

$W_k = m v_c^2/2 + J_c \omega^2/2 = A_{\text{tot}}$. Poleg sile teže opravi delo tudi zaviralna sila lepenja – krogla namreč ne drsi po podlagi, se zgolj kotali – relativna hitrost stične točke valja in podlage je nič, obnašanje sile lepenja je podobno kot pri mirovanju telesa, ki ga vlečemo.



Delo sile lepenja: $dA_l = -F_l ds = -F_l v_{\text{rel}} dt = 0$. Torej je delo vseh zunanjih sil le delo sile teže. Za kroglo je $J_c = 2mr^2/5$, ker ni drsenja je $v_c = r\omega \Rightarrow mgh = m v_c^2/2 + 2m v_c^2/(r^2 \cdot 2 \cdot 5)$
 $gh = v_c^2 \cdot 7/10 \Rightarrow v_c = (10/7)^{1/2} (gh)^{1/2} < v_c = (2gh)^{1/2}$ pri prostem padu. Za valj $v_c = (4/3)^{1/2} (gh)^{1/2}$.

IX.5 POTENCIALNA ENERGIJA

Izrek o spremembi kinetične energije $A = W_{k2} - W_{k1}$, delo razbijemo na delo teže in na delo vseh ostalih zunanjih sil: $A = A_G$

$$+ A_Z \Rightarrow \\ A_Z = W_{k2} - W_{k1} - A_G.$$

Delo sile teže:

$$A_G = \int \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{s} = m \int \mathbf{g} \cdot (dx, dy, dz)$$

$$A_G = - m \int (0, 0, g) \cdot (dx, dy, dz) =$$

$$A_G = - mg \int dz = - mg(z_2 - z_1) \Rightarrow \text{delo ostalih sil:}$$

$$A_Z = W_{k2} - W_{k1} + mgz_2 - mgz_1$$

Potencialna

energija

je definirana kot

$$W_p = mgz,$$

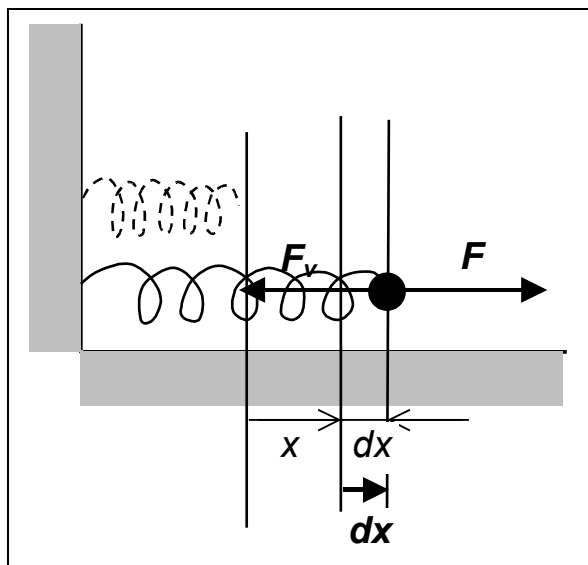
zato je delo vseh zunanjih sil razen teže enako:

$$A_Z = W_{k2} - W_{k1} + W_{p2} - W_{p1}$$

$$A_Z = (W_{k2} + W_{p2}) - (W_{k1} + W_{p1}).$$

Še samo delo sile teže: $A_G = - mg(z_2 - z_1) = - W_{p2} + W_{p1}$.

IX.6 PROŽNOSTNA ENERGIJA



Počasi in enakomerno raztegujemo vzmet z zunanjo silo F , ki je nasprotna sili vzmeti F_v . Sila vzmeti je *povratna* sila:

$F_v \uparrow \downarrow dx \Rightarrow$ zunanja sila deluje v smeri raztezka
 $F \uparrow \uparrow dx$

Hookov z.: $F = kx$

(k je konstanta vzmeti) \Rightarrow
 Delo zunanje sile pri

majhnem razteku:

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F dx = kx dx \Rightarrow$$

$$A = k \int_{x_1}^{x_2} x dx = k \frac{x_2^2}{2} - k \frac{x_1^2}{2},$$

vpelje se *prožnostna energija*

$$W_{pr} = k \frac{x^2}{2},$$

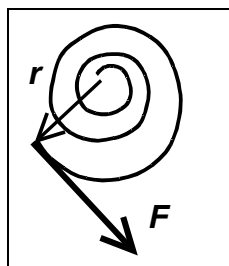
delo zunanje sile je zato:

$$A = W_{pr2} - W_{pr1},$$

delo sile vzmeti pa je

$$A_v = -W_{pr2} + W_{pr1}.$$

Spiralna vzmet



$\mathbf{F} \perp \mathbf{r} \Rightarrow M = rF$, sila spiralne vzmeti je sorazmerna kotu zasuka: $F = D \varphi \Rightarrow M = rD\varphi$

$$A = \int M d\varphi = D \int \varphi d\varphi = D \frac{\varphi_2^2}{2} - D \frac{\varphi_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$W_{pr} = D \frac{\varphi^2}{2}, \quad A = W_{pr2} - W_{pr1}.$$

IX.7 IZREK O OHRANITVI MEHANSKE ENERGIJE

Delo vseh zunanjih sil razen teže in prožnostne sile = spremembi mehanske energije

Mehanska energija $W = W_k + W_p + W_{pr}$.

Če je delo vseh zunanjih sil razen teže in prožnostne sile enako nič: $A = 0 \Rightarrow \Delta W = W_2 - W_1 = 0 \Rightarrow$

$$W_{k2} + W_{p2} + W_{pr2} = W_{k1} + W_{p1} + W_{pr1} \Rightarrow$$

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgz_2 + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgz_1 + \frac{kx_1^2}{2},$$

če ni rotacije telesa.

IX.8 MOČ

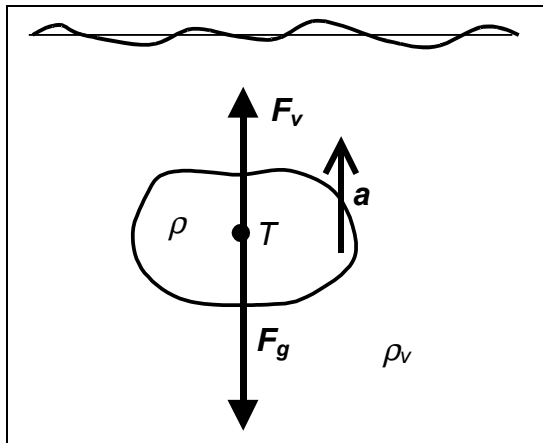
Moč pri translaciji telesa: $P = dA/dt = Fds/dt = Fv$

Moč pri rotaciji telesa: $dA = Fds = Fr d\varphi = M d\varphi \Rightarrow$

$P = dA/dt = M d\varphi/dt = M\omega$

X. HIDROSTATIKA IN HIDRODINAMIKA

X.1 SILA VZGONA



Sila vzgona $F_v =$ sili teže izpodrinjene tekočine:

$$F_v = m_v g = \rho_v V_v g,$$

kjer je ρ_v gostota okolne (izpodrinjene) tekočine, V_v pa njen volumen. Ko je telo v celoti potopljeno, je volumen telesa V enak volumnu izpodrinjene tekočine $V = V_v$, samo tedaj sila vzgona prejme v težišču, kjer je seveda prijemališče sile teže samega telesa. Pri plavajočih telesih prijemališče sile vzgona ni v težišču

mase telesa, pač pa v težišču izpodrinjene tekočine. Naj je sila vzgona večja od sile teže telesa. Tedaj se telo po 2. Newton. z. giblje s pospeškom:

$$ma = F_v - F_g = m_v g - m g = \rho_v V_v g - \rho V g$$

$$ma = V g (\rho_v - \rho),$$

kjer smo upoštevali, da je telo v celoti potopljeno, sicer $V < V_v$.

VAJA 1: Kos lesa miruje na gladini, kolik je delež potopljenega dela, če je njegova gostota 0.8 gostote kapljevine pod njim?

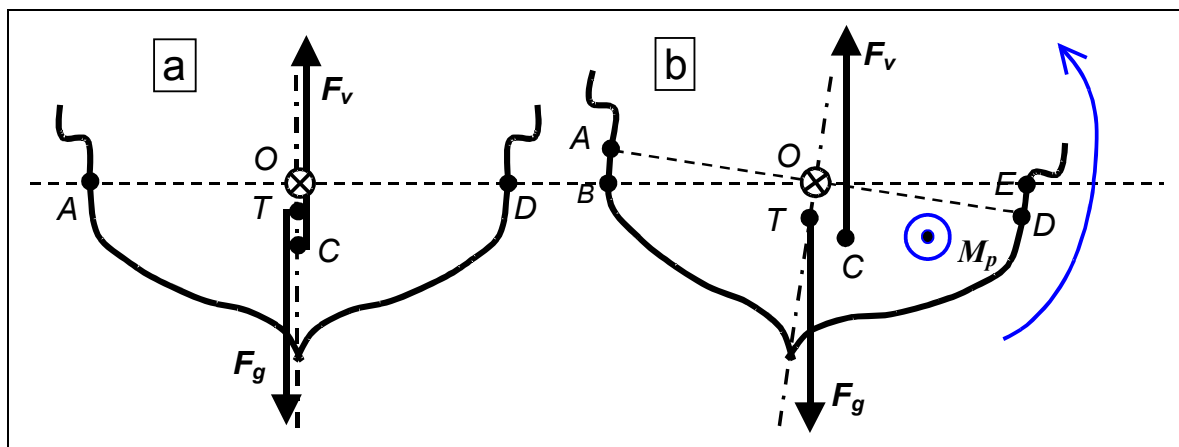
VAJA 2: Sod $V = 150$ l je napolnjen z zrakom kot pomoč pri dvigu sidra z morskega dna. Sidro ima maso 16 kg v morju. Masa sode je 20 kg. S koliko dodatno silo bo moral dvigati sidro potapljač?

VAJA 3: Na plavajočo bojo v obliki pokončnega valja z višino $l = 1$ m in ploščino osnovne ploskve $S = 2$ m², pade z višine $h = 2$ m nad bojo vreča peska mase $m = 60$ kg na sredino zgornje ploskve. Za koliko se pri padcu potopi boja? S kolikšno amplitudo in periodo zaniha boja z vrečo? Boja ima srednjo gostoto $\rho = 500$ kg/m³, gostota vode je $\rho_v = 1000$ kg/m³, upor vode zanemarimo (iz revije Presek 31/5, 2003-2004).

Tik pred padcem na bojo je hitrost vreče $v = (2gh)^{1/2}$. Gre za neprožen trk: $mv = (m+M)v_0$, $M = \rho S l$ masa boje in v_0 skupna začetna hitrost tonjenja.

Pred padcem vreče je sila vzgona F na bojo enaka sili njene teže Mg , po padcu pa je $F = Mg + \rho_v S z$, kjer je z globina potopa od ravnov. lege, naj $k = \rho_v S \Rightarrow F = Mg + k z$ (kot pri vzmeti). Največji potop $z = Z$ izračunamo z izrekom o ohran. mehan. energije: $(m+M) v_0^2/2 + (m+M)g Z = A$, kjer je A delo sile vzgona $A = \int (Mg + k z) dz = Mg Z + k Z^2/2$. Z pa ni amplituda nihanja, ker za novo ravnovesno lego z' velja, da je pod prejšnjo, po enačbi: $mg = \rho_v S z' = k z' \Rightarrow$ amplituda $z_0 = Z - z'$. Perioda nihanja se izračuna po formuli za vzmetno nihalo: $T = 2\pi ((m+M)/k)^{1/2}$.

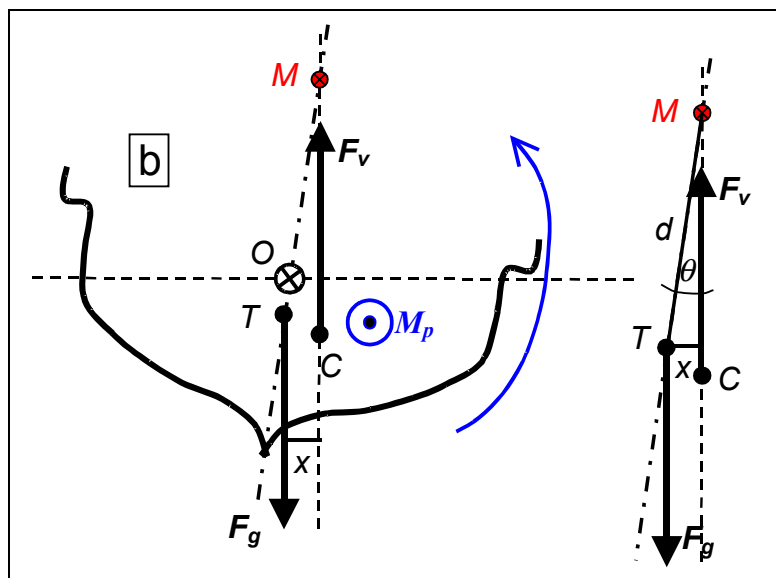
X.2 METACENTER



- a) Težišče T se nahaja nad prijemališčem sile vzgona C . Zdi se, da je zato plovilo nestabilno. Sila teže F_g je po jakosti enaka sili vzgona F_v , sicer bi se plovilo vertikalno gibalo s pospeškom.
- b) Še vedno velja $F_g = F_v$, sicer bi plovilo po vertikali imelo pospešek. Pri nagibu plovila okoli gredlja ostane težišče T na istem mestu plovila, vendar se premakne prijemališče vzgona C v desno za $x \Rightarrow$ vzpostavi se povratni navor dvojice sil $M_p \Rightarrow$ stabilno plovilo. Prijemališče sile vzgona C se je premaknilo v desno zato, ker se je del prvotnega volumna izpodrinjene tekočine AOB premaknil v EOD , prijemal. sile vzgona pa se nahaja v težišču izpodrinjene tekočine.

Povratni navor dvojice sil je $x F$. Vendar ta navor dvojice sil vzgona in teže ni nujno vedno povratni!

Metacenter M je točka presečišča med simetralo plovila, na kateri leži težišče T , in med nosilko sile vzgona, ki je vertikalna:



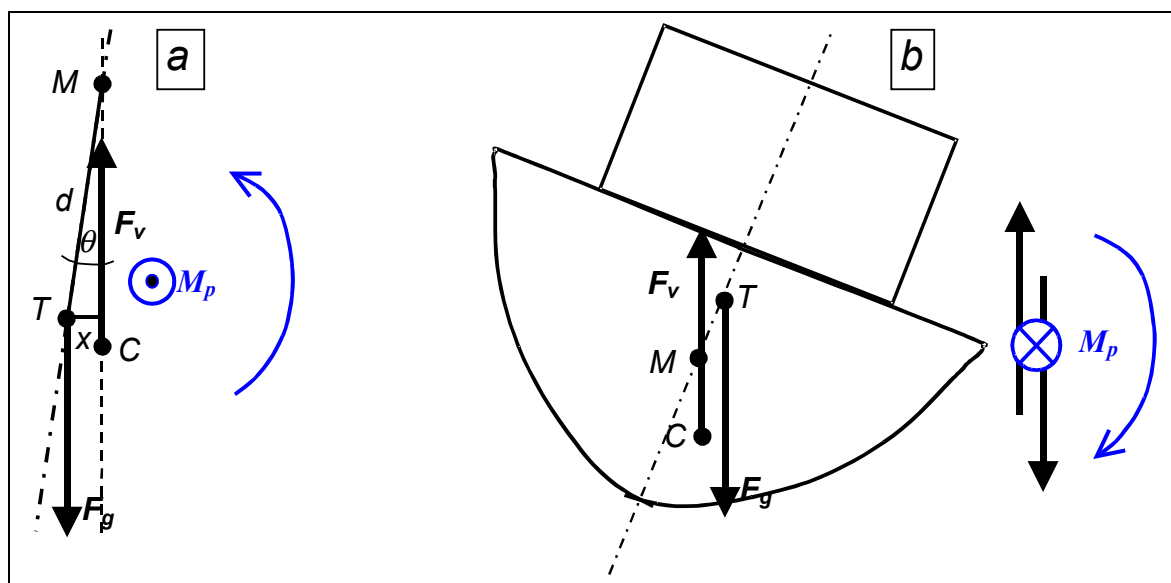
med

Razdalja
težiščem

in metacentrom $TM = d$ se imenuje metacentrična oddaljenost,
njena horizontalna projekcija je

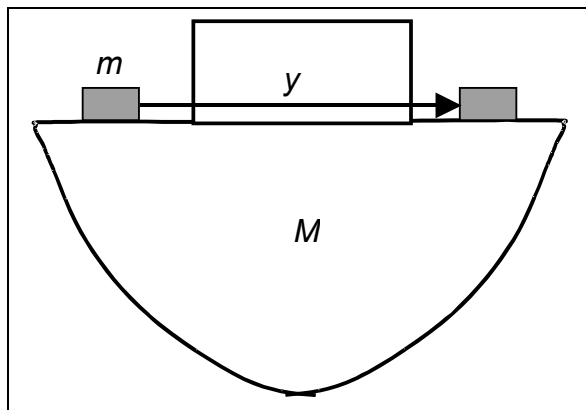
$$x = d \sin \theta \cong d \theta$$

za majhne nagibe plovila



- Metacenter M je nad težiščem T (vertikalno v višji legi).
Navor dvojice sil $M_p = F_g x = mg d \sin \theta \cong mg d \theta$ povrne plovilo v ravnovesno lego. Ta je tudi odgovoren za nihanje plovila.
- Metacenter M je pod težiščem T . Navor dvojice sil teže in vzgona tokrat ni povraten, plovilo je nestabilno in se prekucne.
- Metacenter M sovpada $T \Rightarrow$ nevtralno ravnovesje, ki lahko postane nestabilno.

Metacentrična višina se lahko določi eksperimentalno:



Dodatno breme na plovilu mase m pomaknemo prečno po palubi. Ko se m nahaja v eni legi, je plovilo zasukano proti njemu, ko pa je zasukano za drugi kot θ . Ker se v obeh primerih po umiritvi plovilo ne suka, je prisotno ravnovesje navorov: Navor sile teže bremena okoli

osišča = navoru dvojice sil vzgona in celotne teže na plovilu. Zadevo poenostavimo, če zapišemo, da pomik bremena pomeni spremembo navora njegove sile teže na osišče, in sicer za $M_m = mg \Delta y$. Naj je sprememba naklonskega kota plovila, ki je izmerjen, enaka $\Delta\theta$. Povratni navor dvojice sil je $M_p = (M + m) g d \sin(\Delta\theta) \cong (M + m) g d \Delta\theta \Rightarrow$

$$\text{ker } m \ll M \Rightarrow M_p \cong M g d \Delta\theta = M_m = mg \Delta y \Rightarrow$$

$$d = (m \Delta y) / (M \Delta\theta).$$

Opomba: Metacentrična višina je v resnici določena z odvodom:

$$d = (m/M) dy/d\theta.$$

X.3 NIHANJE PLOVILA

Upoštevajmo, da je sprememba vrtilne količine plovila pri bočnem sukanju okoli vzdolžne osi je enaka navoru dvojice sil teže in vzgona:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = M_p = J\alpha,$$

kjer je vztraj. moment plovila $J = m r_J^2$, kjer je r_J značilni krožilni polmer, m masa plovila, $\alpha = d^2\theta/dt^2$ je kotni pospešek plovila. Ker gre za povratni navor, ki zmanjšuje kot odklona $\theta \Rightarrow M_p = -m g d \theta$, kjer je d metacentrična razdalja \Rightarrow

$$-m g d \theta = m r_J^2 d^2\theta/dt^2 \Rightarrow d^2\theta/dt^2 = -g d \theta / r_J^2,$$

kar je diferencialna enačba za nihanje, vpeljemo:

$\omega^2 = g d / r_J^2$, pa zapišemo rešitev, ki pravi, da je bil odklon plovila v $t = 0$ enak nič:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t),$$

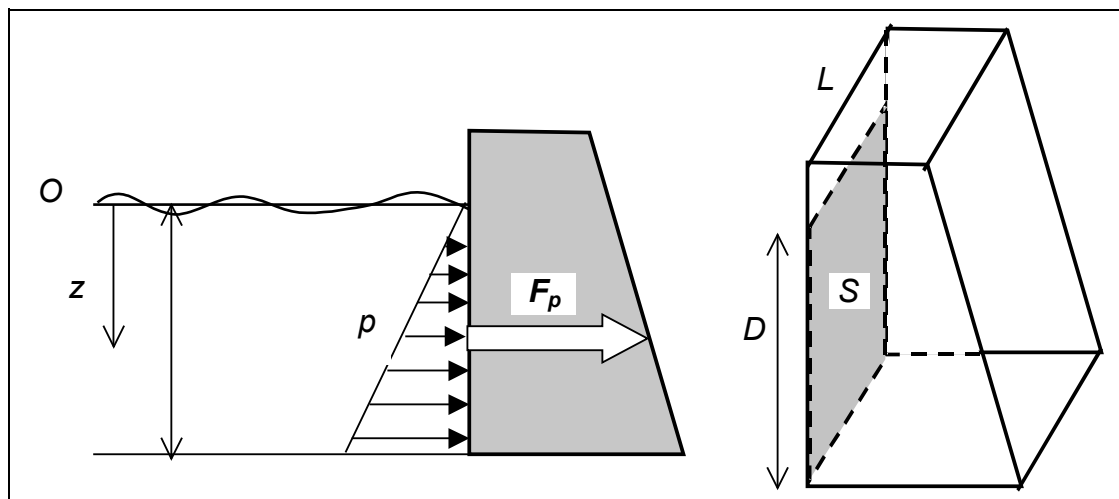
kjer je θ_0 amplituda odklona. To lahko vstavimo v enačbo za nihanje in jo preverimo, če je res rešitev. Perioda nihanja plovila je:

$$T = 2\pi \frac{r_J}{\sqrt{gd}}.$$

Perioda nihanja je tem večja, večji ko je krožilni polmer r_J . Večja ko je metacentrična razdalja $d \Rightarrow$ manjša je perioda. Ampak če je T majhna \Rightarrow plovilo niha z visoko frekvenco.

X.4 JEZOVI IN REZERVOARJI

X.4.1 RAVNOVESJE SIL

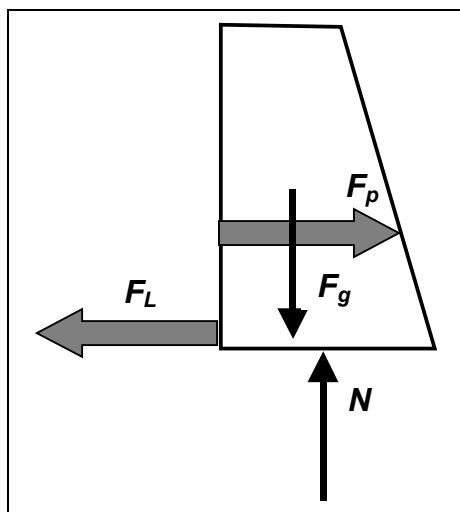


Zračni tlak na gladini in okoli jezua zanemarimo. Vodna masa deluje na vertikalno ploskev površine $S = DL$ s tlačno silo in z navorom te sile. Sile tlaka na jez je:

$F_p = \langle p \rangle S = (\rho g D / 2) S$, kjer je $\langle p \rangle$ povprečen tlak po vertikali $(0 + \rho g D) / 2$. Torej je tlačna sila:

$$F_p = (\rho g D / 2) DL = \rho g D^2 L / 2.$$

Ker bran miruje, je vsota vseh sil na njo enaka nič:



$F_p = F_L$, kjer je F_L sila lepenja podlage. Normalna sila podlage je enaka teži brane: $N = F_g$. Bran horizontalno ne zdrsne dokler sila lepenja ne preseže kritične vrednosti

$F_p = F_L < k_L N = k_L F_g$, kjer je k_L koeficient lepenja med brano in podlago. Silo teže branu zapišemo z njenim volumnom:

$F_g = \rho_j V_j g$, kjer je volumn jezua: $V_j = S L$.

X.4.2 Faktor varnosti pred zdrsom pri jezovih

Za stabilnost pred zdrsom velja neenačba

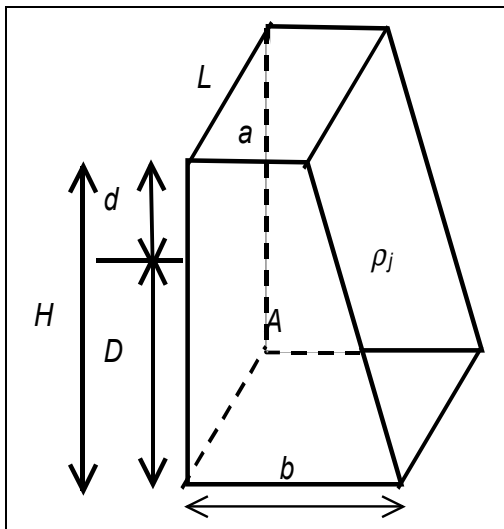
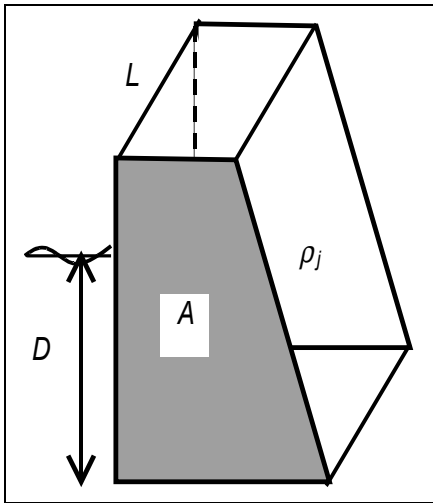
$$F_p < k_L F_g \Rightarrow \rho g D^2 L / 2 < k_L \rho_j A L g.$$

Faktor varnosti zdrsa: $f_D = F_L / F_p \Rightarrow$

$$f_D = 2k_L \left(\frac{\rho_j}{\rho} \right) \left(\frac{A}{D^2} \right).$$

Za varnost mora veljati

$f_D > 1$, če $f_D = 1 \Rightarrow$ drsenje se prične.



VAJA:

$$L = 220 \text{ m}$$

$$a = 4,1 \text{ m}$$

$$b = 12,7 \text{ m}$$

$$H = 25,6 \text{ m}$$

$$k_L = 0,73, \rho_j = 2,92 \text{ g/cm}^3,$$

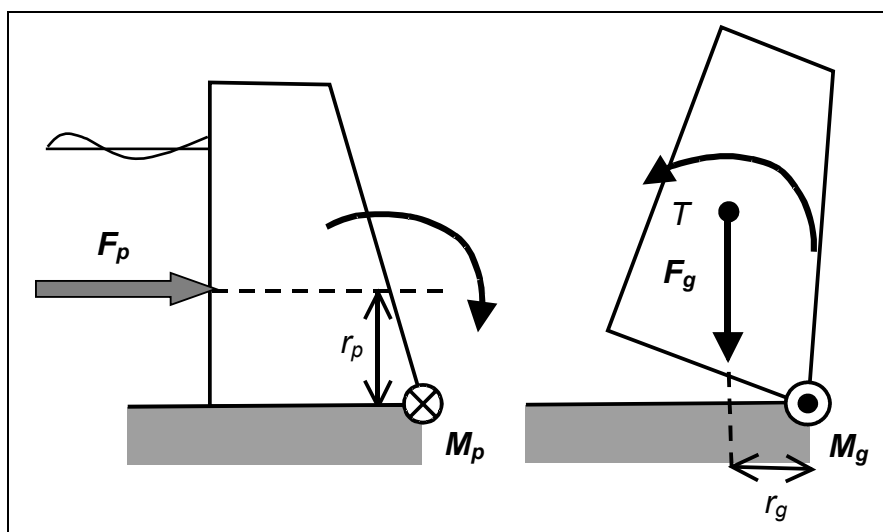
$$\rho = 1,0 \text{ g/cm}^3.$$

Kolik mora biti d, da bo

$$f_D = 1,8 ?$$

$$A = (a + b)H/2.$$

X.4.3 RAVNOVESJE NAVOROV PRI JEZOVIH



Sila

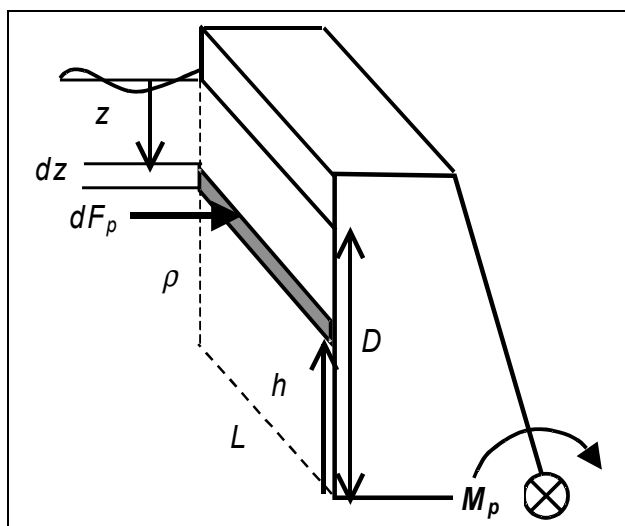
tlaka prejme v višini r_p , navor te sile $M_p = r_p F_p$, druga je sila teže jezu, ki ustvarja povratni navor $M_g = r_g F_g$. Za stabilnost mora veljati:

$$M_g > M_p \Rightarrow r_g F_g > r_p F_p.$$

X.4.4 Faktor varnosti pred zasukom jezu:

$$f_z = M_g / M_p = r_g F_g / (r_p F_p) > 1,$$

vendar ne poznamo r_g , r_p in F_p (M_p)



$$dF_p = p dS = p L dz =$$

$$dF_p = \rho g z L dz, \rho \text{ ni } \rho(z), L$$

$$\text{tudi ni } L(z)$$

$$F_p = \int_0^D L \rho g z dz = L \rho g \frac{D^2}{2} F_p = \langle p \rangle S,$$

$$\langle p \rangle = \rho g z L / 2$$

$$dM_p = h dF_p =$$

$$dM_p = (D-z)\rho L dz$$

$dM_p = (D-z) \rho g L dz$, s podobno integracijo kot pri sili tlaka izračunamo navor sile tlaka kot:

$$M_p = \rho g L \frac{D^3}{6} = r_p F_p = r_p \rho g L \frac{D^2}{2} \Rightarrow r_p = D/3$$

prijemališče sile tlaka pri izvajanju navora okoli osi na dnu jezua, ki je merjeno od dna jezua navzgor, je na eni tretjini višine vode za jezom D.

VAJA

$$L = 95 \text{ m}$$

$$\rho_j = 2.88 \text{ g/cm}^3$$

Ko je voda 2,8 m pod vrhom jezua, je navor sile tlaka $M_p = 444 \text{ MNm}$. Kolika je višina jezua, če je gostota vode $\rho = 1,0 \text{ g/cm}^3$? Je pomembna gostota materiala jezua?

X.4.5 NAVOR UPIRANJA TEŽE JEZUA

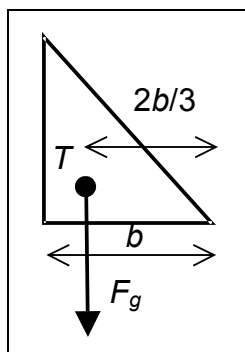
Sila, ki izvaja povratni navor jezua ni sila, ki se upira zdrsu – slednja je sila lepenja. Povratni navor jezua izvaja sila teže jezua: $M_g = r_g F_g$, silo teže običajno enostavno določimo iz geometrije jezua in gostote materiala, neznan je razdalja r_g od osišča do nosilke sile teže – gre za koordinato težišča glede na osišče, ki se za vsako geometrijo jezua izračuna po formuli:

$$r_g = \int x dm/m, \text{ ker je } m = \rho_j V_j = \rho_j A L \text{ in } dm = \rho_j dV_j = \rho_j L dA \Rightarrow$$

$$r_g = \int x dA/A, \text{ kar pomeni, da integriramo po preseku A jezua. Brez izpeljav zapišimo, da velja}$$

za trikoten profil jezua z osnovnico b:

$$r_g = b/3.$$



Za trapezoidalen presek jezua z osnovnicama b in a ($b > a$) velja:

$$r_g = \frac{2b^2 + 2ab - a^2}{3(a + b)},$$

$$\text{navor teže } M_g = F_g r_g = \rho_j g A L r_g.$$

VAJA:

Izračunaj za jez trikotnega profila, ki ima višino $H = 56$ m in osnovnico $b = 21$ m, potrebno prečno širino jezu L , da bo navor sile teže $M_g = 26,3$ G Nm ($\rho_j = 2,72$ g/cm³).
($a = 0$), $A = bH/2$, $M_g = r_g F_g = F_g 2b/3 = \rho_j g A L 2b/3 \Rightarrow L$.

PONOVITEV: Faktor varnosti proti zasuku:

$$f_z = M_g / M_p = r_g F_g / (r_p F_p) > 1,$$

tokrat poznamo $M_g = \rho_j g A L r_g$, $M_p = \rho g L D^3 / 6 \Rightarrow$

$$f_z = 6 \left(\frac{\rho_j}{\rho} \right) \frac{A r_g}{D^3},$$

ki za trapezoidalen presek ($A = H(a+b)/2$), za katerega poznamo r_g postane funkcija razmerja gostot in dimenzij trapeza:

$$f_z = 6 \left(\frac{\rho_j}{\rho} \right) \frac{H(2b^2 + 2ab - a^2)}{D^3} > 1.$$

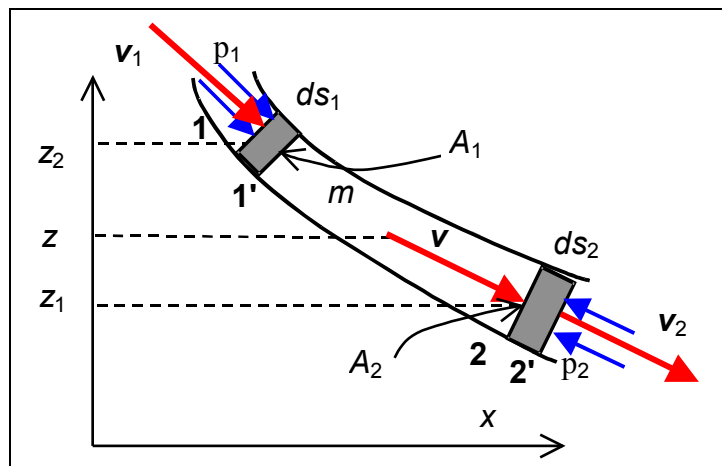
Ponovimo še faktor varnosti pred zdrsom:

$$f_D = 2k_L \left(\frac{\rho_j}{\rho} \right) \left(\frac{A}{D^2} \right) = 2k_L \left(\frac{\rho_j}{\rho} \right) \frac{(a+b)H}{2D^2}.$$

VAJA:

Jez trapezne oblike ima $f_z = 1,4$, višina vode $D = 48,3$ m, ki je $d = 2,2$ m pod vrhom jezu. Kolik je koeficient lepenja $k_{L \min}$ in kolika je osnovnica b ? ($\rho_j = 2,72$ g/cm³)

X.5 BERNOULLIJEVA ENAČBA - ENERGIJSKA ENAČBA TEKOČINE



Predpostavimo stacionarno gibanje – po cevi, ali pa znotraj tokovne cevi, ki je omejena s tokovnicami (črte, katerih tangente so hitrosti delcev). Stacionarno gibanje pomeni, da se hitrost toka na

enem mestu s časom ne spreminja. Če pa spremljamo delce tekočine, pa se njihova hitrost vzdolž trajektorje spreminja. Poleg tega predpostavimo, da se gostota tekočine ne spreminja pri pomiku 'cevi' tekočine med 1-2 v lego 1'-2'. Tekočina pri pomiku izgubi maso $dm_1 = \rho dV_1$, hkrati pridobi maso $dm_2 = \rho dV_2$. Velja ohranitev mase tekočine med 1-2 \Rightarrow

$$\rho dV_1 = \rho dV_2 \Rightarrow dV_1 = dV_2 \Rightarrow A_1 ds_1 = A_2 ds_2,$$

kjer sta A_1 in A_2 preseka v ustreznih legah.

Izrek o spremembi mehanske energije, ki pravi, da je delo zunanjih sil enako spremembi energije, zapišemo za del tekočine, ki se je nahajal med 1 in 2. Sila tlaka je tista, ki izvaja delo A_p , poleg dela izgub zaradi strižnih sil (trenje):

Delo sile tlaka – izgube zaradi striž. sil = ΔW .

$$W_{\text{pred pomikom}} = W_k + W_p = mv^2/2 + mgz$$

$$W_{\text{po pomiku}} = W_{\text{pred pomikom}} + dm v_2^2/2 + dmgz_2 - dm v_1^2/2 - dmgz_1$$

$$\Delta W = dm v_2^2/2 + dmgz_2 - dm v_1^2/2 - dmgz_1 = A_p$$

$A_p = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2$, delo sile tlaka p_2 je negativno, ker p_2 nasprotuje gibanju 'zamaška' tekočine od 2 do 2'.

Upoštevamo, da je $A_1 ds_1 = A_2 ds_2 = dV = dm/\rho$, pa zapišemo delo sile tlaka $A_p = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 \Rightarrow$

$$dm v_2^2/2 + dmgz_2 - dm v_1^2/2 - dmgz_1 = p_1 dm/\rho - p_2 dm/\rho,$$

enačbo delimo z maso dm in preuredimo:

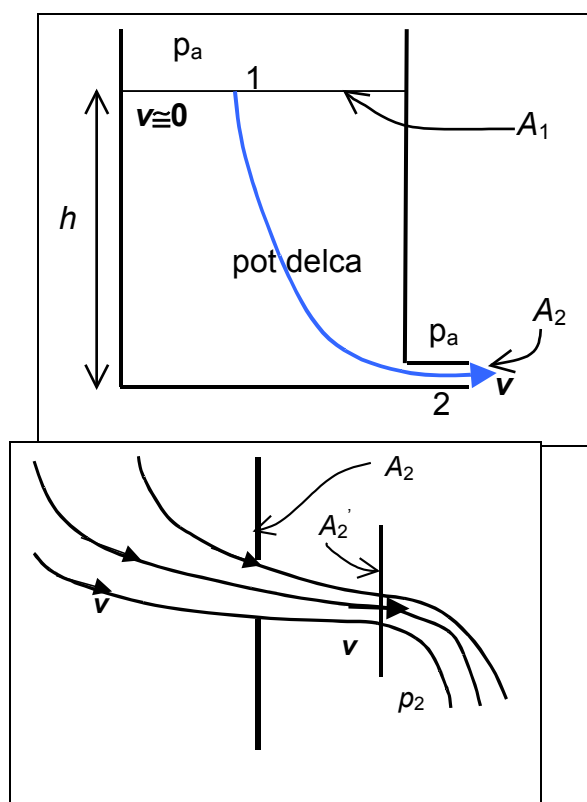
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2,$$

kar je Bernoullijeva enačba, ki je v tej obliki enačba za energijo tekočine na enoto mase. Delo izgub (strižnih, ali viskoznih sil) smo kar zanemarili. Enačbo zapišemo:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konst.}$$

vzdolž tokovnice, oz. tudi vzdolž poti delca tekočine.

VAJA 1:

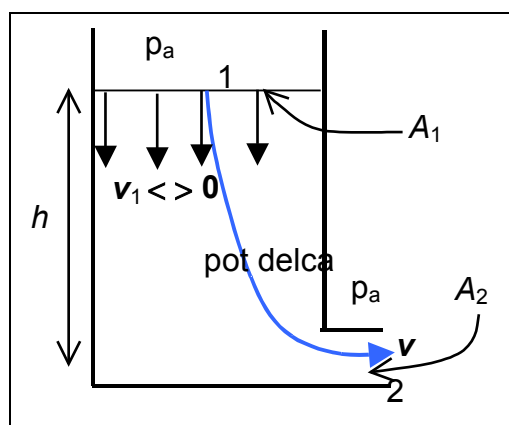


$h = 0,8 \text{ m}$, kolika je hitrost iztekanja, če zanemarimo izgube in če je površina preseka iztočne cevi

$A_2 \ll A_1$ – površina gladine. zapiši Bernoullijevo konstanto za točki 1 in 2. V resnici: $v = C_v (2gh)^{1/2}$,

$C_v = 0,8-0,9$ (izgube energije med 1 in 2). Pretok skozi odprtino pa utрпи dodatne izgube, ker hitrosti delcev skozi A_2 niso horizontalne, curek se tam še zožuje, zato se upošteva manjši presek A_2' : $\phi = vA_2' = C_a v A_2$, $\phi = C_a C_v (2gh)^{1/2} A_2$
 $\phi = C_d (2gh)^{1/2} A_2$, $C_d = C_a C_v < 1$.

VAJA 2:



Tokrat upoštevamo, da je hitrost na gladini $v_1 \neq 0$, preseka nista zelo različna,

$A_2 < A_1$, vendar odprtina nima velike vertikalne dimenzije.

V točki 1: $p_a/\rho + gh + v_1^2/2$,
 V točki 2: $p_a/\rho + v_2^2/2$, enačimo energijo v obeh:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh \Rightarrow$$

$v_2 = (v_1^2 + 2gh)^{1/2}$. Sprememba volumna zaradi spuščanja gladine $dV = A_1 v_1 dt$ je enaka spremembi volumna, ki zapusti sod skozi

pipo v enakem času: $dV = A_2 v_2 dt \Rightarrow$

$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = A_1 v_1 / A_2 = (v_1^2 + 2gh)^{1/2}$, kar je enačba za kvadrat hitrosti v_1 . Upoštevajmo, da se zaradi te hitrosti višina h zmanjšuje: $v_1 = -dh/dt$, uvedemo še brezdimenzijsko količino $\varepsilon =$

$A_2 / A_1 < 1$ in enačbo za v_1 zapišemo:

$(1 - \varepsilon^2) v_1^2 = 2gh\varepsilon^2 \Rightarrow (1 - \varepsilon^2)(dh/dt)^2 = 2gh\varepsilon^2$, kar vodi k enačbi za časovno spremembo višine gladine:

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2 2gh}{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{\varepsilon \sqrt{2g} \sqrt{h}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \text{ kjer smo z}$$

negativnim predznakom upoštevali upadanje gladine. Ločimo spremenljivke, h na levo stran enačbe, t na desno stran in

$$\text{integriramo} \Rightarrow \int_{h_0}^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\varepsilon \sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$2(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}) = -\frac{\sqrt{2g}\varepsilon t}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \Rightarrow h = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{\varepsilon t}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2, \text{ ali}$$

$$h = h_0 \left(1 - \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \frac{\varepsilon t}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2.$$

Največji možni čas iztekanja se pojavi takrat, ko je $h = 0 \Rightarrow$

$$1 = \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \frac{\varepsilon t_{\max}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \Rightarrow t_{\max} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

VAJA: $h_0 = 1 \text{ m}$ in $h_0 = 10 \text{ m}$

X.6 PRETOK VOLUMNA, PRETOK MASE

Pretok volumna: $\phi_V = dV/dt$, ker $dV = S dx$ in $dx = v dt \Rightarrow$

$$dV = S v dt \Rightarrow$$

$$\phi_V = S v$$

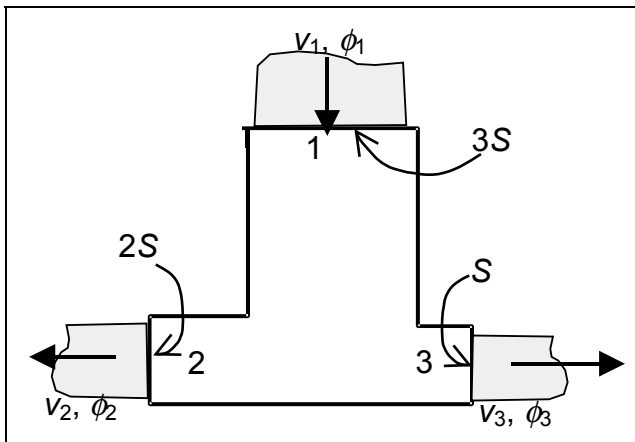
V primeru iztekanja iz sode je $\phi_V = A_2 v$. Masni pretok:

$$\phi_M = dm/dt, dm = \rho dV \Rightarrow$$

$$\phi_M = \rho S v$$

VAJA 1:

$$S = 10 \text{ cm}^2 = S_3, v_1 = 5 \text{ m/s}; S_2 = 2S, \phi_2 = 9 \text{ l/s}; S_1 = 3S$$



$v_2 = ? v_3 = ?$ Kaj, če $\phi_3 = 0$?

Ravnovesje volumskih

pretokov: $\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$

$$v_2 = \phi_2 / S_2 = \phi_2 / (2S) \phi_1 =$$

$$S_1 v_1 = 3 S v_1 \phi_3$$

$$= \phi_1 - \phi_2$$

VAJA 2

Turbina:

$$S_1 = 300 \text{ cm}^2$$

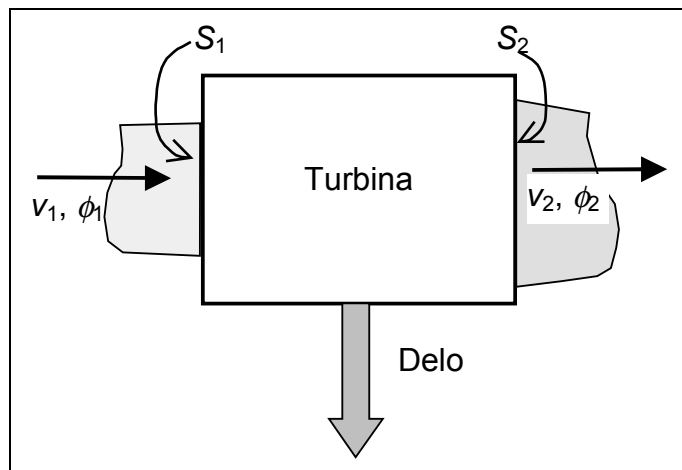
$$S_2 = 2S_1$$

$$\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$$

$$P = 120 \text{ kW} - \text{moč}$$

obratovanja

$$v_1 = ? v_2 = ?$$



$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

$$P = A_{od} \dot{A}$$

V času t priteče masa $m = \phi_{M1} t = \rho \phi_1 t = \rho S_1 v_1 t$. Voda pridvi z

W_{k1} in turbino zapusti z manjšo $W_{k2} \Rightarrow$

odvedeno delo: $A_{od} = W_{k1} - W_{k2} = P t \Rightarrow$

$$P = \frac{\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}}{t} = \frac{m}{2t} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{\phi_{M1}}{2} (v_1^2 - v_2^2)$$

$$P = \frac{\rho S_1 v_1}{2} (v_1^2 - v_2^2); \quad v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2}$$

$$P = \frac{\rho S_1 v_1}{2} \left(v_1^2 - \frac{v_1^2 S_1^2}{S_2^2} \right) = \frac{\rho S_1 v_1^3}{2} \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right)$$

$$v_1 = \left[\frac{2P}{\rho S_1 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right)} \right]^{1/3}$$

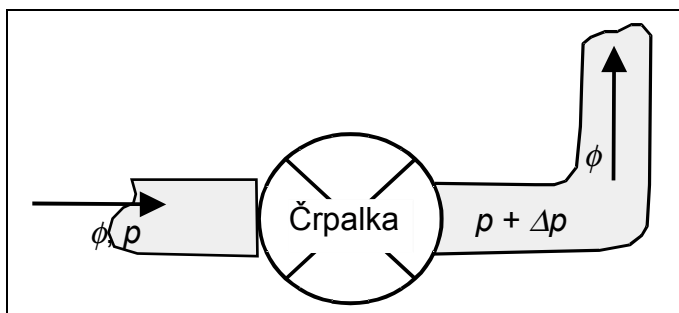
Izkoristek turbine: $\eta = (W_{k1} - W_{k2}) / W_{k1} = A_{\text{od}} / W_{k1}$

$$\eta = Pt / W_{k1} =$$

$$\eta = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)2}{2mv_1^2} = 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} = 1 - \frac{v_1^2 S_1^2}{v_1^2 S_2^2} = 1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Če $v_2 = 0 \Rightarrow 100\%$ izkoristek po tej formuli.

VAJA 3



Porabljena moč črpalke

$$P_o = 8,5 \text{ kW}$$

$$\Delta p = 5 \text{ bar}$$

$$\phi = 40 \text{ m}^3/\text{h}$$

Izkoristek črpalke?

$$A_{\text{dov}} = A_{\text{por}}$$

$$\eta = A_{\text{odd}} / A_{\text{dov}} = (P_{\text{odd}}$$

$$\text{dt}) / (P_o \text{ dt}) = P_{\text{odd}} / P_o.$$

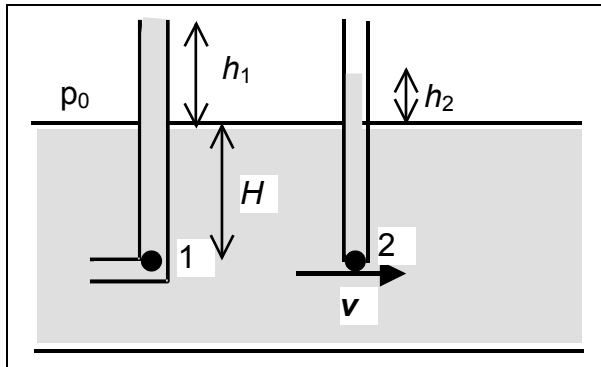
Črpalka premaguje delo sile tlaka – toliko dela mora opraviti:

$$= F dx = \Delta p S dx = \Delta p dV.$$

$$\text{Ker je } \phi = dV/dt \Rightarrow dV = \phi dt \Rightarrow F dx = \Delta p \phi dt \Rightarrow$$

$$P_{\text{odd}} = \Delta p \phi; \quad \eta = \Delta p \phi / P_o$$

VAJA 4



Meritve hitrosti z zastojnim tlakom.

V ustju cevke 1 se tekočina ustavi, teče pa mimo lege 2.

$$\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$$

$$H = 5 \text{ cm}, p_0 = 1 \text{ bar}$$

$$h_1 = 4 \text{ cm}, h_2 = 2 \text{ cm}$$

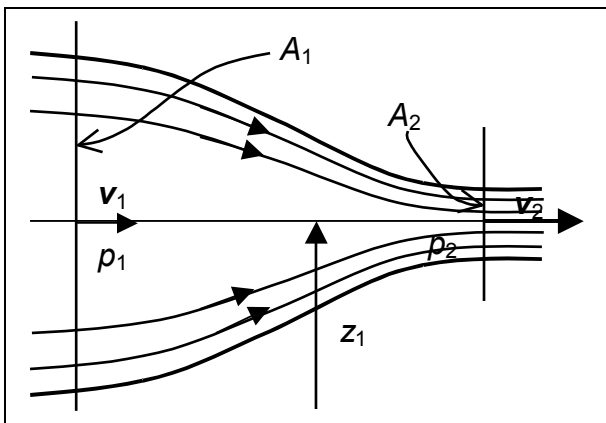
$$v = ?$$

$$p_1 = \rho g(h_1 + H); \quad p_2 = \rho g(h_2 + H)$$

Bernoullijeva enačba:

$$p_1/\rho + 0 = p_2/\rho + v^2/2 \Rightarrow v = (2g(h_1 + h_2))^{1/2}; \quad p_1 - p_2 = \text{zastoj. tlak} = \text{gostoti } W_k.$$

VAJA 5



Gasilska cev:

$$\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$$

$$A_1 = 12 \text{ cm}^2, A_2 = 3 \text{ cm}^2$$

$$\phi = 2,4 \text{ l/s}, p_1 = 250 \text{ kPa}$$

$$p_2 = ?$$

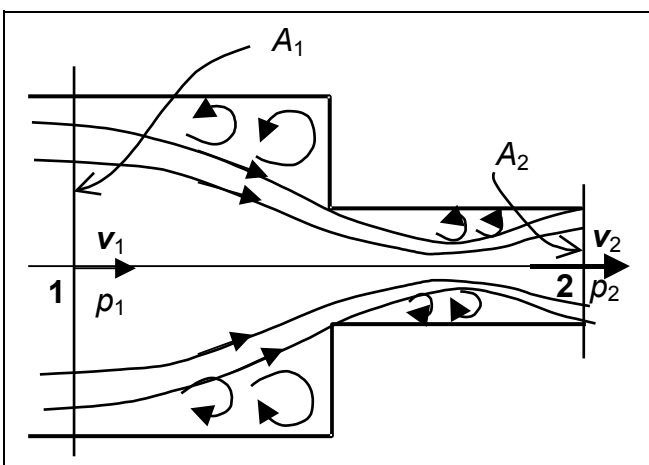
$$p_1/\rho + v_1^2/2 = p_2/\rho + v_2^2/2$$

$$p_2 = p_1 + \rho(v_1^2 - v_2^2)/2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \phi,$$

$$p_2 = p_1 + \rho \phi^2 (1/A_1^2 - 1/A_2^2)/2$$

VAJA 6



$$A_1 = 9 \text{ cm}^2, A_2 = 3 \text{ cm}^2,$$

$$\phi = 2, \text{ l/s}, p_1 = 150 \text{ kPa}$$

$$K = 0,34 \quad p_2 = ? \quad v_2 = ?$$

Iztekanje skozi naglo zoženje cevi. V območju vrtinčenj ob steni cevi (separacija) je zmanjšan tlak in se pojavijo izgube.

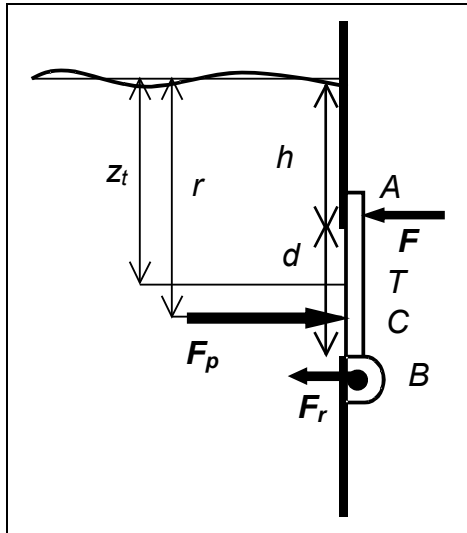
Točka 1 je dovolj vzvodno, da ni prizadeta z vrtinčenjem ob zožitvi. V

točki 2 pa izgube energije označimo z energijsko višino izgub $h = K v_2^2/2$:

$$p_2/\rho + v_2^2/2 + h = p_1/\rho + v_1^2/2 \Rightarrow$$

$$p_2/\rho + v_2^2/2 (1 + K) = p_1/\rho + v_1^2/2$$

VAJA 7



Rezervoar vsebuje gorivo gostote 700 kg/m^3 . Pri strani ima krožno odprtino premera $1,8 \text{ m}$, ki je zaprta z loputo, ki imajo tečaj na spodnji strani. Nivo goriva je 2 m nad zgornjim robom odprtine. Izračunaj celotno silo tlaka na vrata F_p , silo na zapah na zgornji strani odprtine F in reakcijsko silo tečaja F_r . Kolike pa bi bili poslednji dve sili, če bi bil tečaj lopute na zgornji strani odprtine in zapah na spodnji?

Lega težišča lopute T je $z_t = h + (d/2) = 2,9 \text{ m}$

Lega prijemališča sile tlaka C pod težiščem T je $z_p = r - z_t = r_J^2 / z_t$, za krožno odprtino je

$$r_J^2 = d^2/16 \text{ (predavanja 'Center tlaka')} \Rightarrow$$

$$z_p = r - z_t = 1,8^2 / (16 * 2,9) \text{ m} = 0,07 \text{ m.}$$

$$F_p = \text{povprečen tlak} * \text{površina odprtine}$$

$$F_p = \rho g z_t \pi d^2 / 4 = 700 * 9,8 * 2,9 * 1,8^2 * \pi / 4 \text{ N} = 50,62 \text{ kN}$$

I. Navori okoli tečaja v legi B so v ravnovesju:

$$F d = F_p (d/2 - z_p) \Rightarrow F = F_p (d/2 - z_p) / d = F_p (0,5 - z_p/d)$$

$$F = 23,34 \text{ kN.}$$

$$\text{Reakcijska sila tečaja pa je: } F_r = F_p - F = 27,28 \text{ kN.}$$

II. Tečaj v legi A, zapah s silo F v legi B. Ravnovesje navorov okoli A: $F d = F_p (d/2 + z_p) \Rightarrow F \Rightarrow F_r = F_p - F$

X.7 REYNOLDSOVO ŠTEVILO

Strižna napetost

$$\tau = F/A = \mu \, du/dy$$

μ je dinamična viskoznost [kg/(ms)], lastnost tekočine.

μ [kg/(ms)]	snov ($T = 20^\circ\text{C}$)
0,001	voda
0.0016	Hg
1.5	glicerin
$\cong 0,12$	strojno olje

Vpeljemo brezdimenzijsko Reynoldsovo število:

$$Re = \text{inercialna sila} / \text{viskozna sila}$$

Inercialna sila je vztrajnostna sila, ki se po 2. Newton. zakonu oceni kot masa * pospešek. Naj je značilna dimenzija telesa, ki potuje po tekočini enaka l , njegov volumen je tedaj v grobem $V \cong l^3$, masa kot $m \cong \rho l^3$, značilna hitrost u s katero gre tekočina mimo telesa (ali hitrost, s katero telo prepotuje razdaljo enako njeni dimenziji) $u \cong l / t$ in pospešek $a \cong l / t^2$. Inercialna sila se tedaj oceni kot

$$F_i = m a \cong \rho l^3 l / t^2 = \rho l^2 u^2.$$

Viskozna sila se oceni kot $F_v = \tau A \cong \tau l^2 = \mu \, du/dy l^2$

$$F_v \cong \mu \, du/dy l^2 \cong \mu (u/l) l^2 = \mu u l$$

Tedaj je: $Re = F_i / F_v = (\rho l^2 u^2) / (\mu u l)$

$$Re = (\rho l u) / \mu = l u / \nu,$$

kjer je $\nu = \mu / \rho$

viskoznost ($\cong 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ za vodo).

kinematična

X.8 STOKESOV ZAKON UPORA

Re število je merilo za stopnjo turbulence v tekočini. V grobem velja:

$Re < 2000$ tok tekočine je laminaren

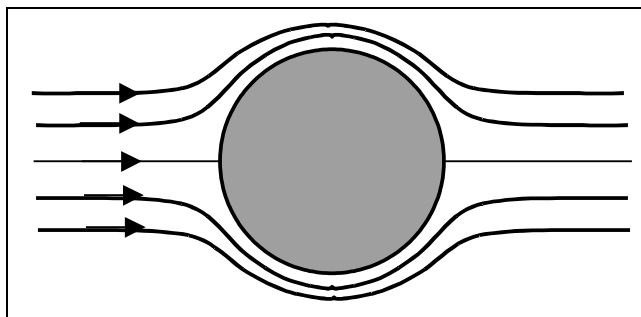
$Re > 2000$ tok je turbulenten pri običajnih pogojih v naravi. Tedaj se v opazovani točki tekočine hitrost stalno spreminja, ima izrazite fluktuacije. Vendar pa je lahko povprečenje te hitrosti po primerno dolgem času neodvisno od začetnega trenutka povprečevanja. V tem primeru je turbulenten tok stacionaren, $\langle u \rangle$ ni funkcija časa. V posebnih pogojih (skorajda brez vibracij) so uspeli v laboratoriju izvesti, da je tudi pri $Re = 50000$ tok laminaren. *Re* število je pomembno pri obtekanju poljubnih teles. Skoraj zagotovo lahko rečemo, da velja:

$Re \leq 1$ laminaren tok

$Re \geq 10^4$ turbulenten tok, če

$1 < Re < 10^4$ prehodni režim, nestabilen.

Naj je $Re \leq 0,5$, pri obtekanju kroglice:



$$F_v = 6 \pi R \mu u$$

Velja: $du/dr \cong 1,5 u/R$
Zaviralna tangencialna sila na površini kroglice se tedaj oceni kot:

$$F_v = A \mu du/dy = 4 \pi R^2 \mu 1,5 u/R$$

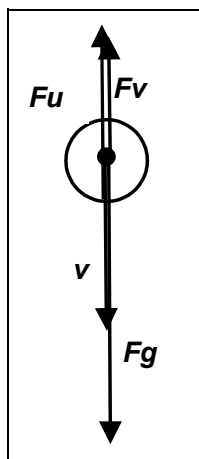
Stokesov zakon

upora, ki pravi:

Za laminarno obtekanje tekočine ($Re \leq 1$) okoli kroglice je sila premosorazmerna s hitrostjo toka (ali s hitrostjo gibanja kroglice).

VAJA:

Kroglica gostote ρ in polmera R enakomerno pada v tekočini z viskoznostjo μ in gostoto ρ_0 . Kako je hitrost padanja odvisna od gostot?



Enakomerno vertikalno gibanje, vsota vseh sil je enaka nič:

$$F_u + F_v = F_g$$

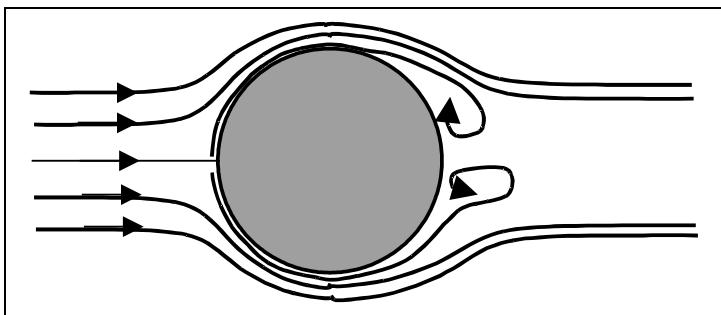
$$F_g = mg = \rho Vg = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 g$$

$$F_v = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 g$$

$$F_u = 6 \pi R \mu v$$

Vse tri sile vstavimo v ravnovesno enačbo, izrazimo hitrost kot:

$$v = \frac{2}{9} R^2 g (\rho - \rho_0) / \mu - \text{laminarno gibanje}$$

X.9 SILA UPORA PRI TURBULENTNEM GIBANJU

Naj je $Re \geq 10^4$, turbulentno obtekanje krogle.

V tanki plasti okoli krogle viskozna tekočina vleče za seboj počasnejše dele tik ob steni. Na zadnji strani se tekočina 'odlepi' od telesa in se zavrtinči. S tem pride do tlačne razlike med sprednjim in zadnjim delom telesa 'spredaj je večja hitrost, zato manjši tlak kot zadaj. Ta tlačna razlika potiska telo proti toku – telo izvaja silo upora proti toku. Gre za dinamičen upor, ki je sorazmeren zastojnemu tlaku in prečnemu preseku A ovire. Zastojni tlak je po Bernoullijevi enačbi sorazmeren $u^2/2$:

$$F_d = C_d A \rho u^2 / 2$$

$F_d = C_d A \rho u^2 / 2$, C_d je koeficient upora ('drag coefficient'). Ta sila upora je zelo potgosta in nastopa tudi pri obtekanju plovila, pri toku vode skozi cev pipe, sila vetra ipd.

C_d	oblika
0,04	kapljica
0,2-0,5	krogla
0,4	izbočena polkrogla
1,3	vbočena polkrogla (padalo)
1,1	plošča krožnega preseka