Spoštovana študentka in cenjeni študent

Veseli me, da Vas ta predmet zanima. Na tem mestu so zapisana nekatera pojasnila dokumentov, ki se nanašajo na drugi del predmeta Mehanika in hidromehanika. Drugi del predmeta namreč obsega predvsem dinamiko in osnove hidromehanike. Prvi del tega predmeta obsega statiko, ki jo predava prof. Milan Batista. Slednji je tudi nosilec predmeta. Pogoj za pristop k ustnemu izpitu je pozitivna ocena iz kolokvijev, tako iz statike kot iz dinamike, ali pa pozitivna ocena pisnega izpita iz teh dveh delov predmeta.

Priloženi dokumenti niso skripta za navedene vsebine, pač pa so prirejeni zapiski predavanj za predstavitev vsebin na prosojnicah. Gre torej za zaporedje prosojnic, ki se nahaja v 15-ih word dokumentih. Vmes so tudi nekatere vaje. Ene vaje so rešene in služijo kot primeri obravnavanih vsebin. Druge vaje pa so zgolj nakazane in se rešujejo pri vajah, ki predavanjem sproti sledijo. Omeniti velja, da tudi vsebina še ni dokončna. Morda bom tudi katero od obstoječih vsebin zgostil, drugo pa obarval s kakšnimi zanimivimi primeri. Nekoč bodo te prosojnice predelane v obliko, ki je primerna za skripto.

Ker gre za prvo elektronsko verzijo zapiskov predavanj za prosojnice, je v njej zagotovo precej napak. Tako npr. opažam, da v natisnjeni obliki vektorske količine, ki naj bi bile pisane s poudarjenim in odebeljenim tiskom, niso odebeljene v slikah, kot tudi ne v nekaterih izrazih. Zaradi barvnih slik nekatere skice natisnjene v črno-belem tisku niso primerno jasne. Prisotne so tudi vsebinske, kot tipkarske napake, tu in tam so stavki niso v celoti zapisani. Vendar sem mnenja, da bodo zapiski tudi v takšni obliki lahko študentu v pomoč, zato sem se odločil, da naj bodo objavljeni na spletni strani fakultete in sicer na:

www.fpp.edu/~milanb/tpmeh/malacic

Vsem, ki me bodo opozorili na napake, pa morda tudi svetovali, kako jih odpraviti, se v naprej zahvaljujem.

S pozdravi,
http://www.mbss.org

izred.prof.dr. Vlado Malačič
malacic@mbss.org

Piran, 14. feb. 2008

PREGLED PREDAVANJ

OSNOVE DINAMIKE

I. Newtonovi zakoni - ponovitev

II. Matematične osnove in definicije nekaterih fizikalnih količin

Kaj je vektorska količina? Kaj skalar? Razlika in vsota dveh vektorjev Skalarni produkt in delo sile
Vektorski produkt in navor sile
Časovni odvod skalarne in vektorske količine (trenutna hitrost in pospešek, moč)
Časovni integrali (hitrost kot funkcija pospeška, opravljena pot kot funkcija hitrosti)
Kartezični in polarni koordinatni sistem v ravnini

III. Opis gibanja

Tirnica, parametrični zapis gibanja in opravljena pot
Premočrtno gibanje
Kroženje - osnovne lastnosti
Enakomerno kroženje in centripetalna sila, neenakomerno kroženje
Inercialen in rotirajoči opazovalni sistem , Coriolisova in centrifugalna sistemska sila
Nihanje (projekcija kroženja)

IV. Ravnovesje telesa

Newtonovi zakoni
Pogoji za ravnovesje točkastega telesa
Vztrajnost in sprememba gibanja togega telesa
Sila lepenja in trenja, aktivne in reakcijske sile, vztrajnostna sila
Ravnovesje navorov, navor vzporednih sil, težišče, navor dvojice sil, gonilni navor

V. Vrtilna količina

Izrek o vrtilni količini točkastega telesa (vztrajnostni moment točkastega telesa)
Vrtilna količina sistema točkastih teles
Vrtilna količina in vztrajnostni moment togega telesa
Steinerjevo pravilo, primeri vztrajnostnega momenta
Vrtenje togega telesa, gavne osi vrtenja
Ohranitev ravnovesja za togo telo

VI. Delo in energija

Delo pri translatornem gibanju in pri rotaciji telesa
Kinetična energija togega telesa
Potencialna energija, delo konzervativnih sil
Prožnostna energija
Izrek o ohranitvi mehanske energije

Literatura

1. *Stropnik J., 1987. Osnove dinamike, VPŠ Piran.*
2. *Kladnik R., 1974. Osnove fizike, I, DZS.*
3. *Žitnik Janez, 2002. Fizikalne naloge, I. Del. Tehniška založba Slovenije.*
4. *Hannah J. In Hillier M. J., 1971, 3rd ed. 1995. Applied Mechanics. Person Education Limited, Harlow, UK.*
5. Kittel C., W. D. Knight, M.A. Ruderman, 1979 (1982). Mehanika (v hrvaščini), Tehnička knjiga , Zagreb ((prevod 'Mechanics', Berkeley Univ.)

6. Muršič M., 1991. Osnove tehniške mehanike, III, Dinamika, Akademska založba
7. Kladnik R., 1975. Zbirka fizikalnih problemov z rešitvami (Mehanika, toplota, akustika), DZS.
8. Kladnik R. In Šolinc H., 1996. Zbirka fizikalnih nalog z rešitvami, I, DZS

Pregled predavanj

OSNOVE HIDRODINAMIKE

VII. Definicija tekočine, laminaren in turbulenten tok

VIII. Strižna napetost in viskoznost

IX. Kontinuitetna enačba, tok po ceveh

X. Hidrostatika (HS paradoks, HS sila, jezovi in rezervoarji, statična sila vzgona, metacenter)

XI. Bernoullijeva enačba (Ventourijeva cev)

XII. Uporaba Bernoullijeve enačbe (sod, zastojni tlak)

XIII. Poiseuillov tok (za viskozno tekočino ne velja Bernoullijeva enačba)

XIV. Reynoldsovo število, Stokesov zakon upora,

XV. Dinamični upor kot posledica porazdelitve

- tangencialne napetosti po površini telesa (kožni efekt)
- hitrosti tekočine in s tem tlaka tekočine na telo

XVI. Dinamična sila vzgona

Literatura

1. Stropnik J., 1987. Osnove hidrodinamike
2. Kladnik R., 1974. Osnove fizike, I, DZS.

Predavanja so na:

www.fpp.edu/~milanb/tpmeh/malacic

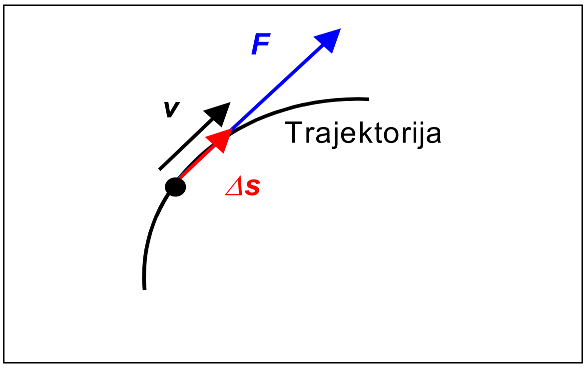
1. Newtonovi zakoni - ponovitev

1. Prvi, drugi in tretji NZ

I. MATEMATIČNE OSNOVE S FIZIKO

I.1 SKALARNI PRODUKT IN DELO SILE

I. Kaj sta vektorska in skalarna količina, razlika in vsota vektorjev
II. Osnove trigonometričnih funkcij in približki za majhne kote, kot (radiani) in lok
III. Naj je majhen pomik točkastega telesa $\Delta \mathbf{s}$ $\uparrow\uparrow$ s silo $\mathbf{F}$.



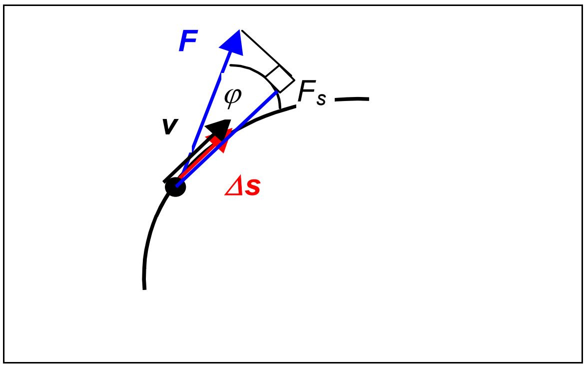
Definicija:

Delo sile ΔA pri majhnem pomiku je definirano kot:

$$\Delta A = F\,\Delta s$$

Sila $\mathbf{F}$ je konstanta med majhnim pomikom telesa $\Delta \mathbf{s}$.

IV. Majhen pomik točk. telesa ni vzporeden s silo ($\Delta \mathbf{s}$ $\not\uparrow\uparrow$ $\mathbf{F}$)



Delo sile ΔA pri majhnem pomiku je definirano kot:

$$\Delta A = \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{s},$$

kjer • označuje skalarni produkt dveh vektorjev. Zopet si zamislimo, da je delo sestavljeno iz produkta tiste komponente sile F_s, ki je vzporedna s pomikom, torej:

$\Delta A = \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{s} = F_S\,\Delta s$. V pravokotnem trikotniku je

$\varphi = \underline{\qquad\qquad} = \frac{F_S}{F} \Rightarrow F_S = F\cos\varphi$. Zato je delo sile ***F***, ki ni vzporedna s pomikom ***ds*** enako:

$$\Delta A = F \cos \varphi \, \Delta s.$$

Celotno delo zunanje sile vzdolž gibanja telesa pa je vsota del sile vseh drobnih pomikov:

$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta A_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{i} F_i \Delta s_i \cos\phi_i = \int F\cos\phi \, ds = \int \boldsymbol{F}\bullet \boldsymbol{ds}\,.$$

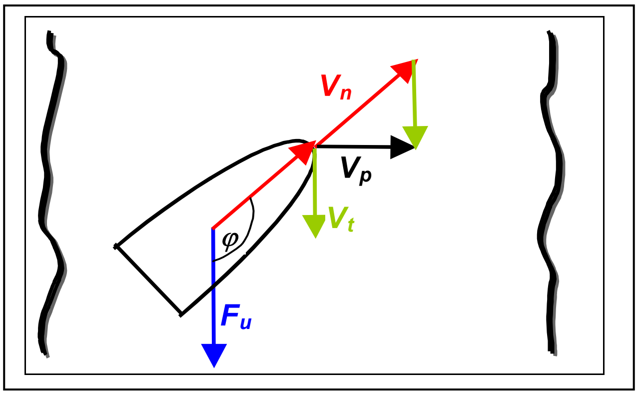
Če je sila konstantna med gibanjem telesa (ohranja jakost in smer glede na smer gibanja), jo lahko postavimo izven integrala

$$A = \int F\cos\varphi \, ds = F\cos\varphi \int ds = F\cos\varphi \, s = Fs\cos\varphi = \boldsymbol{F}\bullet s$$

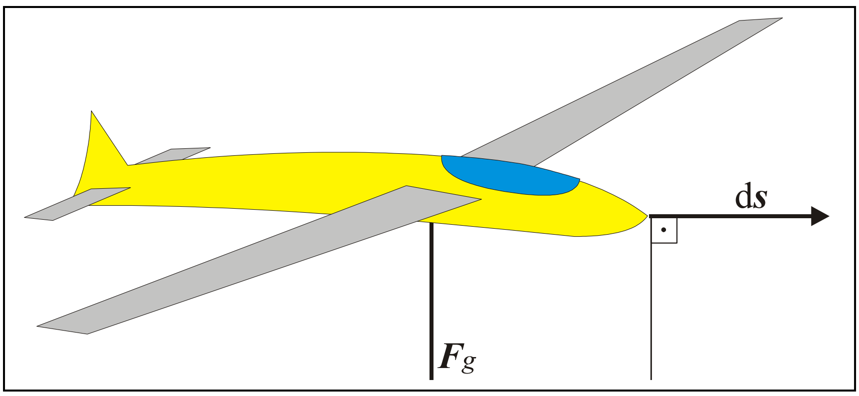
Delo je enostaven skalarni produkt vektorja sile in vektorja opravljenega premočrtnega pomika poti samo takrat, ko je sila konstantna (gibanje pa premočrtno). A = ***F*** • ***s***, Če ***F*** ↑↑ ***s*** je $A=Fs$. Enota za delo: [N m = kg (m/s^2) m = kg m^2/s^2 = J].

Vaje

1. Gibanje plovila pod kotom glede na rečni tok.



2. Letalo, delo sile teže pri horizontalnem gibanju



Če sta

sila in pomik pravokotna, $\varphi = \pi/2$, cos $\varphi = 0$ in je delo sile pri pomiku $d\boldsymbol{s}$: $dA = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s} = 0$, zato je tudi celotno delo, ki je vsota teh prispevkov

$$A = \int F \cos\varphi \, ds = \int \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s} = 0.$$

Delo sile, ki je pravokotna na pomik telesa, na katerega sila deluje, je enako nič.

I.2 DEFINICIJA MOČI

$$\text{MOČ} = P = \text{delo na časovno enoto} = \frac{dA}{dt}$$

Enota za moč: [W = J/s = N m /s = kg (m/s^2) m/s = kg m^2 s^3].
Diferencial dela je sorazmeren z močjo dA = P dt, delo je časovni integral moči:

$$A = \int dA = \int P dt$$

Če je moč P = konst., samo tedaj velja, da je

$$A = P \int dt = Pt\,.$$

Ker velja $dA = F \cos \varphi \, ds$, je moč

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{F \cos\varphi \, ds}{dt} = F \cos\varphi \; v = Fv\cos\varphi = \boldsymbol{F} \bullet v\,,$$

kjer je $\boldsymbol{v}$ hitrost točkastega telesa. Če je $\boldsymbol{F} \uparrow\uparrow \boldsymbol{v}$, je cos φ = 1, samo tedaj velja za trenutno moč, ki je funkcija časa t:

$$P(t) = F v,$$

v vsakem trenutku – ni nujno, da sta sila in hitrost konstantni.

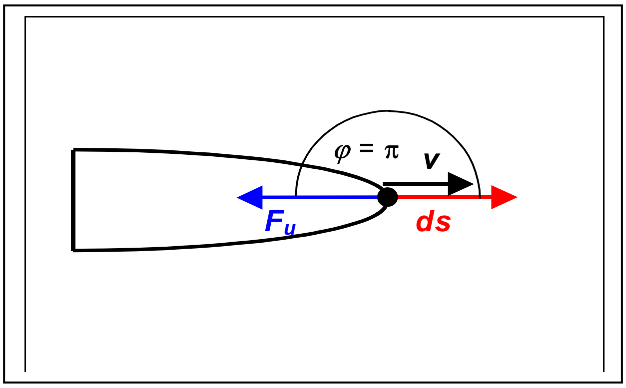
Vaje
Povprečna vlečna moč motorja vozila je 30 kW. Koliko je delo, ki ga opravi motor v eni minuti? Koliko pa je, če upoštevamo, da je izkoristek motorja 80 %?. Naj elektromotor požene vozilo mase 1200 kg z mesta s stalnim pospeškom. Kolika je končna hitrost vozila?

m = 1200 kg
P = 30 kW
t = 60 s
η = 0,8

A = P t = 18 x 10^5 J
$A = \Delta W = W_k - W_{k0} = W_k = mv^2/2 \Rightarrow v = (2A/m)^{1/2}$

$A_o = \eta A \Rightarrow v_0 = (2A_0/m)^{1/2} = (2\eta A/m)^{1/2}$

3. Plovilo, delo sile upora



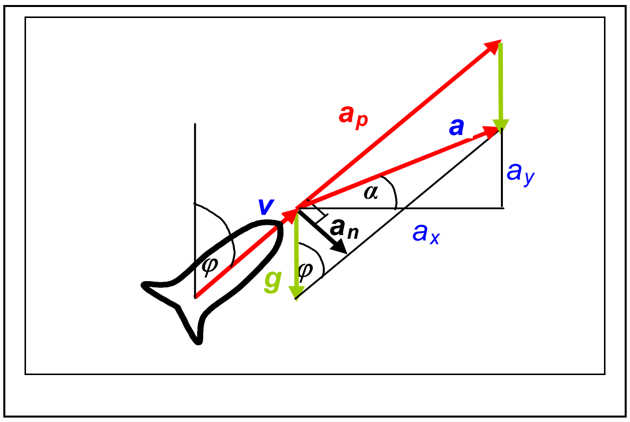
$\boldsymbol{F}_u \uparrow\downarrow \boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{F}_u \uparrow\downarrow \boldsymbol{ds}$

$dA = \boldsymbol{F}_u \bullet \boldsymbol{ds} = F_u\, ds \cos\pi$
$dA = -F_u\, ds < 0.$
Sila, ki nasprotuje gibanju, opravi ***negativno*** (zaviralno) delo.

VAJE: Kladnik, 1996, str. 14, vaja 1.33, str. 12, vaja 1.26.

4. Raketa, njeni pospeški

VAJE: Hannah and Hillier, 1971, vaje 1, 2 str. 69:



$a_n = a \sin\varphi$

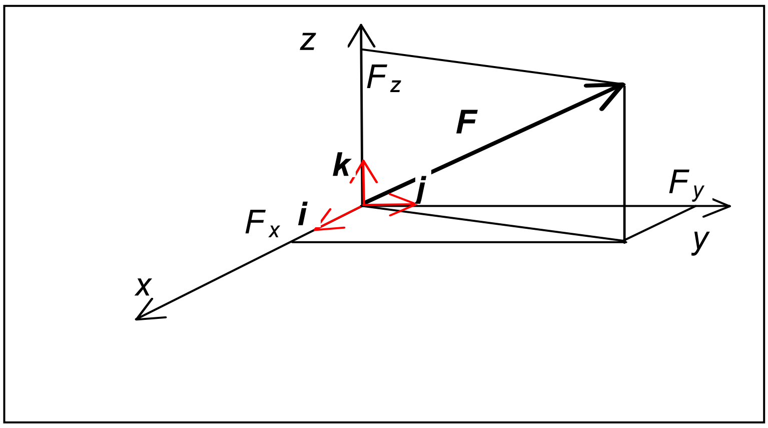
Celotni pospešek je vektorska vsota:
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_p} + \boldsymbol{g} = (a_x, a_y)$
njegova jakost: iz skalarnega produkta
$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a} = a^2 = (\boldsymbol{a_p} + \boldsymbol{g})^2$

$\boldsymbol{a_p} = (a_p\sin\varphi, a_p\cos\varphi)$, $\boldsymbol{g} = (0, -g)$,

$\tan\alpha = a_y/a_x$

$\boldsymbol{a} = (a_p\sin\varphi, a_p\cos\varphi - g) = (a_x, a_y)$, $a_x = a_p\sin\varphi$, $a_y = a_p\cos\varphi - g$
$a^2 = (\boldsymbol{a_p} + \boldsymbol{g})^2 = (\boldsymbol{a_p} + \boldsymbol{g}).(\boldsymbol{a_p} + \boldsymbol{g}) =$
$(a_p\sin\varphi, a_p\cos\varphi - g).(a_p\sin\varphi, a_p\cos\varphi - g) = a_p^2\sin^2\varphi + (a_p\cos\varphi - g)^2$
$a^2 = a_p^2\sin^2\varphi + a_p^2\cos^2\varphi + g^2 - 2\, a_p\cos\varphi\, g$
$a = (a_p^2\sin^2\varphi + a_p^2\cos^2\varphi + g^2 - 2\, a_p g\cos\varphi)^{1/2}$
$\alpha = \mathrm{Atan}(a_y/a_x) = \mathrm{Atan}((a_p\cos\varphi - g)/\, a_p\sin\varphi)$

I.3 KOMPONENTNI ZAPIS SKALARNEGA PRODUKTA



Enotni vektorji:

$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$
$\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$
$\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$

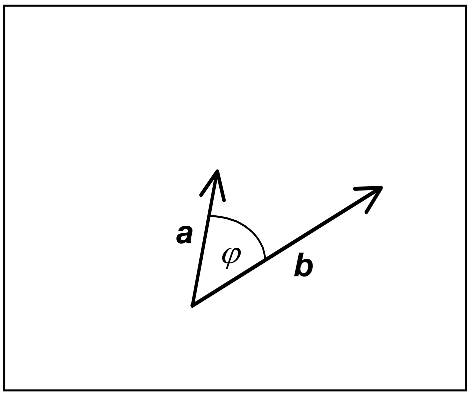
$|\boldsymbol{i}| = 1 = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}|$

Komponentni zapis vektorja sile:

$\boldsymbol{F} = F_x\, \boldsymbol{i} + F_y\, \boldsymbol{j} + F_z\, \boldsymbol{k} = F_x\,(1, 0, 0) + F_y\,(0, 1, 0) + F_z\,(0, 0, 1)$
$\boldsymbol{F} = (F_x, 0, 0) + (0, F_y, 0) + (0, 0, F_z) = (F_x, F_y, F_z)$

Majhen pomik točkastega telesa $d\boldsymbol{s} = (dx, dy, dz)$
$d\boldsymbol{s} = dx\, \boldsymbol{i} + dy\, \boldsymbol{j} + dz\, \boldsymbol{k}$. Delo sile na telo pri majhnem pomiku:

$dA = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s} = (F_x\, \boldsymbol{i} + F_y\, \boldsymbol{j} + F_z\, \boldsymbol{k}) \bullet (dx\, \boldsymbol{i} + dy\, \boldsymbol{j} + dz\, \boldsymbol{k})$



Skalarni produkt dveh vektorjev ***a*** in ***b***:
$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = ab \cos \varphi$ $\{= 0,$ če $\varphi = \pi/2\}$
$\{= ab,$ če $\varphi = 0\}$
zato: $\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{i} = 1\ 1 \cos(0) = 1,$
$\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{j} = 1\ 1 \cos(\pi/2) = 0,\ \boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{k} = 0$
$\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{i} = 0,\ \boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{I} = 0,$
$\boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{j} = 0$
$\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{k} = 1$

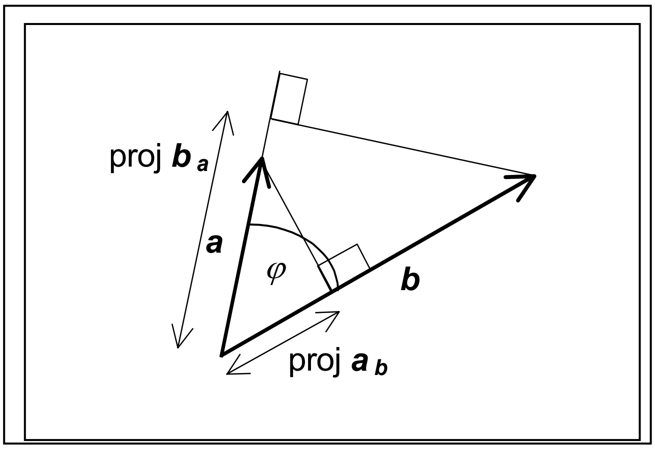
$$
\begin{aligned}
dA = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s} = \quad & F_x\, dx\, \boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{i} + \cancel{F_x\, dy\, \boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{j}} + \cancel{F_x\, dz\, \boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{k}} + \\
& \cancel{F_y\, dx\, \boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{i}} + F_y\, dy\, \boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{j} + \cancel{F_y\, dz\, \boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{k}} + \\
& \cancel{F_z\, dx\, \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{i}} + \cancel{F_z\, dy\, \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{j}} + F_z\, dz\, \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{k} \\
dA = \quad & F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = F\, ds \cos \varphi. = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s}
\end{aligned}
$$

$$dA == \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s} == F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

Če ***F*** = konst. in gibanje po premici:

$$A = \int \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s} = \int_0^x F_x dx + \int_0^y F_y dy + \int_0^z F_z dz = F_x \int_0^x dx + F_y \int_0^y dy + F_z \int_0^z dz$$

$$A = F_x x + F_y y + F_z z = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{s}; \quad \boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z); \quad \boldsymbol{s} = (x, y, z)$$



Skalarni produkt dveh vektorjev ***a*** in ***b***:
Projekcija vektorja ***a*** na ***b***:
proj $\boldsymbol{a}_b$ = $a \cos\varphi$
ker: $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a\, b \cos\varphi$
$\Rightarrow \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = b$ proj $\boldsymbol{a}_b$.
Velja tudi:
proj $\boldsymbol{b}_a$ = $b \cos\varphi$
$\Rightarrow \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a$ proj $\boldsymbol{b}_a$.

Če $\varphi = \pi/2 \Rightarrow$ proj $\boldsymbol{b}_a$ = proj $\boldsymbol{a}_b = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = 0$.

Ponovitev:
Delo zunanje sile pri majhnem pomiku telesa je skalarni produkt sile in majhnega pomika:

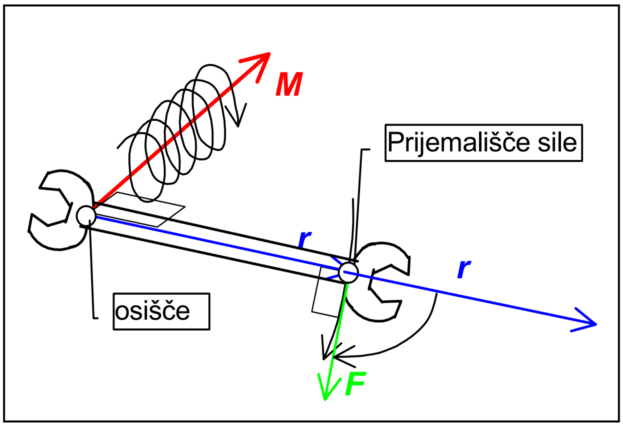
$$dA = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s} = F\, ds \cos\varphi = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz.$$

Če ***F*** = konst. na premočrtni poti delca $\Rightarrow \varphi$ = konst.

$$A = F\, s \cos\varphi = F_x\, x + F_y\, y + F_z\, z$$

Delo sile, ki je pravokotna na gibanje telesa, t.j. pravokotna na hitrost in na majhen pomik telesa ($\varphi = \pi/2$, $\cos \varphi = 0$), je enako nič. Največje delo opravi sila, ki deluje na telo v smeri njegovega gibanja ($\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$). Zaviralne sile (trenje, upor), ki nasprotujejo gibanju ($\varphi = \pi$, $\cos \varphi = -1$), pa opravijo negativno delo ($A < 0$).
Primer: ***F*** = (3, 6, 2) N; ***s*** = (2, 4, -1) m; A = ?

I.4 VEKTORSKI PRODUKT DVEH VEKTORJEV IN NAVOR SILE

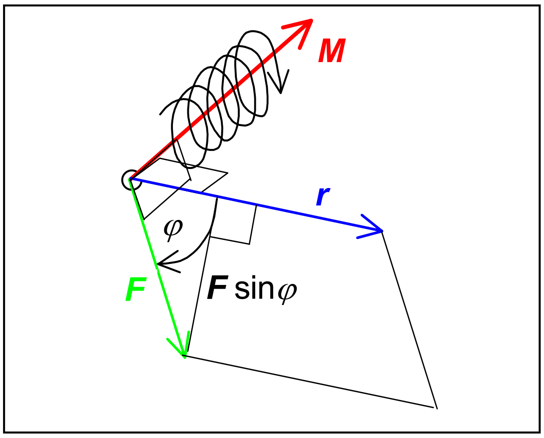


I. $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{F}$: Ročica od osišča do prijemališča sile ***r*** je pravokotna na silo ***F*** . Ročico premaknemo v prijemališče sile in jo po najkrajši poti sukamo proti sili.

Navor ***M*** sile kaže v smeri lezenja desnega vijaka. Njegova smer je pravokotna tako na silo ***F***, kot na vektor prijemališča sile ***r***. Velikost navora pa je določena kot produkt:

$$M = r\,F$$

II. ***r*** ni pravokotna na ***F***, med njima je kot φ.



Ponovno za določitev smeri navora sukamo vektor prijemališča sile ***r*** proti sili ***F*** po najkrajši poti. Smer navora ***M*** je po definiciji določena kot smer lezenja desnega vijaka in je ponovno pravokotna tako na ***r***, kot na ***F***, čeprav ***r*** ni pravokotna na ***F***. Jakost navora pa je določena kot ploščina paralelograma, ki ga napenjata ***r*** in ***F*** , torej:

$$M = r\,F \sin\varphi$$

Tako smo določili vektor navora po smeri in po jakosti. Drugače povedano: Vektor navora ***M*** je vektorski produkt med vektorjem prijemališča sile ***r*** in silo ***F***, ali:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}.$$

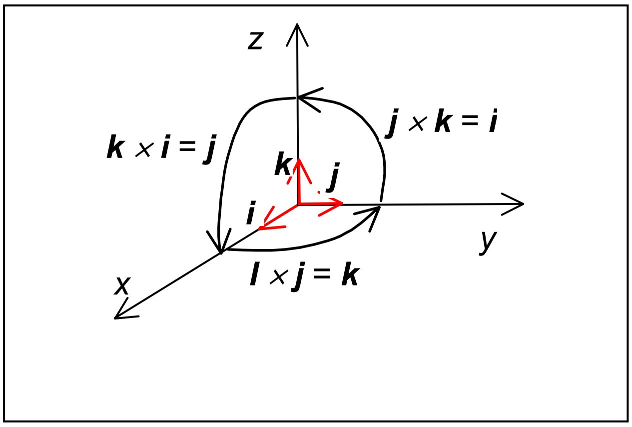
Komponentni zapis

$\boldsymbol{i}$ = (1, 0, 0); $\boldsymbol{j}$ = (0, 1, 0); $\boldsymbol{k}$ = (0, 0, 1)
$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} = (x, y, z)$;
$\boldsymbol{F} = F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} + F_z\,\boldsymbol{k} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}) \times (F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} + F_z\,\boldsymbol{k})$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} = \; & x F_x\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + y F_x\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + z F_x\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + \\ & x F_y\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + y F_y\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + z F_y\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + \\ & x F_z\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} + y F_y\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} + z F_z\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = ?$ $\quad |\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\sin 0 = 1\ 1\ 0 = 0$ $\quad \{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = a\,b\sin\varphi\}$
$\Rightarrow \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} = (0, 0, 0)$
$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = ?$ $\quad |\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{i}||\boldsymbol{j}|\sin(\pi/2) = 1\ 1\ 1 = 1$; $|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}| = 1$
$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$; $\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$; $\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$



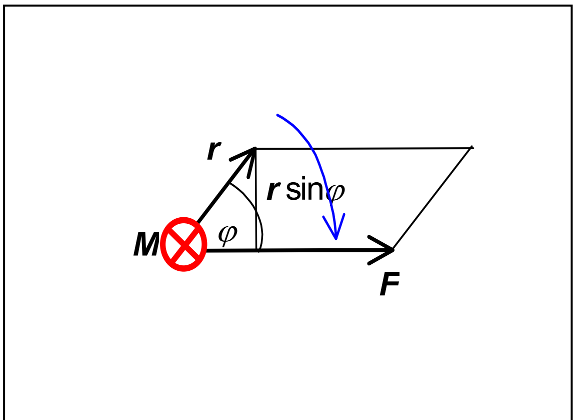
$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{j}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} = \; & \boldsymbol{0} + y F_x(-\boldsymbol{k}) + z F_x\boldsymbol{j} + \\ & x F_y\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{0} + z F_y(-\boldsymbol{i}) \\ + \; & x F_z(-\boldsymbol{j}) + y F_z\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{M} = (y F_z - z F_y)\boldsymbol{i} + (z F_x - x F_z)\boldsymbol{j} + (x F_y - y F_x)\boldsymbol{k}$$

$M = r\sin\varphi\,F = r_\perp F = F_\perp r$, kjer je $r_\perp$ dolžina ročice, ki je pravokotna na silo in $F_\perp$ komponenta sile, ki je pravokotna na ročico.

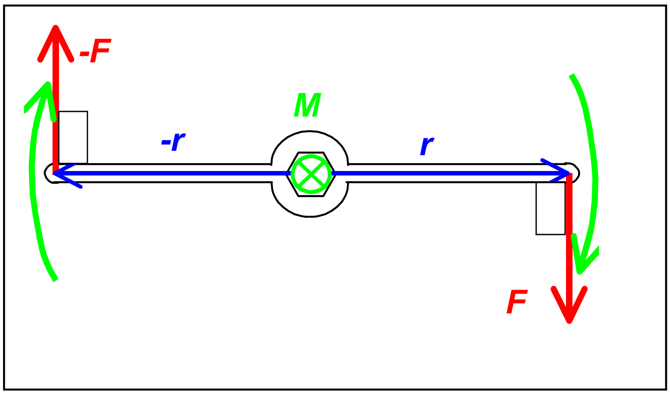
$$\boldsymbol{M} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$



Ponovitev:

Skalarni produkt dveh vektorjev – je skalar: $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a\, b \cos\varphi$.
Če $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = 0$.
Vektorski produkt dveh vektorjev je vektor, za njegovo jakost velja: $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = a\, b \sin\varphi$. Če $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, ali $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (0, 0, 0) = \boldsymbol{0}$.

I.5 NAVOR DVOJICE SIL



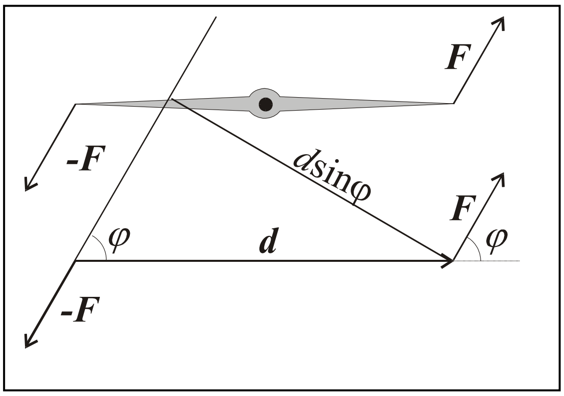
III. Dve sili, ki sta si vzporedni in nasprotno smiselni ter ne ležita na isti nosilki (premici) tvorita navor dvojice sil okoli poljubne točke v ravnini sil.

Navor sile $\boldsymbol{F}$ je $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, po jakosti $M_1 = r\,F \sin(90^0) = r\,F$.
Navor sile $-\boldsymbol{F}$ *pa* je $\boldsymbol{M}_2 = -\boldsymbol{r} \times (-\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.
Navor dvojice sil je vsota navorov posameznih sil:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = 2\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F},\ M = dF,$$

kjer *d* dolžina celotnega ključa (razdalja med nosilkama sil). Ko sili nista pravokotni na ročico, ampak oklepata kot φ pa je jakost navora M

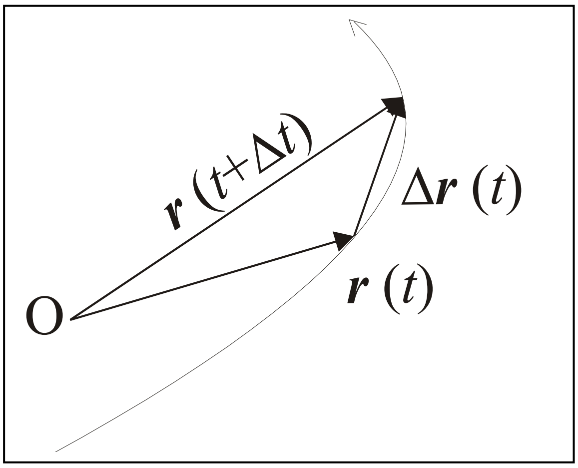
$$M = d\,F \sin(\varphi).$$



$\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{r}$ je vektor, ki povezuje prijemališče sile $-\boldsymbol{F}$ s prijemališčem sile $\boldsymbol{F}$, φ pa kot med vektorjem zveznice prijemališč $\boldsymbol{d}$ in silo $\boldsymbol{F}$. Zgornji izraz velja tudi za dvojico sil, katerih zveznica prijemališč ni pod pravim kotom glede na smer sile:

Ladij. Stroj. VSS 1. let. Mehanika in hidromehanika predav. V. Malačič

I.6 TRENUTNA HITROST TOČKASTEGA TELESA, OZ. HITROST GIBANJA TEŽIŠČA TOGEGA TELESA



Točkasto telo se giblje po trajektoriji (tirnici)
r – radij vektor lege točkastega telesa
Δ ***r***- vektor diference pozicij telesa v trenutkih $t + \Delta t$ in t .
Trenutna hitrost je definirana kot časovni odvod radij vektorja delca:

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$\boldsymbol{r}\,(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}\,(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z(t)/\mathrm{d}t\,\boldsymbol{k} =$$

$$\boldsymbol{v}\,(t) = v_{\mathrm{x}}(t)\,\boldsymbol{i} + v_{\mathrm{y}}(t)\,\boldsymbol{j} + v_{\mathrm{z}}(t)\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}\,(t) = (v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}})$$

$$v_{\mathrm{x}} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t; \quad v_{\mathrm{y}} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t; \quad v_{\mathrm{z}} = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t;$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Kot φ med radij vektorjem in osjo x, kotna hitrost ω (njena jakost):

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

kar smo opredelili kot časovni odvod skalarne količine. 21.feb. 2008

I.7 TRENUTNI POSPEŠEK TOČKASTEGA TELESA

je časovni odvod hitrosti:

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$\boldsymbol{v}\,(t) = v_x(t)\,\boldsymbol{i} + v_y(t)\,\boldsymbol{j} + v_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}\,(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,v_x\,(t)/\mathrm{d}t\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}\,v_y\,(t)/\mathrm{d}t\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}\,v_z\,(t)/\mathrm{d}t\,\boldsymbol{k} =$$

$$\boldsymbol{a}\,(t) = a_x(t)\,\boldsymbol{i} + a_y(t)\,\boldsymbol{j} + a_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

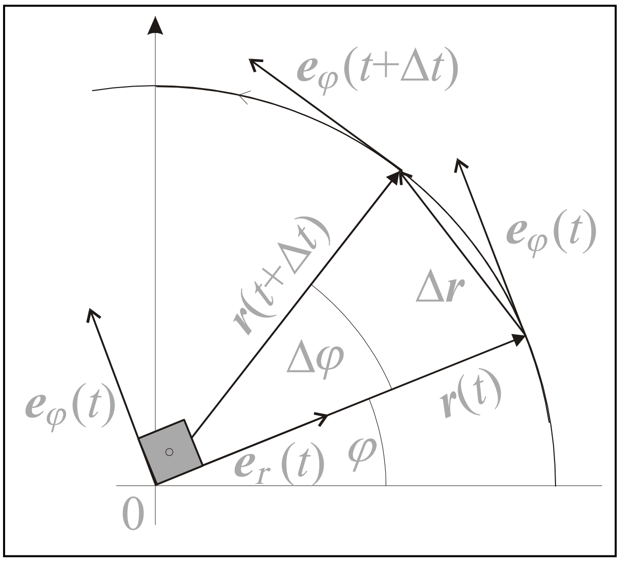
$$\boldsymbol{a}\,(t) = (a_x, a_y, a_z)$$

$$a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t; \qquad a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t; \qquad a_z = \mathrm{d}\,v_z/\mathrm{d}t;$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

II. KROŽENJE TOČKASTEGA TELESA

II.1 UVOD



Je dvodimenzionalno (ravninsko) gibanje, pri katerem je dolžina radij vektorja lege točkastega telesa konstantna:

$$|\boldsymbol{r}(t)| = r = \text{konst.} \neq r(t).$$

(obstajajo tudi 3 D gibanja, za katera zgornji pogoj velja, pa niso kroženja, npr. gibanje po Zemlji) Radij vektor $\boldsymbol{r}(t)$ se spreminja po smeri, je (periodična) funkcija časa.

To velja tako za *enakomerno*, kot za *neenakomerno* kroženje. Velja tudi $\boldsymbol{r}(t) \perp \boldsymbol{v}(t)$ za vsak t.

Pri *enakomernem* kroženju je *jakost obodne hitrosti* točke stalna:

$$v = |\boldsymbol{v}(t)| = \text{konst.} \neq v(t).$$

S časom pa se stalno spreminja njena smer: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$, ki se periodično ponavlja.

Pri *neenakomernem* kroženju pa *jakost hitrosti* krožečega točkastega telesa *ni* konstantna, se spreminja

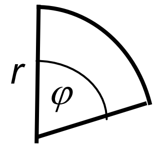
$$v = v(t) = |\boldsymbol{v}(t)| \neq \text{konst.}$$

kot se stalno spreminja njena smer: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$.

$\boldsymbol{e}_r(t) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ je enot. vektor radij vektorja točke $\boldsymbol{r}$.

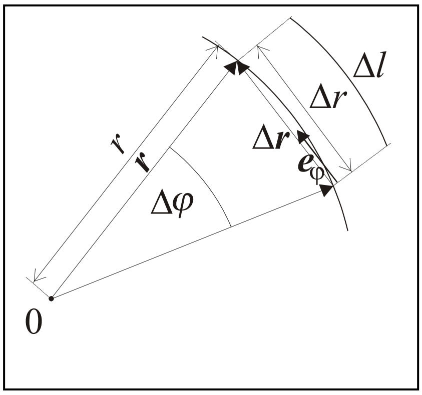
$\boldsymbol{e}_\varphi(t)$ – enot. vektor v smeri gibanja oz. hitrosti $\boldsymbol{v}$ točke po krožnici, s časom spreminja smer: $\boldsymbol{e}_\varphi(t) \uparrow\uparrow \boldsymbol{v}(t)$, $e_\varphi(t) = \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$.

Tudi ta se spreminja po smeri. Velja: $|\boldsymbol{e}_\varphi| = 1$, $|\boldsymbol{e}_r| = 1$, v vsakem trenutku: $\boldsymbol{e}_\varphi \perp \boldsymbol{e}_r$.



dolžina loka krožnice l, ki je napet nad kotom φ je $l = r\,\varphi$,

dolžina loka Δl, ki je napet nad majhnim kotom $\Delta\varphi$ pa je



$$\Delta l = r\,\Delta\varphi.$$

Za majhne kote $\Delta\varphi$ velja, da je dolžina loka pribl. enaka dolžini tetive Δr :

$$\Delta\varphi \to 0 \Rightarrow \Delta r \to \Delta l = r\Delta\varphi\,,$$

$$\left|\Delta\boldsymbol{r}\right| = \Delta r \cong r\Delta\varphi, \text{ker } \Delta\boldsymbol{r} \uparrow\uparrow \boldsymbol{e}_\varphi \ :$$

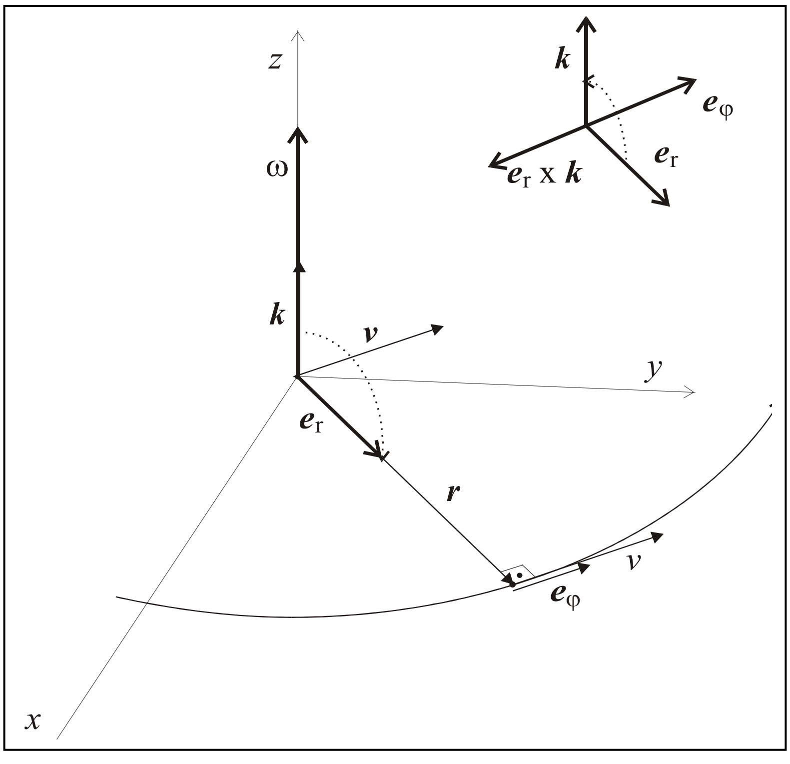
$$\Delta\varphi \to 0 \Rightarrow \Delta\boldsymbol{r} \to r\Delta\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\varphi}{\Delta t}\boldsymbol{e}_\varphi = r\boldsymbol{e}_\varphi \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r\boldsymbol{e}_\varphi\frac{d\varphi}{dt}.$$

Časovni odvod kota je kotna hitrost $\omega = d\varphi/dt$, zato za vsako kroženje velja

$$\boldsymbol{v}(t) = r\,\omega\,\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Jakost obodne hitrosti v je povezana s kotno hitrostjo ω:



$$v(t) = r\,\omega.$$

Obodna hitrost je polmer krat kotna hitrost – za vsako kroženje, tudi neenakomerno. Pri *enakomernem* kroženju sta kotna in obodna hitrost po jakosti stalni. Postavimo os, ki gre skozi središče kroženja in je pravokotna na ravnino kroženja. Vektor kotne hitrosti ω naj leži na tej osi in kaže v smeri lezenja desnega vijaka, če krajevni vektor ***r*** po najkrajši možni poti sukamo proti hitrosti kroženja ***v*** (ω je pseudo vektor) . Pokaže se, da je tedaj obodna hitrost ***v*** sestavljena kot vektorski produkt kotne hitrosti in krajevnega vektorja

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

[rad/s * m = m/s]

Omega sukamo po najkrajši možni poti proti krajevnemu vektorju in dobimo smer obodne hitrosti.

$$\boldsymbol{v} = - \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{v} = r\,\omega\,\mathbf{e}_{\varphi}$$

$$v = r\,\omega$$

Preverjanje:

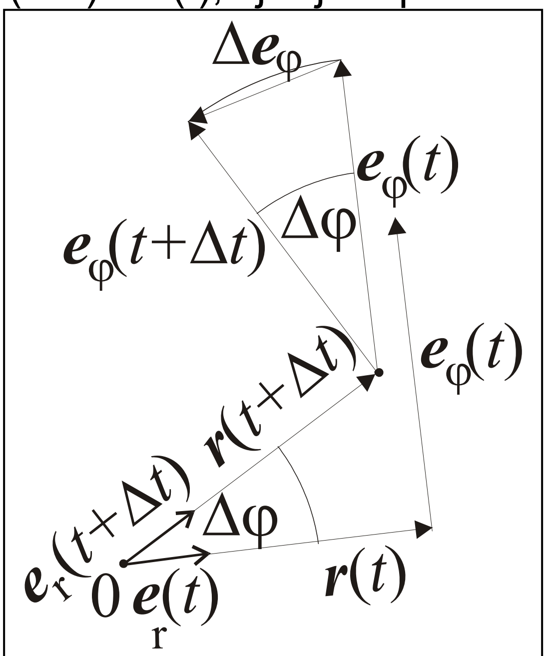
$\omega = \omega\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$; $-\boldsymbol{r} \times \omega = -r\omega\,\mathbf{e}_r \times \mathbf{k} = r\omega\mathbf{e}_{\varphi}$

II.2 ENAKOMERNO KROŽENJE TOČKASTEGA TELESA IN CENTRIPETALNI POSPEŠEK

Pri *enakomernem* kroženju je *jakost obodne hitrosti* točke stalna:

$$v = |\boldsymbol{v}(t)| = \text{konst.} \neq v(t).$$

S časom pa se periodično spreminja njena smer: ***v*** = ***v***(t), ***v***($t+T$) = ***v***(t), kjer je T perioda kroženja. Seveda se ohranja tudi dolžina radij vektorja r = konst.



Ali ima točkasto telo pri enakomernem kroženju pospešek?

Enotni vektor $\boldsymbol{e}_\varphi$ ima smer obodne hitrosti, saj je: $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_\varphi$. Zanima nas njegova časovna sprememba pri kroženju. Ponovno uporabimo načelo, da sta si dolžina loka in sekanta pri majhnem kotu skoraj enaka:

$$\Delta\varphi \to 0 \Rightarrow \left|\Delta \boldsymbol{e}_\varphi\right| \to \left|\boldsymbol{e}_\varphi\right|\Delta\varphi = \Delta\varphi$$

$$\Delta \boldsymbol{e}_\varphi \uparrow\downarrow \boldsymbol{e}_r,\ \Delta \boldsymbol{e}_\varphi \uparrow\downarrow \boldsymbol{r}, \text{torej:} \qquad \Delta\boldsymbol{e}_\varphi = -\,\Delta\varphi\,\boldsymbol{e}_r$$

Pri enakomernem kroženju se jakost hitrosti ohrani (v = konst. $\Rightarrow \Delta v = 0$), zato iz $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_\varphi \Rightarrow \Delta\boldsymbol{v} = v\,\Delta\boldsymbol{e}_\varphi = -v\,\Delta\varphi\,\boldsymbol{e}_r$. To uporabimo pri formuli za pospešek:

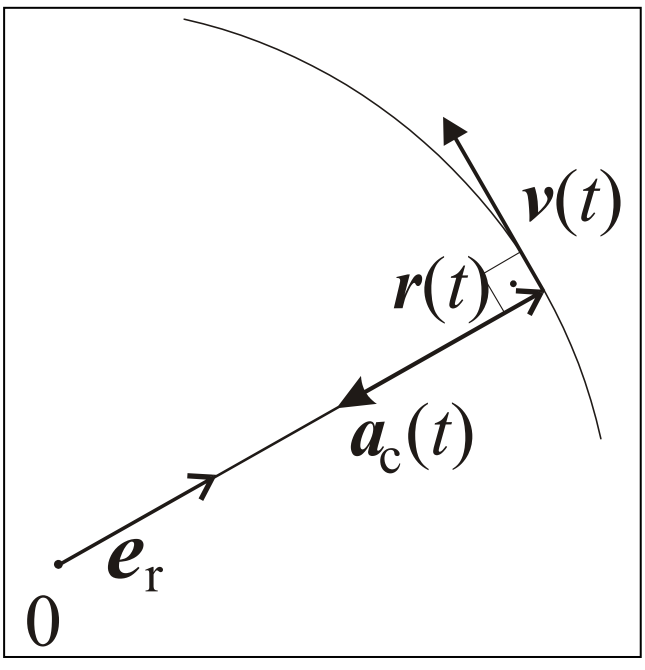
$$\boldsymbol{a}_c(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} v\boldsymbol{e}_r = -\frac{d\varphi}{dt} v\boldsymbol{e}_r = -\omega v\,\boldsymbol{e}_r,$$

$$a_c = \omega v$$

To pomeni: *enakomerno* kroženje je *pospešeno* gibanje, krožeče točkasto telo občuti pospešek, ki je usmerjen *proti centru* kroženja, imenuje se radialni ali ***centripetalni*** pospešek. Ta zagotavlja stalno spremembo smeri hitrosti – njen odklon proti centru kroženja.

Ker je $v = r\,\omega$, izračunamo centripetalni pospešek iz obodne, ali iz kotne hitrosti:

$$a_c = v\,\omega = r\,\omega^2 = v^2/r.$$



Centripetalni pospešek tudi pomeni, da (po 2. Newtonovem zakonu) obstaja tudi centripetalna ali radialna sila:

$$\boldsymbol{F_c} = m\,\boldsymbol{a}_c = -\,r\,\omega^2\,\boldsymbol{e}_r.$$

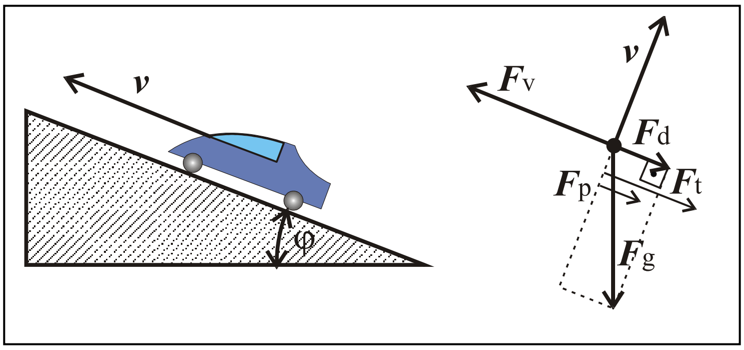
$$F_c = m\,r\,\omega^2 = m\,v^2/r,$$

kjer smo z m označili maso krožečega telesa, z $\boldsymbol{a}_c$ pa centripetalni pospešek. Tudi sila je usmerjena proti centru kroženja.

Ladij. Stroj. VSS 1. let. Mehanika in hidromehanika predav. V. Malačič

VAJE

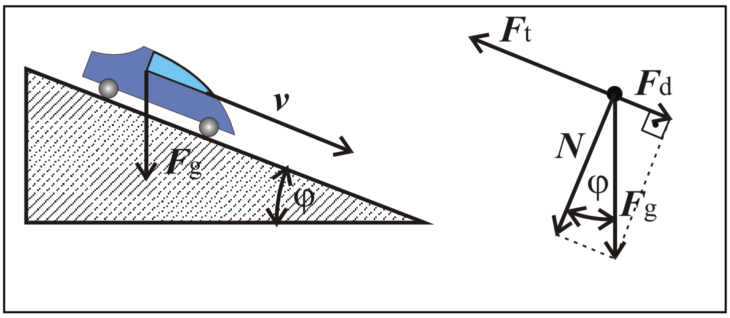
1.



$\boldsymbol{v}$ = konst., vozilo je vlečeno.
m = 1,2 t
tan φ = 5 %
v = 72 km/h

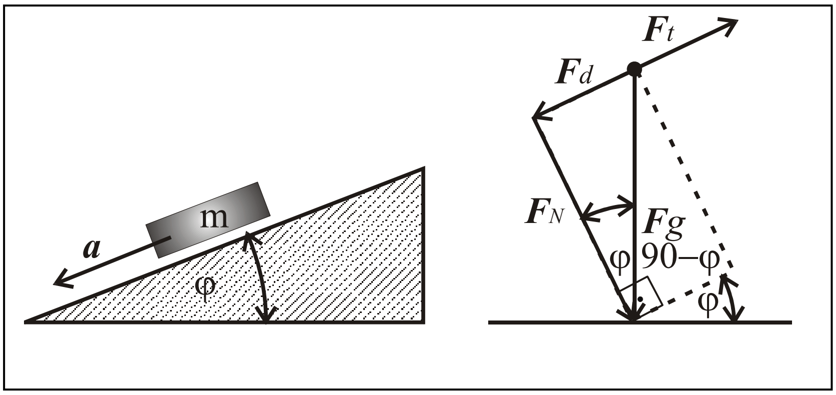
$P_{vlečna}$ = ? $P_v = F_v\, v$; F_v = ?

2.

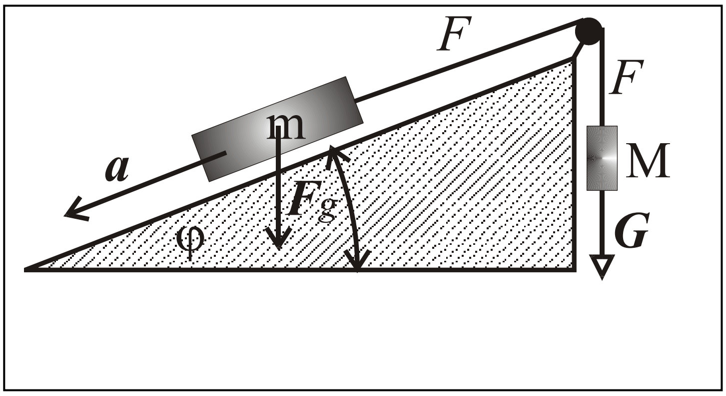


Kolesa blokirana, drsno trenje. Avto se giblje navzdol z enako hitrostjo, kot se je prej navzgor, zato bo k_t enak. Kolik je k_t ?

3. Kolikšen je k_t, da je pospešek a = 0?

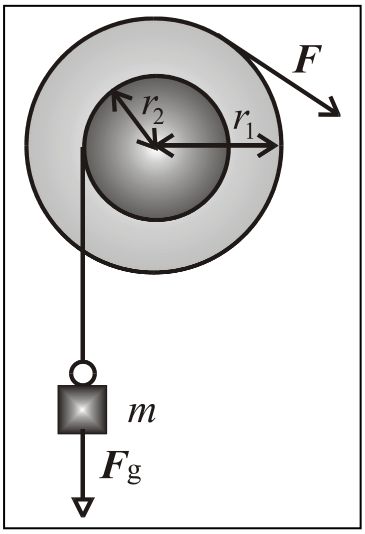


4. Klada



F = ? Zapiši ravnovesje sil za klado *m* in za breme *M*, pri čemer se breme (in klada) gibljeta s pospeškom *a*.

5.

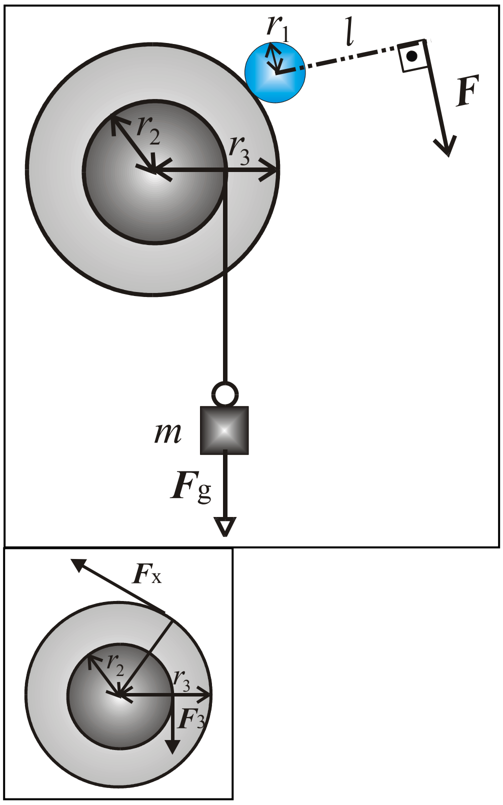


Kolikšno breme lahko dvignemo s silo 50 N?

F = 50 N
r_2 = 20 cm
r_1 = 40 cm
m = ?

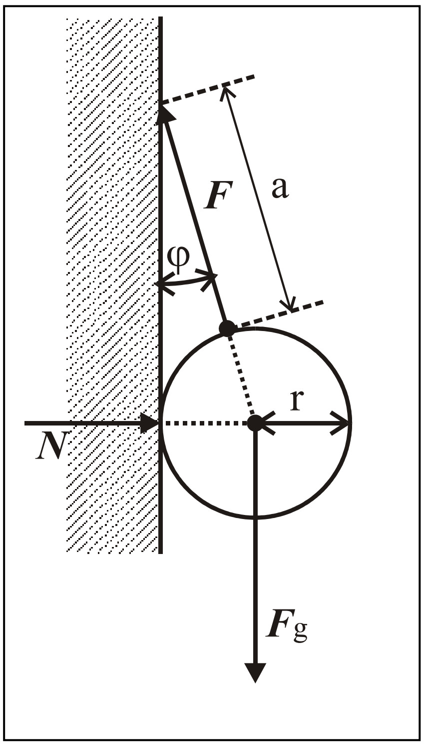
$$\sum_i \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0}$$

6.



Dvojni škripec (močno trenje med njima), ali dva mirujoča zobnika
F = 50 N, r_1 = 10 cm,
r_2 = 20 cm, r_3 = 30 cm,
l = 40 cm
m = ?

7.



a = 40 cm
m = 5 kg
R = 9 cm
N = ? F = ?

I. Ravnovesje sil
II. Ravnovesje navorov

II.3 NEENAKOMERNO KROŽENJE

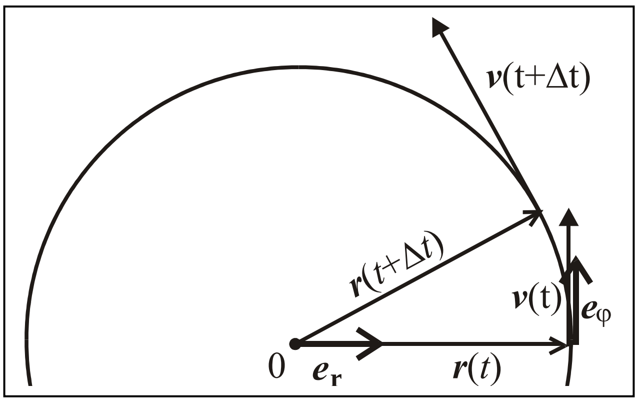
Za vsako kroženje velja, da gre za ravninsko gibanje: $|\boldsymbol{r}|$ = r = konst., $\boldsymbol{r}(t) \perp \boldsymbol{v}(t)$. *Enakomerno* kroženje: jakost obodne hitrosti $|\boldsymbol{v}|$ = v = konst.,

Neenakomerno kroženje: $|\boldsymbol{v}|$ = $v(t)$ – jakost hitrosti NI konst., hitrost se s časom spreminja po jakosti in po smeri. Vendar še vedno velja, da ima hitrost **v** smer tangente na krožnico in da je $\perp$ na **r**. Zato še vedno velja zveza med obodno **v** in kotno hitrostjo ω: $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_t} = r\omega\, \boldsymbol{e}_\varphi$; $v = r\omega$.

Pospešek

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \quad \Delta \boldsymbol{v} = \Delta \boldsymbol{v}_r + \Delta \boldsymbol{v}_t$$

$\Delta \boldsymbol{v}_r$ – radialna sprememba hitrosti, kot pri enakomernem kroženju,
$\Delta \boldsymbol{v}_t$ – tangencialna sprememba hitrosti, le pri *neenakomernem* kroženju.



$\Delta \boldsymbol{v}_r \uparrow\downarrow \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_r$: sprememba hitrosti zaradi spremembe smeri hitrosti

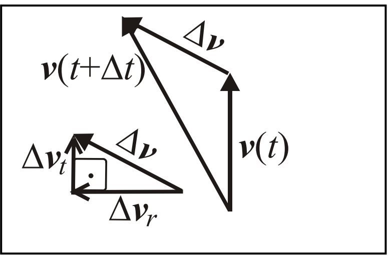
$\Delta \boldsymbol{v}_r = -v\Delta\varphi\, \boldsymbol{e}_r$

$\Delta \boldsymbol{v}_t \uparrow\uparrow \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_\varphi$: sprememba hitrosti zaradi spremembe jakosti hitrosti

$\Delta \boldsymbol{v}_t = \Delta v_t\, \boldsymbol{e}_\varphi$

$\Delta \boldsymbol{v} = -v\Delta\varphi\, \boldsymbol{e}_r + \Delta v_t\, \boldsymbol{e}_\varphi \Rightarrow$

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = -\frac{v\Delta\varphi}{\Delta t}\boldsymbol{e}_r + \frac{\Delta v_t}{\Delta t}\boldsymbol{e}_\varphi,$$



$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\varphi}{\Delta t}\boldsymbol{e}_r + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t}\boldsymbol{e}_\varphi = -v\omega\, \boldsymbol{e}_r + \frac{dv_t}{dt}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$v = v_t = r\omega$, ker je r = konst.$\Rightarrow$
$dv/dt = r\, d\omega/dt$, kjer je kotna hitrost $\omega = d\varphi/dt$ [rad/s].

$$\boldsymbol{a}(t) = -v\omega\,\boldsymbol{e}_r + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_\varphi = -v\omega\,\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

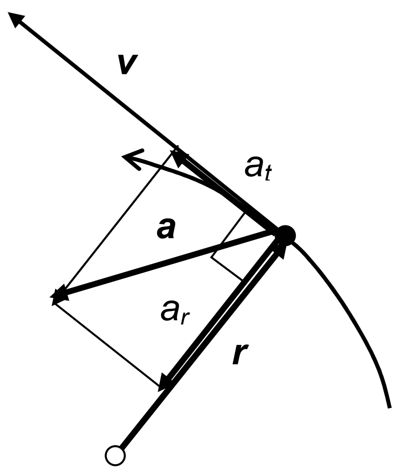
rad. posp. tang. posp.

Vpeljemo kotni pospešek $\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$, *tangencialni* ali obodni pospešek je tedaj $a_t = r\alpha$, celotni pospešek pa:

$$\boldsymbol{a}(t) = -r\omega^2\,\boldsymbol{e}_r + r\alpha\boldsymbol{e}_\varphi = -a_c\boldsymbol{e}_r + a_t\boldsymbol{e}_\varphi,$$

kjer je radialni ali centripetalni pospešek: $a_c = r\omega^2$, tangencialni ali obodni pospešek: $a_t = r\alpha$. Jakost celotnega pospeška pa je

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}\,.$$



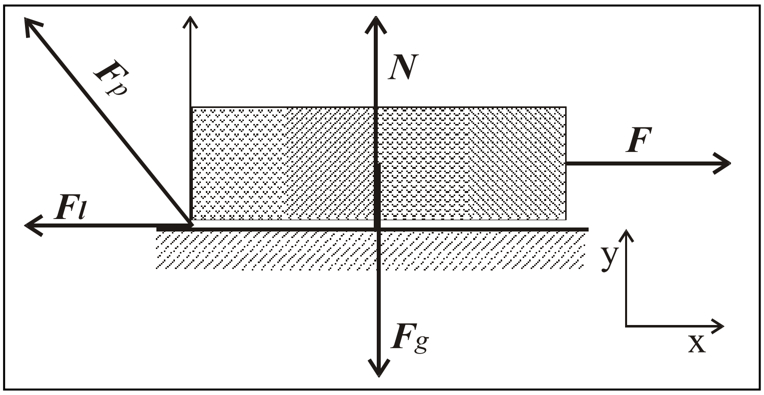
Obodni pospešek pove, kako se obodna hitrost spreminja po jakosti:

Obodna hitrost (njena jakost): $v_t = r\omega$ = polmer * kotna hitrost

Obodni pospešek: $a_t = dv_t/dt = d(r\omega)/dt = r\, d\omega/dt = r\alpha$

a_t = polmer * kotni pospešek

Trenje in lepenje



I. Telo miruje na vodoravni podlagi, čeprav delujemo nanj z vlečno silo $\boldsymbol{F}$.

1. Newtonov zakon: $\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_l + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{N}$ – normalna sila podlage, ki uravnovesi silo teže $\boldsymbol{F}_g$
$\boldsymbol{F}_l$ – sila lepenja, s katero podlaga deluje zaviralno na telo in uravnoveša vlečno silo. Obe sili sestavljata eno silo podlage $\boldsymbol{F}_p$. Komponentni zapis ravnovesja sil:

x: $- F_l + F = 0$; y: $N – F_g = 0$.

Telo miruje, četudi povečujemo vlečno silo, in s tem tudi silo lepenja, vse dokler je jakost obeh sil manjša od mejne vrednosti sile lepenja, ki se izračuna kot $k_l N$:

$$\boxed{F = F_l \le k_l\, N,}$$

Mejna sila lepenja je sorazmerna normalni sili podlage N, sorazmer. koeficient k_l pa je koeficient lepenja. Celotna sila podlage $\boldsymbol{F}_p$ je vektorska vsota sil $\boldsymbol{F}_l$ in $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{F}_l + \boldsymbol{N}$$

Vse to velja za mirovanje telesa tik pred zdrsom.

II. Telo enakomerno drsi na vodoravni podlagi, zopet velja

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \mathbf{0},$$

le da tokrat namesto silo lepenja nadomesti sila trenja,

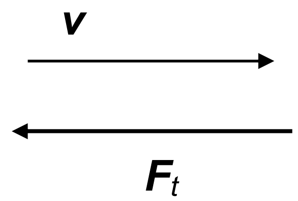
x: $-F_t + F = 0$; y: $N - F_g = 0$,

za silo trenja pa velja, da je sorazmerna normalni sili podlage

$$\boxed{F_t = k_t\, N,}$$

kjer nastopa koeficient trenja, ki je manjši od koeficienta lepenja k_l:

stična ploskev	k_t	k_l
voda-led	0,02	
kamen-les	0,4	
železo-železo	0,57	0,74
steklo-steklo	0,4	0,94
baker-steklo	0,53	0,68
Kotal. trenje avtomobil	0,015	



Sila trenja je vedno zaviralna, deluje v nasprotni smeri gibanja telesa.

$k_t < k_l$

k_t, k_l sta f(materiala stične ploskve), k_t pa še f(hitrosti telesa), *ni* f(velikosti stične površine).

III. Sistemska vztrajnostna sila

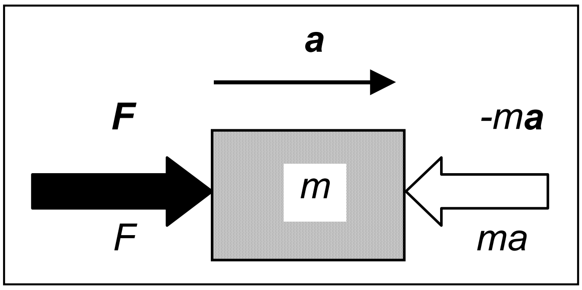
2. Newton. zakon: $\boldsymbol{F} = \sum_j \boldsymbol{F}_j = m\boldsymbol{a}$

kjer je ***a*** pospešek. Ta zakon velja le v *inercialnem* ali nepospešenem koordinatnem sistemu. V njem seveda opazujemo tudi telesa, ki se pospešeno gibljejo.

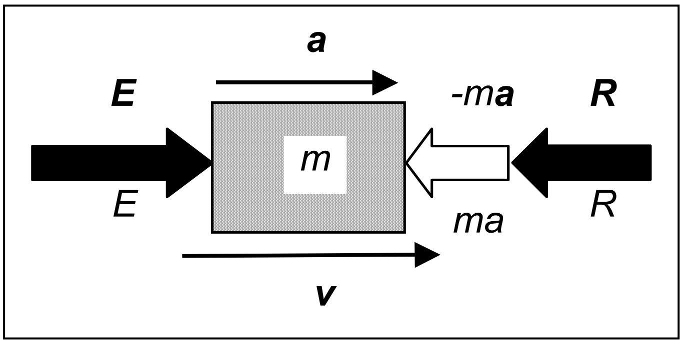
D'Alembertovo načelo: sistemu dejanskih (zunanjih) sil, ki delujejo na opazovano telo, lahko dodamo ***vztrajnostno ali inercialno silo:*** $\boldsymbol{F}_i = -m\boldsymbol{a}$

Ko to silo dodamo, dobimo iz 2. Newton. zakona za opazovano telo, ki se giblje pospešeno, da so zanj vse sile (ne samo zunanje) v ravnovesju:

$$\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_i = \mathbf{0}.$$



Na tak način se približamo obravnavanju v statiki, čeprav se telo giblje pospešeno. Inercialna, vztrajnostna, efektivna ali reverzna sila je vedno usmerjena v nasprotni smeri pospeška *telesa.*



Delujoča sila **E** *('effort'), ki premag. silo upora ali trenja* **R** *(reakcij. sila) in hkrati zagotavlja pospešek* **a** *telesu:*

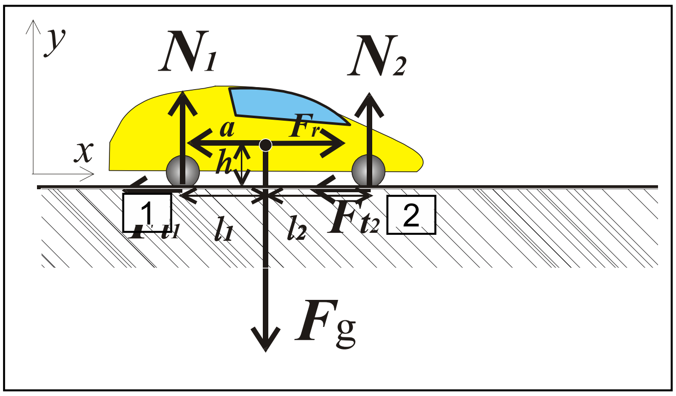
$$ma = E - R \Rightarrow E = ma + R.$$

Pospeševalna sila je F = ma= E – R.

Aktivne in reakcijske sile:

- aktivne: lahko ***povzročijo* spremembo gibanja opazovanega telesa** ali sistema
- reakcijske sile: ***ne morejo vplivati na spremembo gibanja***. Sem sodijo reakcije podlage, na katerih se nahaja breme, reakcija zgloba (ležaja), vztrajnostna sila, pa tudi nekatere sile trenja.

PRIMER



Vozilo zavira horizon. podlagi
m = 1400 kg
l_1 = 1,3 m; l_2 = 1,7 m
h = 0,5 m
v_1 = 72 km/h,
v_2 = 57,6 km/h na razdalji s = 200 m.

N_1 = ? N_2 = ?

pojemek (negativen pospešek) v smeri –x povzročita sili trenja:

x: $ma = F_{t1} + F_{t2}$.

Reakcijska sila trenja, oz. vztraj. sila: $F_r = - ma$

y: $N_1 + N_2 = F_g$

Enakomerno pojemajoče gibanje: $v_2 = v_1 + at$; $a < 0$, $F_r > 0$

$\Rightarrow$ $t = (v_2 - v_1)/a$

$s = v_1 t + at^2/2 = v_1 (v_2 - v_1)/a + (v_2 - v_1)^2/(2a)$

$s = (v_2^2 - v_1^2)/(2a) \Rightarrow a = (v_2^2 - v_1^2)/(2s)$.

OBSTAJA TUDI RAVNOVESJE NAVOROV: Navora v točkah 1 in 2: (veljati mora $N_1 + N_2 = F_g$)

Navor nabn kolo št. 1: $F_g l_1 - N_2(l_1 + l_2) + F_r h = 0 \Rightarrow$

$N_2 = (F_g l_1 + F_r h)/ (l_1 + l_2)$: $F_r = - ma$, poznamo

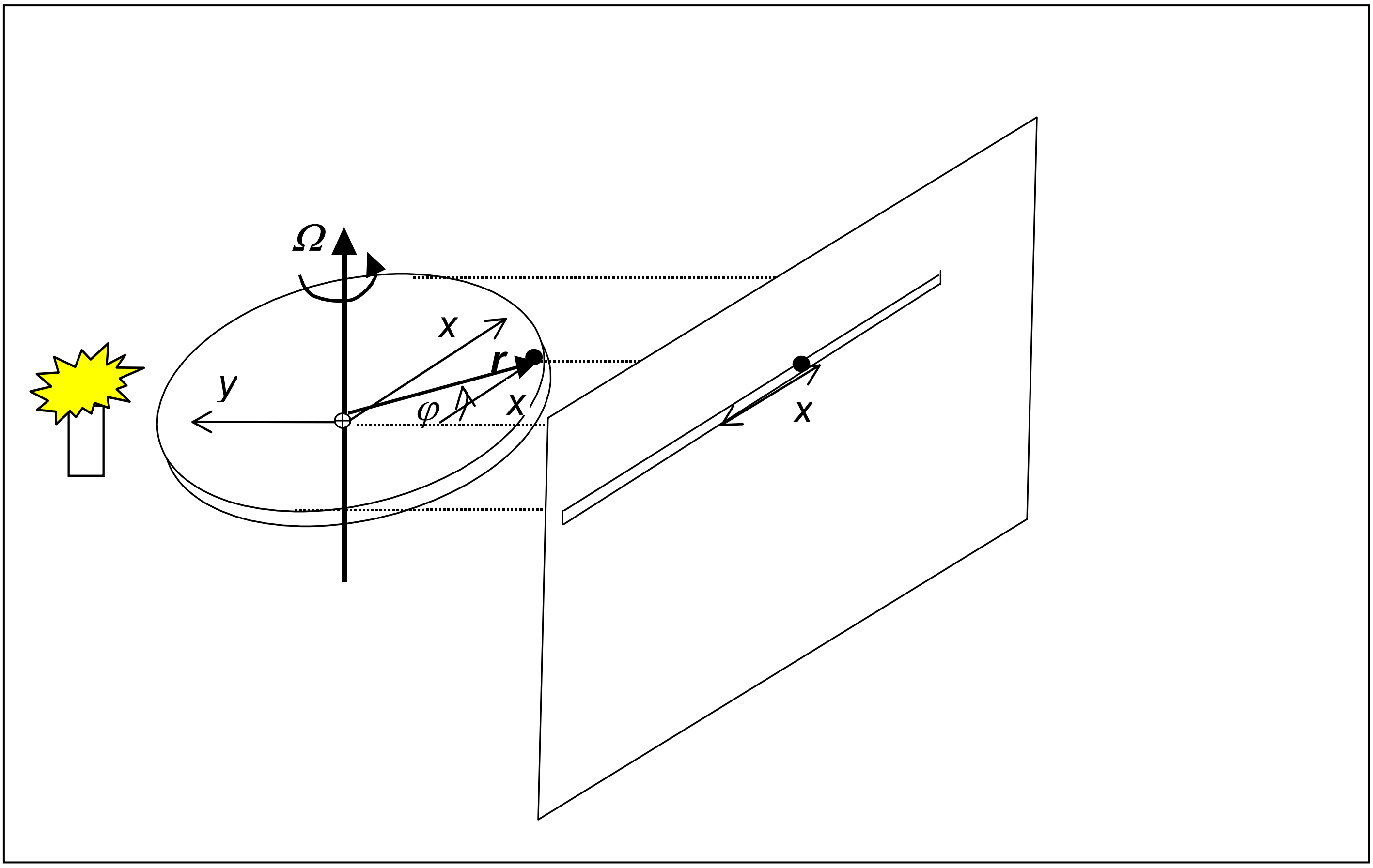
Navor na kolo št. 2: $-F_g l_2 + N_1(l_1 + l_2) + F_r h = 0 \Rightarrow$

$N_1 = (F_g l_2 - F_r h)/ (l_1 + l_2)$

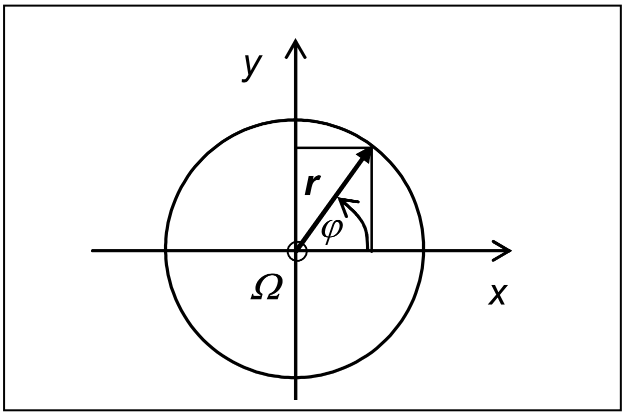
IV. NIHANJE

IV.1 KINEMATIKA NIHANJA

Nihanje si predstavljamo kot 2D projekcijo kroženja na premico v ravnini, ki je pravokotna na ravnino kroženja masne točke:



Naj je v trenutku t = 0 kot, ki ga točka oklepa z x-osjo $\varphi = 0$
Kot $\varphi = \Omega t$, kjer naj je Ω stalna kotna hitrost kroženja masne točke.



$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$.

Parametrični zapis kroženja, parameter je čas t, kot $\varphi = \Omega t$:
$x = r\cos(\Omega t)$; $y = r\sin(\Omega t)$

x – odmik točke od centra

implicitni zapis kroženja: $x^2 + y^2 = r^2$

eksplicitni zapis: $y = \pm (r^2 - x^2)^{1/2}$

Obodna hitrost kroženja: $v = r\Omega$

$x(t) = r\cos(\Omega t)$; $v_x = dx/dt \Rightarrow$
$v_x = r\Omega(-\sin(\Omega t)) = -r\Omega\sin(\Omega t)$;

$y(t) = r\sin(\Omega t)$; $v_y = dy/dt \Rightarrow$
$v_y = r\Omega\cos(\Omega t)$;

$$(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = v = r\Omega$$

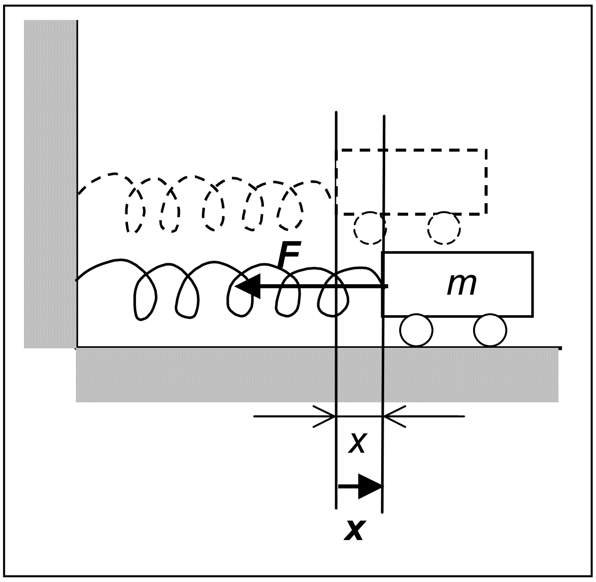
$a_x = dv_x/dt \Rightarrow a_x(t) = -r\Omega^2\cos(\Omega t) = -\Omega^2 x$
$a_y = dv_y/dt \Rightarrow a_y(t) = -r\Omega^2\sin(\Omega t) = -\Omega^2 y$

$a_x \propto -x$, če $x > 0 \Rightarrow a_x < 0$; $a_y \propto -y$, če $y > 0 \Rightarrow a_y < 0$.
Od tod sledi, da je tudi zunanja sila, ki je sorazmerna pospešku, nasprotno usmerjena od odmika: za nihanje je ključna t. im. *povratna sila.*

2. Newton. z.: če obstaja $a_x \Rightarrow$ obstaja $F_x = ma_x$,

$F_x = - m\Omega^2 x$; podobno obstaja $F_y = - m\Omega^2 y$, torej je celotna sila $F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = m\Omega^2(x^2 + y^2)^{1/2} = m\Omega^2 r$ = centripetalna sila pri kroženju.

IV.2 DINAMIKA NIHANJA



Voziček naj se vodoravno giblje brez trenja, niha. Sila vzmeti ga vleče vedno nazaj proti ravnovesni legi, v kateri se voziček tudi umiri po iznihavanju. Sila vzmeti je *povratna* sila: $\boldsymbol{F} \uparrow\downarrow \boldsymbol{x}$. Take vrste sila je potrebna pri vsakem nihanju.

V prvem približku predpostavimo, da nihanje *ni* dušeno.
2. N. z.: $F = ma$; Hookov z.: $F = - kx$ ($\boldsymbol{F} \uparrow\downarrow \boldsymbol{x}$) $\Rightarrow$ (k je konstanta vzmeti)

$$ma = -kx,$$
$$a = dv/dt = d^2x/dt^2,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \left(\frac{k}{m}\right)x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$ vpeljemo konstanto:

$k/m = \omega^2$ in dobimo diferencialno enačbo drugega reda (vsebuje drugi odvod) za lastno nihanje:

$$\omega^2 x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Ta enačba ima splošno rešitev sestavljeno iz sinusnih in kosinusnih funkcij:

$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$; $\omega = 2\pi/T$, T je perioda gibanja, ω je krožilna frekvenca; navadna frekvenca $\nu = 1/T$.
Preverimo, če je tako zapisan x res rešitev enačbe za nihanje, poiščemo drugi časovni odvod odmika (pospešek):
$dx/dt = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$;
$d^2x/dt^2 = -\omega^2[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] = -\omega^2 x$,
zato tudi dobimo izpolnjeno diferencialno enačbo, ko rešitev vstavimo v njo:

$\omega^2 x - \omega^2 x = 0$ za vsako rešitev $x(t)$ (za vsak trenutek t).

Tako spoznamo, da je *krožilna frekvenca* $\omega = (k/m)^{1/2} = 2\pi\nu$, kjer je ν frekvenca, $\nu = 1/T$, T pa je perioda nihanja. Ta je tem manjša, večja je masa telesa, ki niha in je tem večja, bolj ko je vzmet 'trda'.

Konstanti A in B določimo iz začetnih pogojev (začetnega odmika od ravnovesne lege in začetne hitrosti telesa, ki niha).

1. Naj je v $t = 0$ odmik $x = x_o$ in hitrost $v = 0$ $\Rightarrow$

$x(t=0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A = x_o$;
$v(t=0) = dx/dt_{t=0} = -A\omega\sin 0 + B\omega\cos 0 = B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$.
Tako postane rešitev določena kot:

$x = x_o\cos(\omega t)$, iz nje pa sledi
$v = -x_o\omega\sin(\omega t) = v_o\sin(\omega t)$; $v_o = -x_o\omega$ *je amplituda hitrosti.*

2. Če pa je v $t = 0$ odmik $x = 0$ in hitrost $v = v_o$ $\Rightarrow$
$x(t=0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A = 0$;
$v(t=0) = dx/dt_{t=0} = -A\omega\sin 0 + B\omega\cos 0 = B\omega = v_o \Rightarrow$
$B = v_o/\omega$. Rešitev:
$x = -(v_o/\omega)\sin(\omega t)$, od kod sledi $v = v_o\cos(\omega t)$.

DN 1: Zapiši pospešek v obeh primerih.

DN 2: Določi konstanti *A* in *B*, če je odmik v $t = 0$ enak $x_o/2$ in hitrost enaka $x_o\omega/4$. Zapiši enačbe odmika, hitrosti in pospeška.

IV.3 NUMERIČNO REŠEVANJE ENAČBE ZA NIHANJE V EXCELU

Uvedemo oznake $x' = dx/dt$, $x'' = d^2x/dt^2$ in zapišemo enačbo za lastno nedušeno nihanje:

$$\omega^2 x + x'' = 0,$$

kjer je ω krožilna frekvenca ($\omega = 2\pi\,\nu = 2\pi/T$, kjer je ν frekvenca nihanja in $T = 1/\nu$ njegova perioda). Nihanje, ki je opisano z diferencialno enačbo drugega reda (v njej nastopa drugi odvod), zapišemo kot sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda, ki je lažje numerično rešljiv. Poleg enačbe za odmik vpeljemo v sistem še enačbo za hitrost v (= $x' = dx/dt$) nihajočega delca:

$$x' = v,$$
$$v' = -\,\omega^2 x.$$

Druga enačba sledi iz prvotne enačbe za nihanje. Ta sistem dveh diferencialnih enačb prvega je zato popolnoma ekvivalenten prejšnji enačbi drugega reda.

Numeričen približek diferencialnih enačb

$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t},$$
$$v' = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

zapišemo diferencialni enačbi z diferenčnimi približki:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx v,$$
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx -\omega^2 x.$$

To je sistem približnih enačb, ki ga lahko rešujemo v programu, kot je Excel. Zato zapišimo še kaj pomenijo diference:

$\Delta x = x_{n+1} - x_n$, kjer sta $x_n = x(t_n)$ in $x_{n+1} = x(t_{n+1})$, pri čemer se trenutka t_n in t_{n+1} naj razlikujeta za majhen časovni interval: $t_{n+1} - t_n = \Delta t$. Podobno velja $\Delta v = v_{n+1} - v_n$, kjer $v_n = v(t_n)$ in $v_{n+1} = v(t_{n+1})$.

Tako dobimo enačbi:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \approx v_n\ , \qquad \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \approx -\omega^2 x_n\,,$$

ki ju zapišemo v eksplicitni obliki: količine v novem trenutku so na levi strani enačbe. Te se izražajo s količinami v prejšnjih trenutkih, ki so na desni strani enačbe. Približni enačaj kar nadomestimo z enačajem, pri čemer se zavedamo, da gre za približen račun:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t\, v_n, \qquad v_{n+1} = v_n - \Delta t\, \omega^2 x_n.$$

S postopkom zaporednih izračunov lahko pričnemo, če poznamo začetni vrednosti za odmik $x_0 = x(t_0)$ in hitrost $v = v(t_0)$, kjer naj je začetni čas $t_0 = 0$. Zgornji zapis za numeričen izračun sledi najenostavnejši Eulerjevi metodi za reševanje diferencialnih enačb.

Naj sta začetna pogoja za nihanje:

$$x_0 = 1 \text{ m}, \qquad v_0 = 0 \text{ m/s}.$$

Perioda nihanja naj bo T = 1 s ($\nu = 1/T = 1/\text{s}$, $\omega = 2\pi\,\nu = 2\pi/\text{s}$). Zato, da bodo diferenčni približki za odvode zadovoljivi, moramo izbrati časovni korak $\Delta t \ll T$. Naj je zato Δt = 0,01 s. Naj čas teče v intervalu ene periode $t \in [0, 1]$ s po korakih Δt.

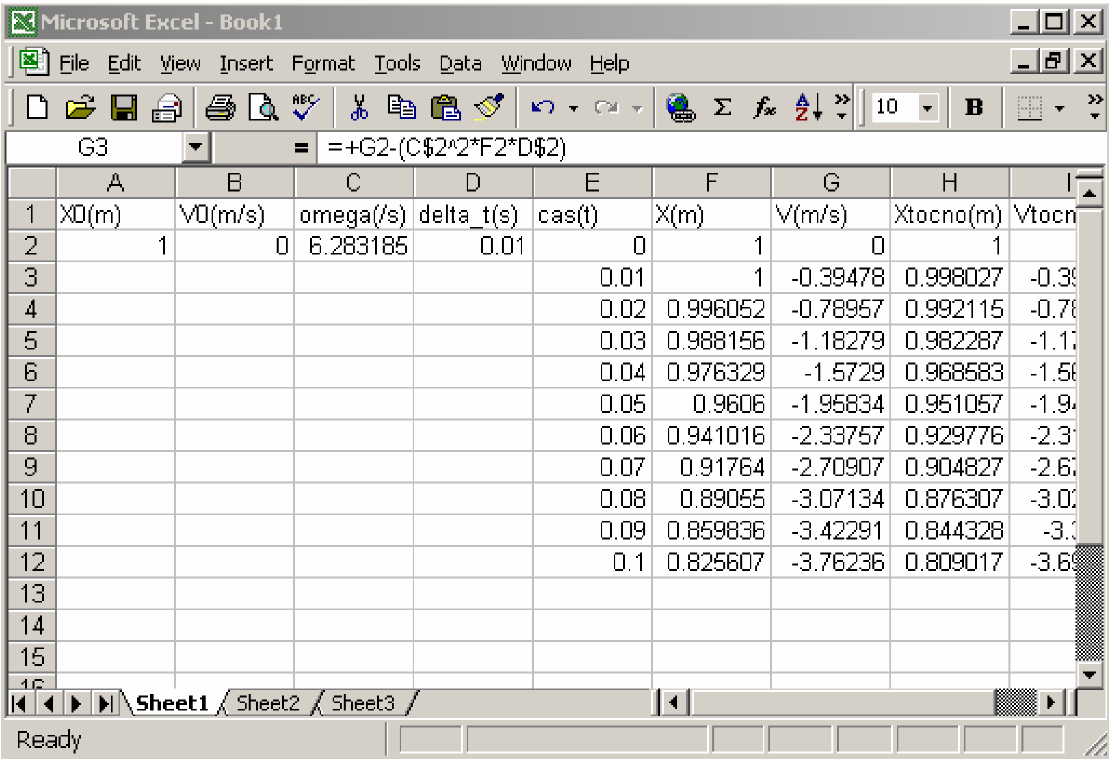
Natančnost numerične rešitve bomo ocenili s primerjavo z točno analitično rešitvijo. Pri navedenih začetnih pogojih je točna rešitev:

$$x = x_o \cos(\omega t),$$

$$v = -x_o\omega \sin(\omega t) = -v_o \sin(\omega t),$$

kjer je amplituda hitrosti $v_o = x_o\omega = 2\pi$ m/s.

Excel tabela:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X0(m)	V0(m/s)	omega(/s)	delta_t(s)	cas(t)	X(m)	V(m/s)	Xtocno(m)	Vtocn
2	1	0	6.283185	0.01	0	1	0	1	
3					0.01	1	-0.39478	0.998027	-0.3
4					0.02	0.996052	-0.78957	0.992115	-0.7
5					0.03	0.988156	-1.18279	0.982287	-1.1
6					0.04	0.976329	-1.5729	0.968583	-1.5
7					0.05	0.9606	-1.95834	0.951057	-1.9
8					0.06	0.941016	-2.33757	0.929776	-2.3
9					0.07	0.91764	-2.70907	0.904827	-2.6
10					0.08	0.89055	-3.07134	0.876307	-3.0
11					0.09	0.859836	-3.42291	0.844328	-3.
12					0.1	0.825607	-3.76236	0.809017	-3.6
13									
14									
15									

IV.4 POVEZAVA MED KOLIČINAMI PRI NIHANJU

I. Odmik, pospešek, frekvenca in perioda

Iz enačbe za lastno nedušeno nihanje

$$\omega^2 x + d^2x/dt^2 = 0,$$

kjer je pospešek $a = d^2x/dt^2 = x''$ sledi, da je pospešek pri nihanju $a = -\omega^2 x$. Za jakost pospeška vzemimo le pozitivne (absolutne) vrednosti $a \rightarrow |a|$, $v \rightarrow |v|$, $x \rightarrow |x|$, pri čemer oznake za absolutne

$$|a| = \omega^2 |x|,$$

zato od tod lahko izrazimo krožilno frekvenco, frekvenco in periodo nihanja kot funkcije pospeška in odmika od ravnovesne lege:

$$\omega = \sqrt{\frac{|a|}{|x|}}, \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{|a|}{|x|}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{|\text{pospešek}|}{|\text{odmik}|}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{|x|}{|a|}} = 2\pi\sqrt{\frac{|\text{odmik}|}{|\text{pospešek}|}}.$$

II. Odmik in hitrost pri nihanju

Naj je odmik pri nihanju podan kot $x = x_o \cos(\omega t)$. Ker je hitrost časovni odvod odmika $v = x' = dx/dt$, je

$$v = -x_o\omega \sin(\omega t) = -v_o \sin(\omega t),$$

kjer je amplituda hitrosti v_o *podana z amplitudo odmika in krožilno frekvenco:* $v_o = x_o\omega$. *Ker pa velja, da je*

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1, \text{ (od kod to sledi?)}$$

izrazimo $\sin(\omega t) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\omega t)}$, tako da je

$$v = -x_0\omega\sin(\omega t) = \pm x_0\omega\sqrt{1-\cos^2(\omega t)} = \pm\omega\sqrt{x_0^2 - x_0^2\cos^2(\omega t)}$$

$$v = \pm\omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$$

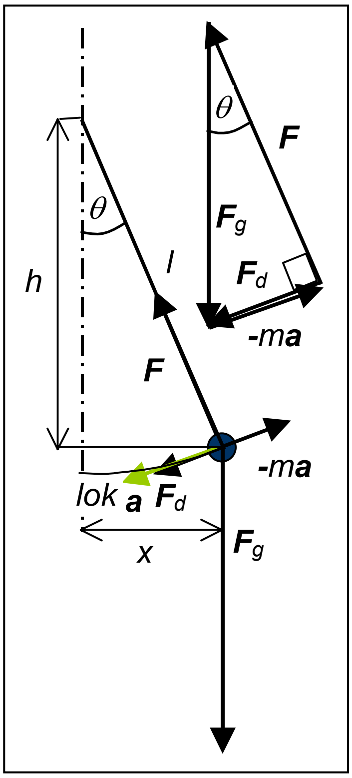
Kadar nas zanima hitrost pri nihanju zgolj po jakosti in ne tudi po smeri (predznaku), jo izračunamo iz krožilne frekvence, amplitude odmika in odmika:

$$|v| = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}\ .$$

Za pospešek pri nihanju pa amplituda odmika ni potrebna:

$$|a| = \omega^2\,|x|$$

IV.5 ENOSTAVNO NIHALO



Masna točka *m* je pritrjena na lahek drog dolžine *l*, ali pa visi na napeti nitki. $\boldsymbol{F}$ je sila vrvice na maso, $\boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{F}_d$, $F_d = F_g \sin\theta$. Enačba gibanja:

$ma = F_d = mg\sin\theta \Rightarrow\ a = g\sin\theta$.

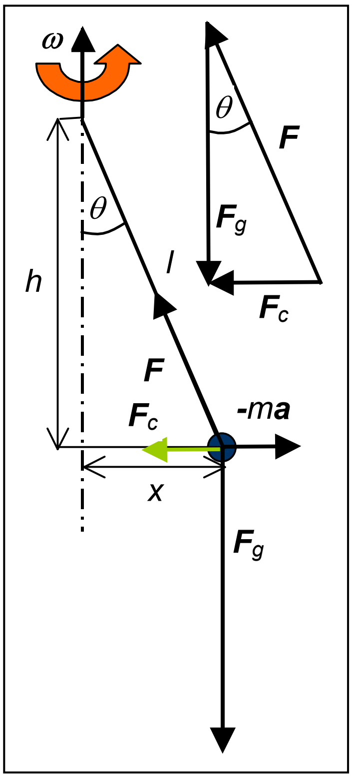
Velja $\sin\theta = x/l$.

$a = g\sin\theta = g\,x/l$, po smeri pa sta odmik in pospešek skorajda nasprotna. Ker pri nihanju velja $|a| = \omega^2|x| = |x|\,g/l \Rightarrow \omega^2 = g/l \Rightarrow$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},\quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}},\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ladij. Stroj. VSS 1. let. Mehanika in hidromehanika predav. V. Malačič

IV.6 KROŽEČE GIBANJE NIHALA



Navadno nihalo *kroži* s krožilno frekvenco ω. Na masno točko deluje centripetalna sila $F_c = ma_c = m\,x\,\omega^2$, kjer je x polmer kroženja. F_c je usmerjena vodoravno**,** vedno proti osi vrtenja (središču kroženja). Vztrajnostna sila (centrifugalna), *-**ma*** pa je usmerjena navzven, proč od osi. Kroženje je pospešeno gibanje. Centripetalna sila zagotavlja horizontalno komponento sile v vrvi. Slednja je po jakosti enaka: $F = (F_g^2 + F_c^2)^{1/2}$. Iz geometrije problema sledi: $\tan\theta = x/h = F_c/F_g = x\,\omega^2/g$. Za majhne odklone od vertikale je $\tan\theta \cong \sin\theta = x/l$. Za razmerje F_c/F_g torej velja: $x\,\omega^2/g \cong x/l \Rightarrow$ za majhne odmike krožečega nihala od vertikale postanejo krožilna frekvenca, frekvenca in perioda kroženja nihala:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kar so enaki izrazi kot pri nihanju nihala. Vendar se moramo zavedati, da če bi vrteli nihalo s krožilno frekvenco manjša od te vrednosti, se nihalo sploh ne bi odklonilo, če pa z večjo frekvenco od te mejne, pa bi se kroglica nihala pričela dvigati in bi za tem opisovala stožec. Če je $\omega >> (g/l)^{1/2}$, tedaj odmik od ravnovesne lege ni več majhen in velja

$$x/h = x\,\omega^2/g \Rightarrow h = g/\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}},$$

kjer nastopa 'višina' *h* namesto dolžine *l* nihala.

IV.7 NIHANJE - VAJE

Seminarska naloga

I. za numerični izračun enačbe nihanja

$$\omega^2 x + x'' = 0,$$

s pomočjo diferenčnih enačb prvega reda po Eulerjevi metodi:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t\, v_n, \qquad v_{n+1} = v_n - \Delta t\, \omega^2 x_n$$

Uporabi v Excel programu namesto Δt = 0,01 s dva druga koraka:

a) Δt = 0,1 s b) Δt = 0,001 s.

V obeh primerih čas t teče v korakih Δt *v intervalu* [0, 1], kjer je $t_n = n\Delta t$, kjer je n = 0, 1, 2, …
Primerjaj rezultate v vseh korakih Δt tako, da narišeš diagram razlike med numerično rešitvijo in pravo, analitično rešitvijo za vsak trenutek t_n, to je

$$x_n - x_0 \cos(\omega\, t_n).$$

Seminarska naloga

II. Numerično rešuj po Eulerjevi metodi dušeno nihanje, za katerega velja enačba

$$x'' + \gamma x' + \omega^2 x = 0,$$

kjer je faktor dušenja γ = 0.1/s.
Uporabi ekvivalenten sistem enačb

$$x'' = v' = -\gamma x' - \omega^2 x \text{ in } x' = v,$$

ki ga rešuješ po postopku:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t\, v_n, \qquad v_{n+1} = v_n (1- \gamma\Delta t) - \Delta t\, \omega^2 x_n.$$

Seminarska naloga

III. Numerično rešuj po Eulerjevi metodi vsiljeno dušeno nihanje, za katerega velja enačba

$$x'' + \gamma x' + \omega^2 x = F(t),$$

a) kjer je F = konst. = 2 m/s^2

b) $F(t) = A \cos(\Omega t)$, kjer je A = 0.3 m in $\Omega = \pi$ /s

IV. Analitična rešitev za dušeno nihanje je:

$$x = x_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega t) + x_2 e^{-\alpha t} \sin(\omega t),$$

kjer naj so konstante x_1 = 0,5 m, x_2 = 0,2 m, α = 0,1/s in ω = 2 π/s. Koliki so odmik x, hitrost $v = dx/dt$ in pospešek $a = dv/dt$ nihajočega telesa po času t = 2 s?

V. Gibalna količina – točkasto telo

Naj se telo mase m giblje le premočrtno, nanj deluje v času t povprečna zunanja sila F. zaradi delovanja sile se spremeni hitrost težišča telesa od v_0 do v. Povprečen pospešek a je:

$$a = \frac{(v - v_0)}{t}.$$

2. Newton. zakon se tako zapiše:

$$F = ma = m\frac{(v - v_0)}{t},$$

tega množimo s časom, v katerem je delovala povprečna sila in dobimo

$$Ft = mv - mv_0 = G - G_0,$$

kjer je vpeljana gibalna količina $G = mv$, ki je zgolj hitrost množena z maso. Produkt Ft se imenuje *impulz sile*, ali *sunek sile*. Zgornja enačba pove, da je sprememba gibalne količine enaka sunku sile. Če sunka sile ni, se gibalna količina ohranja:

$$mv = mv_0,$$

kar imenujemo *izrek o ohranitvi gibalne količine.*

Če pri poljubnem gibanju telesa v *prostoru* deluje v času t povprečna zunanja sila $\boldsymbol{F}$, se zaradi delovanja sile spremeni hitrost težišča telesa od $\boldsymbol{v}_0$ do $\mathbf{v}$. Povprečen pospešek $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0)}{t},$$

Newtonov zakon in sprememba gibalne količine v vektorski obliki:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0)}{t}$$

$$\boldsymbol{F}t = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_0,$$

kar lahko zapišemo komponentno pri gibanju telesa v ravnini:

$$(F_x, F_y)t = m(v_x, v_y) - m(v_{x0}, v_{y0}) = (G_x, G_y) - (G_{x0}, G_{y0})$$

ali za vsako komponento posebej:

x: $\quad F_x t = mv_x - mv_{x0} = G_x - G_{x0}$

y: $\quad F_y t = mv_y - mv_{y0} = G_y - G_{y0}$.

Če je v časovnem intervalu t, v katerem se je zgodila sprememba hitrosti telesa, delovala nanj časovno spremenljiva sila, potem se spomnimo, kako se povprečna sila izračuna:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{t}\sum_i F_i \Delta t ,$$

če se ta zvezno spreminja s časom, je potrebno narediti zelo gosto vsoto, zmanjšati Δt:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{t}\lim_{\Delta t \to 0}\sum_i F_i \Delta t = \frac{1}{t}\int_0^t F\,dt ,$$

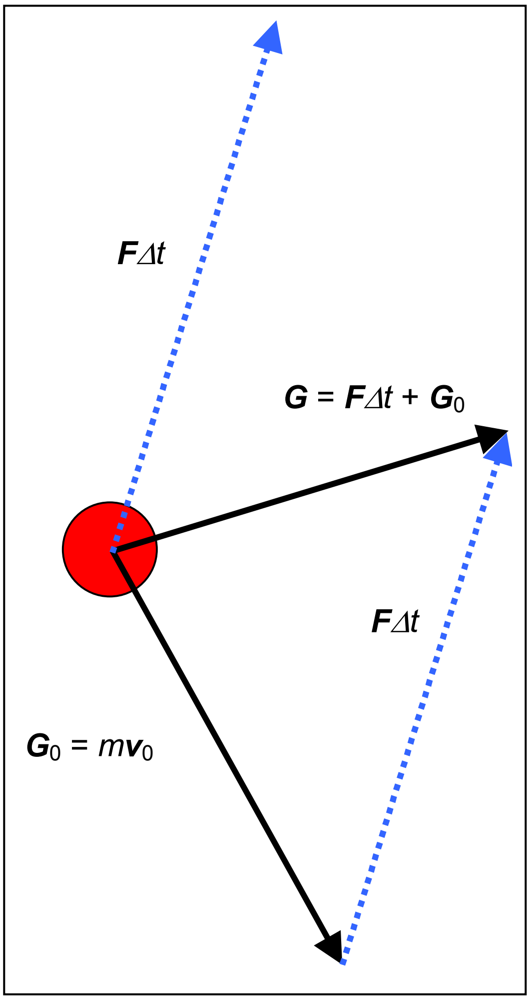
V izrazu za spremembo gibalne količine nadomestimo Ft z $\langle F \rangle t$, tega pa izrazimo z integralom:

$$\int_0^t F\,dt = mv - mv_0 = G - G_0 .$$

Izraz za spremembo gibalne količine je splošnejši od 2. Newtonovega zakona, saj velja tudi v primeru, če se masa telesa, ki ga opazujemo, ne ohranja.

Primer spremembe gibalne količine (točkasta telesa)

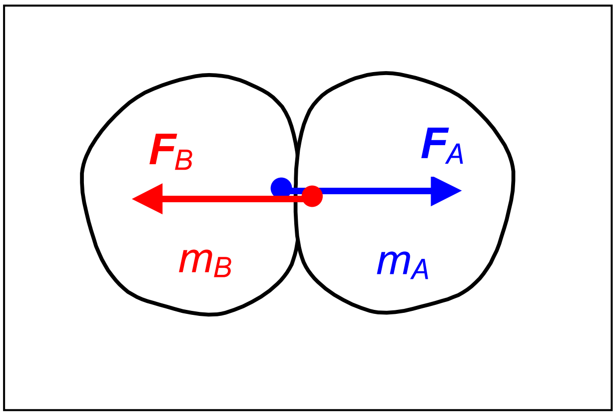
I. Premo gibanje telesa



čas delovanja sile naj je Δt, zato se sprememba gibalne količine zapiše:

$$F\Delta t = G - G_0 = mv - mv_0.$$

VI. TRKI (BINARNI) - translatorna gibanja



Naj telo *B*, ki ima maso m_B in začetno hitrost $\boldsymbol{v}_{B1}$ deluje v obdobju stika (trka) s silo $\boldsymbol{F}_A$ na drugo telo mase m_A, ki ima začetno hitrost $\boldsymbol{v}_{A1}$. Torej deluje telo *B* na telo *A* s silo $\boldsymbol{F}_A$ in s sunkom sile:

$$\boldsymbol{S}_A = \int_0^t \boldsymbol{F}_A dt,$$

zato po izreku o spremembi gibalne količine telo *B* povzroči spremembo gibalne količine telesu *A*:

$$\int_0^t \boldsymbol{F}_A dt = m_A(\boldsymbol{v}_{A2} - \boldsymbol{v}_{A1}).$$

Telo *A* pa deluje na telo *B* s sunkom sile:

$$\boldsymbol{S}_B = \int_0^t \boldsymbol{F}_B dt$$

in povzroči spremembo gibalne količine telesu *B*

$$\int_0^t \boldsymbol{F}_B dt = m_B(\boldsymbol{v}_{B2} - \boldsymbol{v}_{B1}).$$

Po 3. Newton. zakonu: $\boldsymbol{F}_A = -\boldsymbol{F}_B$, zato je

$$\boldsymbol{S}_B = \int_0^t \boldsymbol{F}_B dt = -\int_0^t \boldsymbol{F}_A dt = -\boldsymbol{S}_A.$$

Združimo enačbi za spremembo gibalnih količin obeh teles:

$$\boldsymbol{S}_B = m_B(\boldsymbol{v}_{B2} - \boldsymbol{v}_{B1}) = -\boldsymbol{S}_A = -m_A(\boldsymbol{v}_{A2} - \boldsymbol{v}_{A1}),$$

v tej enačbi lahko pozabimo na sunke sil in zapišemo *izrek o ohranitvi gibalne količine:*

$$m_A \boldsymbol{v}_{A1} + m_B \boldsymbol{v}_{B1} = m_A \boldsymbol{v}_{A2} + m_B \boldsymbol{v}_{B2} = \mathbf{konst.},$$

ki pravi: skupna gibalna količina vseh teles pred trkom je enaka skupni gibalni količini vseh teles po trku.
Ohranitev gibalne količine vseh teles, ki so udeležena pri trku velja za vsako vrsto trka*, tako za prožne, kot za neprožne trke. Med trkom delujejo močne* notranje sile *med telesi, ki trčijo. Za spremembo gibalne količine sistema vseh teles pa so potrebne* zunanje sile*, kot je potrebna zunanja sila, da telo dobi pospešek. Za trk v 2D ravnini ta izrek o ohranitvi gibalne količine vseh teles pri trku pomeni dve enačbi:*

x: $$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$
y: $$m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}.$$

VI.1 Idealen prožni trk

Pri prožnem trku teles se poleg skupne gibalne količine ohranja tudi kinetična energija. za sistem dveh teles *A* in *B* to pomeni:

$$W_{kA1} + W_{kB1} = W_{kA2} + W_{kB2},$$

ali

$$m_A \frac{v_{A1}^2}{2} + m_B \frac{v_{B1}^2}{2} = m_A \frac{v_{A2}^2}{2} + m_B \frac{v_{B2}^2}{2},$$

poleg ohranitve skupne kinetične energije pa se seveda ohranja tudi gibalna količina.

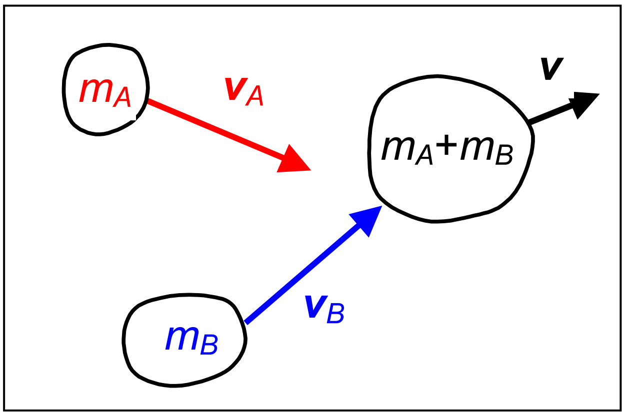
VI.2 Neprožni trk

Pri tem se skupna kinetična energija teles, ki so udeležena pri trku, ne ohranja. Del začetne kinetične energije se porabi za notranjo energijo in tudi za deformacijsko energijo, zato: $W_{k2} < W_{k1}$*, kjer je* W_{k1} *začetna kinetična energija,* W_{k2} *pa končna skupna kinetična energija teles po trku. Velja:*

$$W_{k1} - W_{k2} = W_{notranja} + W_{deformacija}.$$

Obstajajo tudi trki pri rotaciji togih teles- takrat se ohranja vrtilna količina, o tem kasneje.

1. PRIMER NEPROŽNEGA TRKA
DVE MASI GLINE



Dve glini se pri trku sprimeta, ohranja se gibalna količina:

$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B = (m_A+m_B)\mathbf{v}$.

Za premi (1D) trk (vzdolž premice) se sistem poenostavi:

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A+m_B)v,$$

od tod pa dobimo hitrost sprijete mase gline:

$$v = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}.$$

Kinetična energija se pri tem trku ne ohranja, deformacijska energija je maksimalna, telesi sta po trku najbolj deformirani, prožnoste energije praktično ni:

$$W_{k1} = m_A \frac{v_A^2}{2} + m_B \frac{v_B^2}{2} = W_{k2} + W_D = \frac{(m_A+m_B)v^2}{2} + W_D,$$

deformacijska energija je enaka razliki med kinetično energijo pred trkom in tisto po trku:

$$W_D = W_{k1} - W_{k2} = m_A \frac{v_A^2}{2} + m_B \frac{v_B^2}{2} - \frac{(m_A+m_B)v^2}{2}.$$

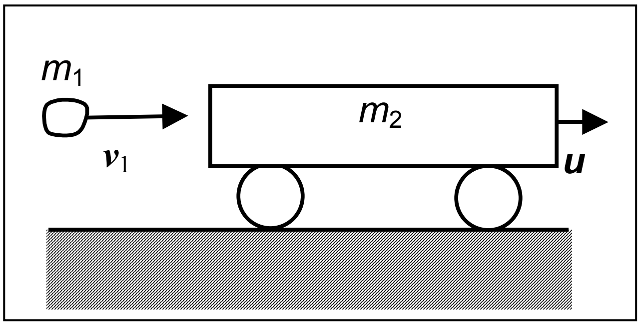
Če telo *B* pred trkom miruje, je $v_B = 0 \Rightarrow$

$$v = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B},$$

$$W_D = m_A \frac{v_A^2}{2} - \frac{(m_A + m_B)v^2}{2} = m_A \frac{v_A^2}{2} - m_A^2 \frac{v_A^2}{(m_A + m_B)2},$$

$$W_D = \frac{m_A v_A^2}{2} \frac{m_B}{(m_A + m_B)} = W_{k1} \frac{m_B}{(m_A + m_B)}$$

2. PRIMER NEPROŽNEGA TRKA



Kepa gline prileti v voz, ki je miroval. Po sunku se ustavi.
m_1 = 12.5 kg
m_2 = 64 kg
v_1 = 12 m/s
s = 100 m

u = ? a = ? $F_{zaviral}$ = ? $A_{zaviralno}$ = ?

Začetno hitrost vozička in gline, ki se na vozičku obdrži, določimo iz ohranitve gibalne količine pri trku:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u,$$

kjer je $u(0) = u$, začetna hitrost vozička. Po trku naj se voziček giblje enakomerno pojemajoče, ustavi se po času t_0, ki ga ne poznamo:

$$u(t_0) = 0 = u - a\, t_0 \Rightarrow u = a\, t_0 \Rightarrow t_0 = u/a$$

kjer je a pojemek ($a > 0$). Poznamo opravljeno pot, zato jo zapiušemo za enakomerno pojemajoče gibanje:

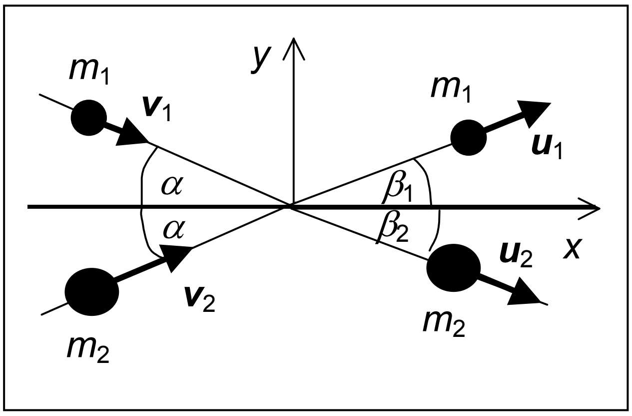
$s = \langle u \rangle\, t_0 = [u(t_0) + u(0)]/2\; t_0 = u/2\; t_0 = (u\, t_0)/2 = a\, t_0^2\, /2 \Rightarrow$

$$s = u^2/(2a) \Rightarrow a = u^2/(2s).$$

$F_{zav} = (m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)\, u^2/(2s),$

$A_{zav} = F_{zav}\, s = W_{\mathrm{kk}} = (m_1 + m_2)u^2/2,\; W_{\mathrm{kz}} = m_1\, v_1^2/2,$
$W_{\mathrm{kk}}/\, W_{\mathrm{kz}} = ?$

3. PRIMER TRKA



Po ledu drsita dve ploščici m_1 = 6 kg, m_2 = 5 kg, obe pod kotom $\alpha = 30^0$ glede na x-os, s hitrostima v_1 = 3 m/s, v_2 = 10 m/s. Po trku odleti prva ploščica s hitrostjo u_1 = 6 m/s pod kotom $\beta_1 = 30^0$. Kaj pa druga ploščica?
$u_2 = ?\ \beta_2 = ?$

Ohranitev gibalne količine

x: $m_1v_1 \cos\alpha + m_2v_2 \cos\alpha = m_1u_1 \cos\beta_1 + m_2u_2 \cos\beta_2$
y: $-m_1v_1 \sin\alpha + m_2v_2 \sin\alpha = m_1u_1 \sin\beta_1 - m_2u_2 \sin\beta_2$

x)^2 : $(m_2u_2 \cos\beta_2)^2 = [(m_1v_1 + m_2v_2) \cos\alpha - m_1u_1 \cos\beta_1]^2$
y)^2 : $(m_2u_2 \sin\beta_2)^2 = [-(-m_1v_1 + m_2v_2) \sin\alpha + m_1u_1 \sin\beta_1]^2$

x)^2 + y)^2; $\sin^2\beta_2 + \cos^2\beta_2 = 1$

$$(m_2u_2)^2 = [(m_1v_1 + m_2v_2) \cos\alpha - m_1u_1 \cos\beta_1]^2 + [(m_1v_1 - m_2v_2) \sin\alpha + m_1u_1 \sin\beta_1]^2$$

u_2 = D. N.
y)/ x): $m_2u_2 \sin\beta_2/(m_2u_2 \cos\beta_2) = \tan \beta_2$ = D. N.

D.N. končaj.

4. PRIMER – NEPROŽNI TRK

Svinčeni metek mase m_1 = 80 g s hitrostjo 52 m/s trči v svinčeno telo mase m_2 = 240 g. Kolika je energija, ki se porabi za deformacijo in za segrevanje, če je trk neprožen? Kolikšno pa je povišanje temperature, če se vsa energija pretvori v toploto? (c_p = 129,6 J/(kgK))

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u \Rightarrow$$

$$u =$$

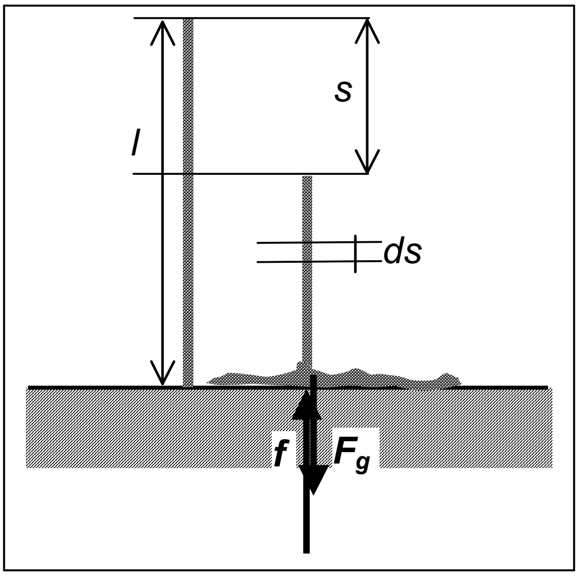
$W_{kz} = m_1 v_1^2/2$, $W_{kk} = (m_1 + m_2)u^2/2 =$

$$W_{kk} - W_{kz} = Q = (m_1 + m_2)c_p \Delta T,$$

$$\Delta W_k = \frac{v_1^2 m_1}{2}\left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right] = (m_1 + m_2)c_p \Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta T = ?$$

5. PRIMER
PADAJOČA VERIGA



Verigo spustimo na palubo. S koliko silo deluje na palubo veriga?
$\boldsymbol{F_g}$ – teža padajoče verige
f – sila podlage – ta ni enaka sili teže verige na tleh $\mu = dm/ds$ [kg/m] masa verige na enoto dolžine.
Majhen košček verige z maso $dm = \mu\, ds$ ima tik pred padcem na tla največjo hitrost $v = g\, t$ (prosti pad), v času t se ta delec verige spusti za $s = g\, t^2/2$, čas iz obeh enačb izločimo $v^2 = 2\, gs$. V tem trenutku t je tudi dolžina verige s na tleh, torej se nahaja na tleh masa $m = \mu\, s$, zato ta del verige na tleh deluje na tla s težo:

$$F_g = \mu\, s\, g.$$

Košček verige mase dm pred padcem ima hitrost $v = ds/dt$ in zato tudi gibalno količino $dG = dm\, v = \mu\, ds\, ds/dt$. Gibalna količina po padcu = 0. Sprememba gibalne količine ob padcu glede na tisto pred padcem je enaka sunku sile podlage (hitrost je usmerjena navzdol, zato je z neg. predznakom):

$$0 - \mu\, ds\, ds/dt = f\, dt,$$

ali

$$- \mu\, (ds/dt)^2 = -\mu\, v^2 = f,$$

Vendar pa ta enačba ni kompletna, ker ne upošteva, da sila podlage mora uravnovestiti tudi silo teže verige, ki je že na tleh, zato

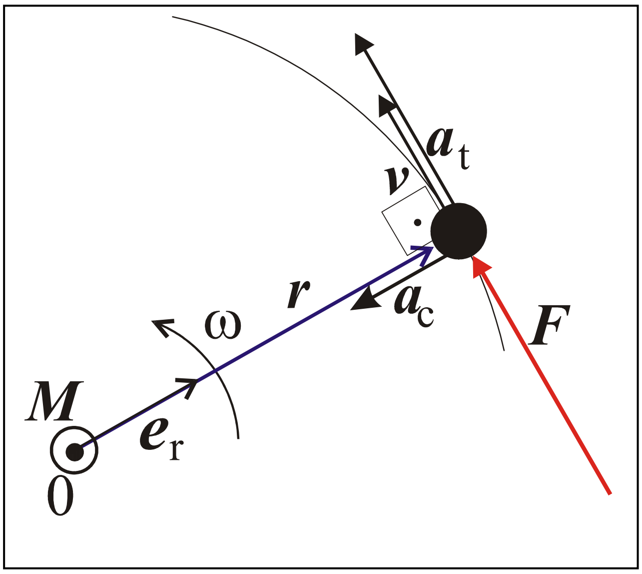
$$- \mu\, (ds/dt)^2 - F_g = - \mu\, v^2 - \mu\, s\, g = -\mu\, 2s\, g - \mu\, s\, g = -3\mu sg = f,$$

$|\, f\, | = 3\mu sg = 3\, F_g$: $t = 0$, $s = 0$, $f = 0$; $t = t_{\max}$ $|\, f\, | = 3\, F_{gtot}$.

VII. VRTILNA KOLIČINA IN VZTRAJNOSTNI MOMENT

VII.1 NAVOR IN KOTNI POSPEŠEK PRI KROŽENJU TOČKASTEGA TELESA

(Applied Mechanics: Dynamics of a rotating particle)



Zunanja sila ***F*** naj deluje na krožeče točkasto telo v tangencialni smeri, stalno spreminja smer, ki je vzporedna hitrosti telesa. Telo naj je pritrjeno s togo palico dolžine *r* v osišče O in naj okrog njega kroži brez trenja (idealen ležaj). Sila izvaja navor glede na osišče

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Ker je $\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{v}(t)$, je jakost navora

$$M = r\,F.$$

Tangencialno delujoča sila po 2. Newton. zakonu zagotavlja tangencialni pospešek $a_t = r\,\alpha$, kjer je α kotni pospešek (= $d\omega/dt$, kjer je ω kotna hitrost). Torej je navor:

$$M = r\,m\,a_t = m\,r^2\,\alpha = J\alpha$$

Navor na osišče je sorazmeren kotnemu pospešku krožečega točkastega telesa. Sorazmernostni faktor

$$J = m\,r^2$$

imenujemo *vztrajnostni moment* točkastega telesa. Vztrajnostni moment tankega obroča polmera *r* in mase *m* se tudi izračuna po tej formuli za *J*, za ostala toga telesa pa to ne velja.

VII.2 VRTILNA KOLIČINA TOČKASTEGA TELESA

2. Newtonov zakon $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ zapišimo s pomočjo gibalne količine $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{G}/dt,$$

slednja zveza velja tudi, če se masa telesa ne ohranja in sledi iz izreka o ohranitvi gibalne količine (sunek sile = sprememba gibalne količine). Vpeljemo novo količino, vrtilno količino Γ:

$$\Gamma = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}.$$

Zanima nas časovna sprememba Γ, pri čemer naj se masa krožečega telesa ne spreminja:

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} =$$
$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt},$$

saj je $\boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} = m\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0$. Torej je

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{G}}{dt}.$$

Ker je $d\boldsymbol{G}/dt = \boldsymbol{F}$, velja:

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M},$$

saj je navor na osišče $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Torej velja, da za spremembo vrtilne količine točkastega telesa:

Sprememba vrtilne količine na časovno enoto je enaka navoru zunanje sile.

Izrek o ohranitvi vrtilne količine pa pravi: Če ni navora zunanjih sil, se vrtilna količina ohranja: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0} = d\Gamma/dt \Rightarrow \Gamma$ = konst., Γ ni funkcija časa. Ta izrek velja tudi za vrtenje togega telesa.

VII.3 CENTRALNA SILA IN VRTILNA KOLIČINA TOČKASTEGA TELESA

Naj je sila $\boldsymbol{F}$ centralna sila:

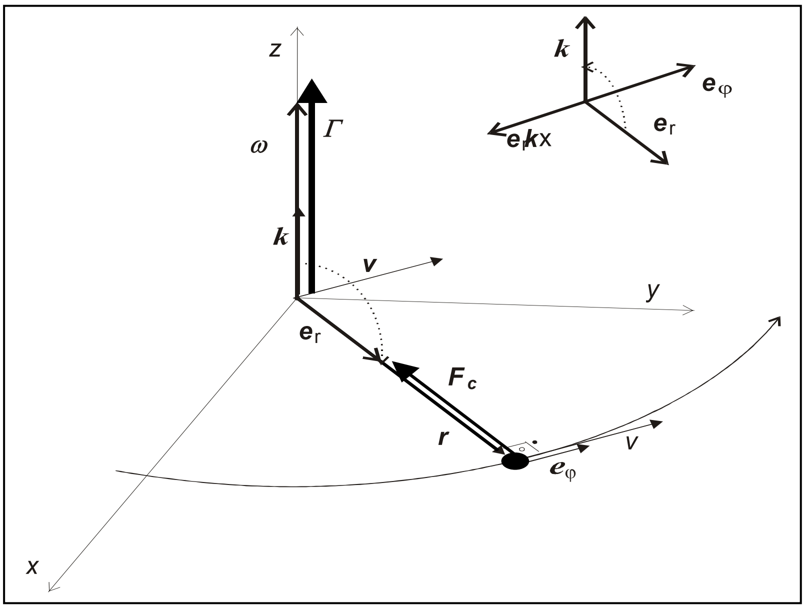
$$\boldsymbol{F} = f(r)\, \mathbf{e}_r,$$

kjer je $\mathbf{e}_r$ enotni vektor vzdolž radij vektorja do opazovane masne točke. Primera centralne sile sta centripetalna sila $\boldsymbol{F} = - mr\omega^2\, \mathbf{e}_r$ in gravitacijska sila. Centralna sila leži vedno na nosilki, ki gre skozi izhodišče koordinatnega sistema in je po jakosti odvisna le od oddaljenosti od izhodišča, $F = f(r)$. Zapišimo s kolikim navorom deluje centralna sila na center kroženja, pri čemer upoštevajmo $\boldsymbol{r} = r\, \mathbf{e}_r$:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times f(r)\, \mathbf{e}_r = r\, \mathbf{e}_r \times f(r)\, \mathbf{e}_r = r\, f(r)\, \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = \mathbf{0}.$$

Centralna sila ne izvaja navora na center kroženja. Ker pa je navor take sile enak nič, se ohranja vrtilna količina krožečega telesa, če nanj deluje samo centralna sila: $\boldsymbol{M} = \mathbf{0} = d\Gamma/dt \Rightarrow \Gamma =$ konst. Ker pri enakomernem kroženju deluje na krožeče telo samo centripetalna sila (radialna ali centralna sila), se *ohranja vrtilna količina* (točkastega) telesa, ki *enakomerno kroži* (ima stalno kotno hitrost).
Za točkasto krožeče telo je obodna hitrost $v = r\, \omega\, \mathbf{e}_\varphi$, vrtilna količina pa:

$$\Gamma = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = r\, \mathbf{e}_r \times m\, r\, \omega\, \mathbf{e}_\varphi = mr^2\omega\, \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = mr^2\omega\, \boldsymbol{k}.$$



$\Gamma \uparrow\uparrow \boldsymbol{k}$. Ker je $\omega = \omega\, \boldsymbol{k}$, tudi $\omega \uparrow\uparrow \boldsymbol{k} \Rightarrow \Gamma = mr^2\omega$ in je $\Gamma \uparrow\uparrow \omega$. To velja za točkasto telo, le v posebnih primerih tudi za togo telo.

Vrtilna količina pri pospešenem kroženju točkastega telesa

Pokazali smo, da velja za točkasto krožeče telo:

$$\boldsymbol{\Gamma} = m r^2 \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \Gamma = m r^2 \omega \,.$$

Že pri navoru tangencialne sile smo vpeljali vztrajnostni moment točkastega telesa $J = mr^2$, ki ga vstavimo v izraz za vrtilno količino:

$$\boldsymbol{\Gamma} = J\boldsymbol{\omega}\,, \quad \Gamma = J\,\omega\,.$$

Pokazali smo, da se pri enakomernem kroženju ohranja vrtilna količina. Kako je pri neenakomernem kroženju točkastega telesa z vrtilno količino? Tedaj delujeta dve sili na krožeče telo, centripetalna (centralna) in tangencialna sila. Njuna vsota je celotna zunanja sila na krožečo točko:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_t,\ \boldsymbol{F}_c = -\, m r \omega^2\, \mathbf{e}_r,\ \ \boldsymbol{F}_t = m\, \boldsymbol{a}_t = m\, a_t\, \mathbf{e}_\varphi,\ \boldsymbol{F}_c \perp \boldsymbol{F}_t.$$

Navor obeh sil na osišče krožečega telesa:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_t) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_t.$$

Prvi člen na desni je navor centralne (centripetalne) sile – za tega smo pokazali, da je enak nič, ostane navor tangencialne sile:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{r} \times m\, a_t\, \mathbf{e}_\varphi = \boldsymbol{r} \times m\, r\, \alpha\, \mathbf{e}_\varphi = m\, r\, \alpha\, \boldsymbol{r} \times \mathbf{e}_\varphi$$
$$= m\, r^2\, \alpha\, \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = m\, r^2\, \alpha\, \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{M} = m\, r^2\, \alpha\, \boldsymbol{k} = d\boldsymbol{\Gamma}/dt.$$

Pri enakomernem kroženju je $\alpha = 0 \Rightarrow \boldsymbol{M} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma} =$ konst. Pri neenakomernem kroženju $\alpha \neq 0$ in se vrtilna količina *ne* ohranja. Ponovno zapišemo navor z vztraj. momentom točk. telesa $J = mr^2$:

$$\boldsymbol{M} = J\, \alpha\, \boldsymbol{k} \Rightarrow M = J\, \alpha,$$

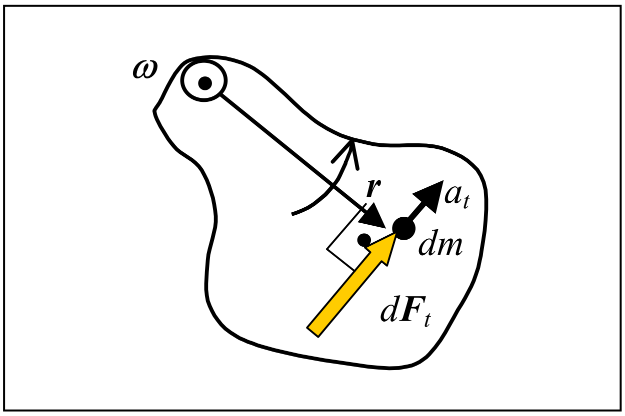
od prej vemo, da

$$\boldsymbol{\Gamma} = J\boldsymbol{\omega} = J\omega\, \boldsymbol{k} \Rightarrow \Gamma = J\, \omega.$$

Torej za točkasto krožeče telo velja $\boldsymbol{\Gamma} \uparrow\uparrow \boldsymbol{M}$, kar v splošnem ne velja za togo telo.

VII.4 ROTACIJA TOGEGA TELESA OKOLI STALNE OSI

(Applied Mechanics: Dynamics of rotating body)



Navor, ki zagotavlja kotni pospešek α togemu telesu, ki se vrti okoli osišča dobimo tako, da najprej zapišemo silo $d\boldsymbol{F}_t$, ki zagotavlja tangencialni pospešek $\boldsymbol{a}_t$ masnemu delcu *dm* togega telesa:

$d\boldsymbol{F}_t = dm\, \boldsymbol{a}_t$, kjer je $d\boldsymbol{F}_t \perp \boldsymbol{r}$. Navor sile $d\boldsymbol{F}_t$ na osišče je:

$$d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F}_t,$$

ker je $d\boldsymbol{F}_t \perp \boldsymbol{r}$, je $dM = r\, dF_t$.

Skupen navor na osišče je vsota majhnih navorov

$$M = \int r\, dF_t = \int r\, dm\, a_t = \int r^2 \alpha\, dm,$$

kjer smo upoštevali, da je $a_t = r\alpha$. Ker imajo vsi masni delci *togega* telesa enak kotni pospešek α, lahko slednjega izpostavimo pred integral:

$$M = \alpha \int r^2\, dm,$$

kjer *M* pomeni *vsoto vseh zunanjih navorov*.

Tako smo dobili za togo telo podoben izraz za navor, kot smo ga imeli za točkasto telo:

$$M = \alpha\, m\, r^2 = \alpha\, J,$$

kjer smo uvedli vztrajnostni moment točkastega telesa kot $J = m\, r^2$.

VII.5 VZTRAJNOSTNI MOMENT TOGEGA TELESA

Uvedemo *vztrajnostni moment za togo telo*:

$$J = \int r^2 \, dm,$$

s katerim zapišemo navor zunanjih sil na togo vrteče se telo okoli stalne osi na enak način kot smo to naredili za točkasto telo

$$M = J\alpha.$$

Izraz za vztrajnostni moment togega telesa lahko zapišemo tudi kot produkt celotne mase telesa in *krožilnim* polmerom togega telesa r_J:

$$J = \int r^2 \, dm = m \, r_J^2,$$

kjer je $r_J^2 = J/m$.

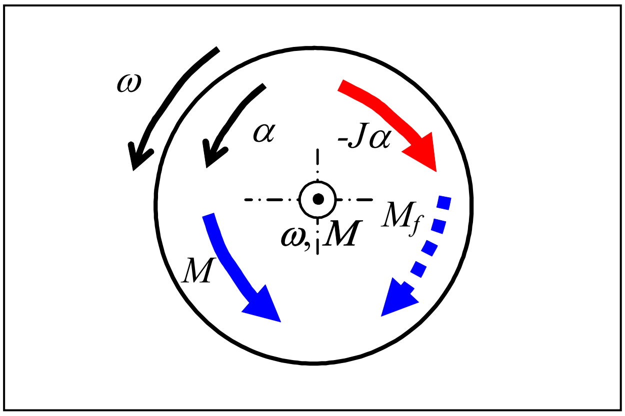
VII.6 VZTRAJNOSTNI NAVOR (DVOJICE)

Primerjajmo izraza

$F = ma$ $\qquad\qquad$ $M = J\alpha$.

Vztrajnostni moment J ima podoben pomen pri rotaciji togega telesa, kot ga ima masa pri translatornem gibanju (težišča) telesa. Podobno kot smo vpeljali vztrajnostno silo, ki ima smer nasprotno pospešku telesa (- *ma*) in 'nasprotuje' zunanji sili, si lahko predstavljamo *vztrajnostni* navor (navidezne dvojice sil) telesa jakosti $J\alpha$ (s predznakom pa $-J\alpha$), ki nasprotuje zunanjemu navoru M in katerega smer nasprotuje kotnemu pospešku α. V takem opisu tudi pospešeno rotacijo telesa obravnavamo kot statičen problem, podobno kot smo s pomočjo vztrajnostne sile premočrtno pospešeno gibanje telesa prevedli na statičen problem (vsota vseh sil, vztrajnostne in zunanjih, je enaka nič). Vztrajnostni navor je *reakcijski navor* – ta ni aktivni navor, ki 'poganja' vrtenje.

VII.7 POSPEŠENO VRTENJE GREDI



Gred z vztrajnikom vztrajnostnega momenta J se vrti s kotno hitrostjo ω, ki se ji povečuje jakost s kotnim pospeškom α. Tega zagotavlja zunanji navor motorja, zato je predznak in usmeritev kotnega pospeška α enaka predznaku in smeri delovanja navora M. Navor *trenja* M_f v ležaju pa vedno *nasprotuje smeri vrtenja*. Vztrajnostni navor $J\alpha$ pa nasprotuje pospeševanju vrtenja, ima nasprotno smer kotnega pospeška α. Navor M mora premagovati vztrajnostni navor in navor trenja:

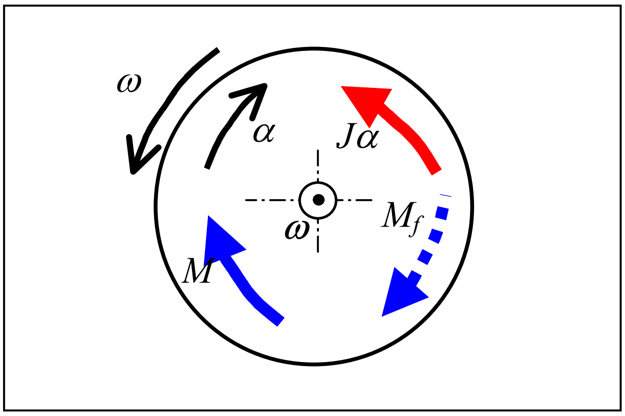
$$M = J\alpha + M_f, \text{ ali}$$
$$M - M_f - J\alpha = 0,$$

kar pomeni ‘ravnovesje’ navorov (zunanjih in vztrajnostnega), čeprav je vrtenje pospešeno. Še najbolj korektna pa je oblika:

$$J\alpha = \text{vsota zunanjih navorov} = M - M_f.$$

Občutek za izvajanje zunanjega navora ($M = J\alpha + M_f$) dobimo, ko želimo s pedali pospešiti hitrost kolesu. Tedaj premagujemo vztrajnostni navor $J\alpha$, ki je tem večji, hitreje kot pospešujemo (večji α) in navor skupnega trenja (ležaji in ostalo).

VII.8 ZAVIRANJE VRTENJA GREDI



Gred zaviramo z zunanjo zavoro. Tokrat se kotna hitrost ω zmanjšuje po jakosti, spremeni se smer kotnega pospeška α, smer delovanja vztrajnostnega navora, ki nasprotuje kotnemu pospešku. Spremenjena je tudi smer aktivnega navora M, ki zagotavlja α. Ohranja pa se smer navora trenja ležaja M_f, ker je smer vrtenja enaka kot v prejšnjem primeru, M_f pa deluje zaviralno. Tokrat z aktivnim navorom M, s katerim zaviramo, premagujemo vztrajnostni navor, 'pomaga' pa mu navor trenja ležaja:

$$M - M_f = J\alpha, \text{ ali}$$
$$M - M_f - J\alpha = 0, \text{ ali}$$
$$J\alpha = \text{vsota zunanjih navorov} = M + M_f,$$

kjer je α absolutna vrednost kotnega pospeška. Če pa ni zunanjega zaviralnega navora M, pa velja:

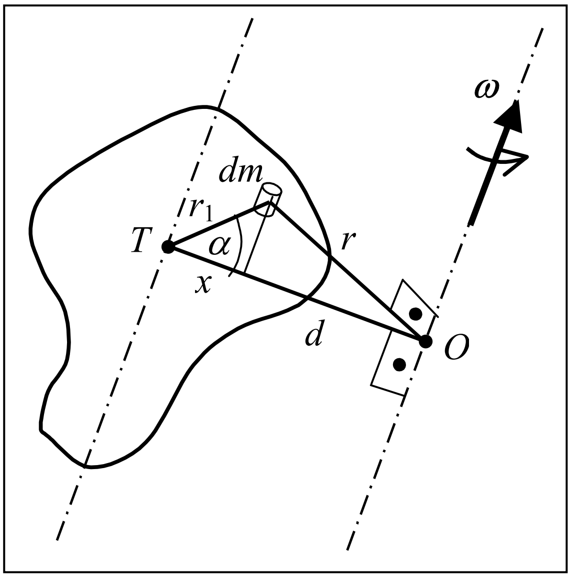
$$J\alpha = M_f.$$

V obeh primerih (pospeševanje in zaviiranje gredi) velja:

- navor trenja nasprotuje vrtenju
- vztrajnostni navor nasprotuje spremembi kotne hitrosti navora.

VII.9 STEINERJEVO PRAVILO

Če poznamo vztrajnostni moment telesa za vrtenje okoli osi, ki gre skozi težišče T (lastni vztrajnostni moment), nas zanima, kako izračunamo vztrajnostni moment za vrtenje togega telesa okoli osi, ki ne gre skozi težišče, pač pa skozi točko O, pa je vzporedna tisti skozi težišče.



Vztrajnostni moment mase dm za vrtenje okoli osi, ki gre skozi T je : $dJ_c = r_1^2 dm$ $\Rightarrow$ vztrajnostni moment mase m pri vrtenju okoli težiščne osi, ki gre skozi T je $J_c = \int r_1^2\, dm$, ki je *lastni vztrajnostni moment*. Vztrajnostni moment za vrtenje okoli vzporedne osi je pač po formuli,

$$J = \int r^2\, dm,$$

kjer je r oddaljenost mase dm od osi. Ker velja kosinusni izrek za nepravokoten trikotnik:

$$r^2 = r_1^2 + d^2 - 2\, r_1\, d \cos\alpha,$$

ki ga izkoristimo v izrazu za vztrajnostni moment:

$$J = \int [d^2 + r_1^2 - 2\, r_1\, d \cos\alpha]\, dm =$$

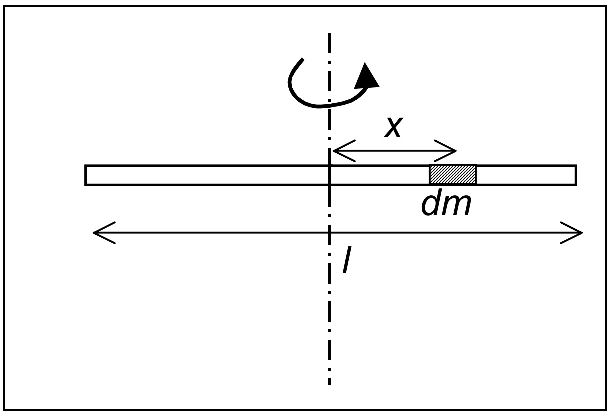
$$J = d^2 \int dm + \int r_1^2\, dm - 2\, d \int r_1 \cos\alpha\, dm$$

$$J = m\, d^2 + J_c - 0.$$

tretji integral na desni je enak nič, ker je $r_1\cos\alpha = x$ – projekcija oddaljenosti mase dm na zveznico med T in O. Ker je T težišče, se x enako razteza v pozitivno smer, kot v negativno, integral po vseh x je zaradi te simetrije enak nič. Tako smo s *Steinerjevim pravilom* vztrajnostni moment okoli poljubne osi J izrazili z momentom okoli težiščne osi J_c $\qquad J = m\, d^2 + J_c,$

kjer je d oddaljenost med osema.

Vztrajnostni moment tanke palice



$J_c = ?$
$dm/dV = \rho \Rightarrow dm = \rho\, dV$,

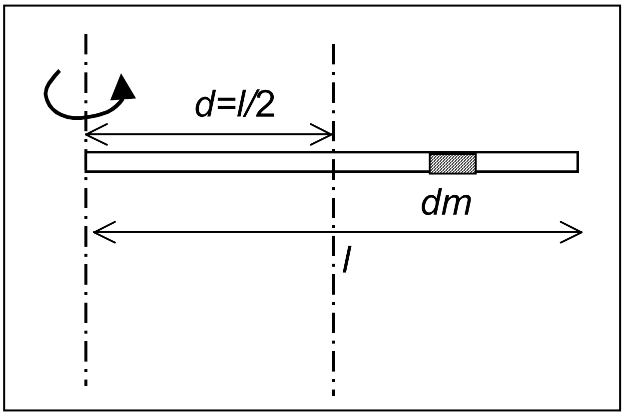
$dV = S\, dx$, kjer je S presek palice. Predpostavimo, da je palica *homogena, da* se njena gostota ne spreminja z lego mase *dm,* oz. ρ = konst. Vztraj. moment tako izračunamo:

$$J_c = \int x^2\, dm = \int x^2 \rho\, dV = \int \rho S x^2\, dx,$$

$$J_C = \rho S \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \rho S \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho S}{3}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(\frac{-l}{2}\right)^3\right] = \rho S \frac{l^3}{12}.$$

Ker je celotna masa $m = \rho\, S\, l \Rightarrow$

$$J_C = m\frac{l^2}{12}.$$



Vztrajnostni moment palice, ki jo vrtimo okoli enega konca izračunamo po Steinerjevem pravilu

$J = m\, d^2 + J_c =$
$m\, l^2/4 + m\, l^2/12$

$$J = m\, l^2/3.$$

VII.10 SPLOŠNA OBLIKA ZA VZTRAJNOSTNE MOMENTE VSEH TOGIH TELES PRI VRTENJU OKOLI GLAVNIH (LASTNIH) OSI

Vztrajnostni moment palice: $J = m\,l^2/12$, kjer je l dolžina

Vztrajnostni moment valja: $J = m\,R^2/2$, kjer je R polmer valja

Vztrajnostni moment krogle: $J = 2m\,R^2/5$

Vztrajnostni moment ima vedno enoto kg m^2 in je sestavljen iz:

$$J = \text{faktor*masa*značilna\_dimenzija}^2,$$

ali:

$$J = m\,r_J^2,$$

kjer je r_J *krožilni* polmer (‘radius of gyration’) togega telesa, $r_J^2 = J/m$.

Izrek o spremembi vrtilne količine Γ togega telesa za vrtenje okoli lastne osi, ki je pod delovanjem navora zunanjih sil M:

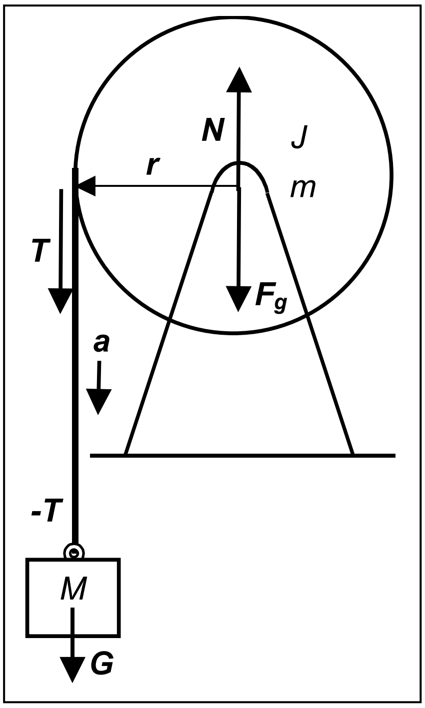
$$M = \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} = J\alpha\,,$$

$$\boxed{M = J\,\alpha}$$

VAJE: izpelji vztrajnostni moment valja

ZAHTEVNA naloga za določenega študenta:
Izpeljava vztrajnostnega momenta za kroglo.

VAJA za vztrajnostni moment



Kolika je rezultančna sila na obešeno telo? Kolik je rezultančni navor na kolo?
N – sila ležajev ('podlage') na os kolesa
T – sila napetosti vrvi, $G = M\,g$;
Gibanje bremena:
$M\,a = G - T = M\,g - T.$
Na kolo škripca sili F_g in N ne delujeta z navorom, tega ustvarja le sila T, njen navor povzroči kotni pospešek:

$$T\,r = J\,\alpha.$$

Ker se vrv giblje skupaj s kolesom po obodu, tangencialni (obodni) pospešek kolesa = pospešku bremena:

$$a = r\alpha \Rightarrow \alpha = a/r,$$

tega vstavimo v enačbo za pospešeno rotacijo škripca:

$T\,r = J\,a/r \Rightarrow T = J\,a/r^2$, silo v vrvi pa vstavimo enačbo za gibanje bremena: vztraj. moment za valj: $J = mr^2/2$

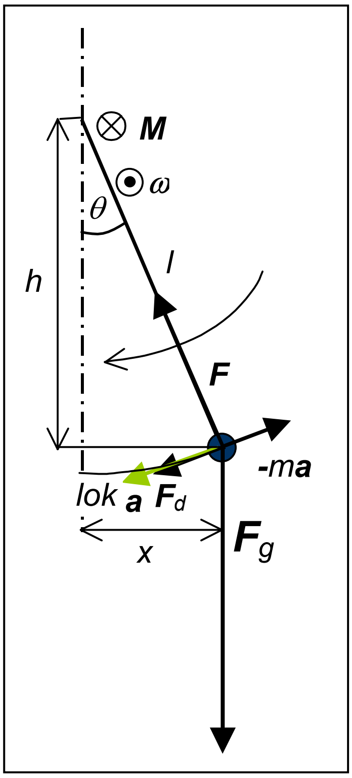
$M\,a = M\,g - J\,a/r^2 \quad \Rightarrow \quad a = g\Big/\left[1+\dfrac{J}{Mr^2}\right] = g/(1+m/2M)$.

Če je $J = 0$ $g \Rightarrow a = g$, če $J <> 0 \Rightarrow a < g$. Večji ko je polmer kolesa in lažje kot je kolo škripca (manjši je njegov vztrajnostni moment) in večja kot je masa bremena, bližji je a težnemu pospešku g. Gre za enakomerno pospešeno padanje bremena. Če je bila v trenutku $t = 0$ hitrost $v(0) = 0 \Rightarrow v = a\,t$, globina padanja $h = a\,t^2/2 \Rightarrow$

$v^2 = 2\,a\,h \Rightarrow v^2 = 2gh\Big/\left[1+\dfrac{J}{Mr^2}\right]$. Mase škripca ni?

VII.11 NIHALA KOT TOGA TELESA

VII.11.1 ENOSTAVNO NIHALO



Masna točka *m* je pritrjena na lahek drog dolžine *l*, ali pa visi na napeti nitki. ***F*** je sila vrvice na maso, $\boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{F}_d$, Sila teže točkaste mase izvaja *navor* na osišče nihala.

$M = -x\,F_g$ – predznak minus, ker navor nasprotuje večanju kota θ, gre za *povratni* navor (za nihanja so značilni povratni navori in/ali povratne sile).

Za majhne odklone:

$x = l \sin\theta \cong l\,\theta \Rightarrow M = -\,l\theta\, mg$. Izrek o spremembi vrtilne količine pravi:

$$M = J\,\alpha = J\,d^2\theta/dt^2,$$

kjer je J vztraj. moment točkastega telesa (palica je tanka in lahka, jo zanemarimo): $J = m\,l^2$

$$\Rightarrow \quad -\,l\theta\, mg = m\,l^2\, d^2\theta/dt^2 \Rightarrow$$

$$d^2\theta/dt^2 + [g/l]\,\theta = 0.$$

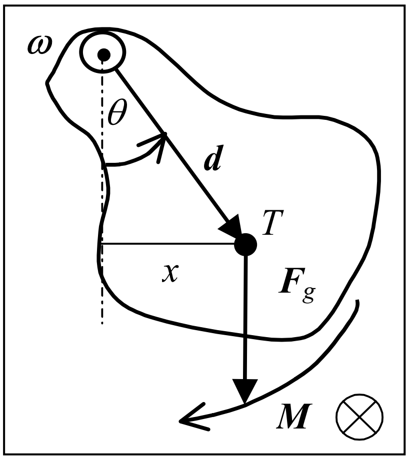
Pišemo $g/l = \omega^2$, *(kvadrat krožilne frekvence), rešitev že poznamo:*

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

kjer je φ *začetni fazni pomik,* θ_0 *pa amplituda nihanja kota odklona* θ. *Ker* $\omega^2 = g/l \Rightarrow$ *perioda enostavnega (matematičnega) nihala*

$$T = 2\,\pi\,(l/g)^{1/2}.$$

VII.11.2 FIZIČNO NIHALO



T – težišče telesa. Navor sile teže je *povratni* navor:
$M = -x F_g = -d \sin\theta\, m g \cong -d\, \theta\, m g$
za majhne odklone θ. Ker

$$M = J\,\alpha = J\, d^2\theta/dt^2 \Rightarrow$$

$-d\, \theta\, m g = J\, d^2\theta/dt^2 \Rightarrow$
$d^2\theta/dt^2 + \theta\, dm\, g/J = 0$. Vpeljemo

$\omega^2 = gmd/J$, rešitev $d^2\theta/dt^2 + \omega^2\theta = 0$
je sinusno nihanje kota odklona težišča od navpičnice:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

perioda pa je: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgd}}$.

VAJA:

Tanek obroč kolesa, obešen na žebelj na steni, zaniha. Naj je njegova masa 1,5 kg, polmer pa 0,3 m. Kolik je nihajni čas, če je vztrajnostni moment kolesa 0,2 kg m^2*?*

VIII. TRK PRI ROTACIJI TOGIH TELES

Pri trku teles pri translatornem gibanju delujejo med telesi ob trku le notranje sile, ker ni zunanjih sil, se ohranja gibalna količina sistema:

$$m_A \boldsymbol{v}_{A1} + m_B \boldsymbol{v}_{B1} = m_A \boldsymbol{v}_{A2} + m_B \boldsymbol{v}_{B2} = \textbf{konst.}$$

Recimo, da imamo dve togi telesi, A in B, ki *rotirata* okoli iste osi, se ne gibljeta translatorno in naj ne delujejo zunanji navori na sistem vrtečih se teles. Naj med rotacijo eno telo trči v drugo. Ker ni zunanjih navorov, se ohrani skupna vrtilna količina:

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} = 0$$

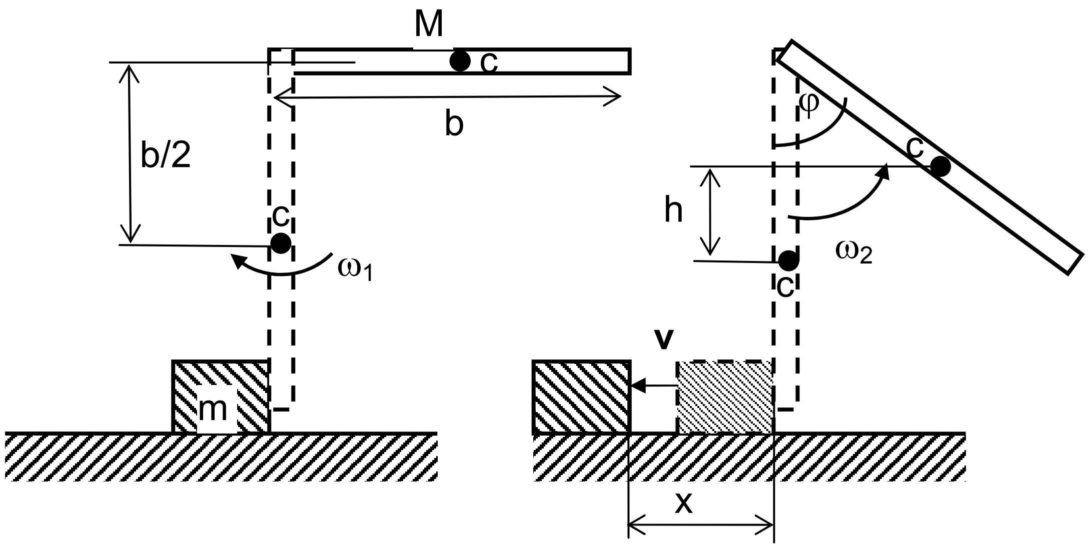
,

To pomeni, da je vrtilna količina pred trkom enaka vrtilni količini po trku:

$$J_A \omega_{A1} + J_B \omega_{B1} = J_A \omega_{A2} + J_B \omega_{B2}$$

VAJA za trk pri rotaciji

Konec palice (mase M= 3 kg, dolžina b = 1 m) je vrtljivo pritrjen na vodoravno os, ki je na višini b nad vodoravnimi tlemi, na katerih se nahaja mirujoče telo mase m = 2 kg. Palica ob rotaciji iz vodoravne lege trči v telo in se odbije nazaj. Kolika je kotna hitrost palice tik pred trkom? Za kolik kot φ se palica odbije, če je trk prožen? Za koliko (x) se premakne telo, če je drsni torni koeficient $k_t = 0,4$? Pri koliki masi palice pa bi palica po trku obmirovala?



Hladnik & Šolinc, 14.21 str. 143. Zbirka FI nalog z rešitvami 1.

Pred trkom: ohranitev energije palice: pred zasukom ima potencialno energijo glede na lego težišča C po zasuku: $W_p = Mgb/2$, tik pred trkom pa rotacijsko kinetično energijo $W_k = J\omega_1^2/2$, vztrajnostni moment palice pri vrtenju okoli osi na enem krajišču $J = Mb^2/3$. Ohranitev energije:

$$Mgb/2 = J\omega_1^2/2 = Mb^2\omega_1^2/6 \Rightarrow \omega_1 =$$

Ohranitev vrtilne količine: pred trkom jo ima samo palica: $J\omega_1$, tik po odboju pa ima v isti smeri predhodne vrtilno količino masa m na tleh, ki se premakne proč od palice in ima vrtilno količino kot točkasna masa: mvb, palica po odboju pa vrtilno količino z nasprotnim predznakom: - $J\omega_2$. Ker ni zunanjih navorov se skupna vrtilna količina ohranja:

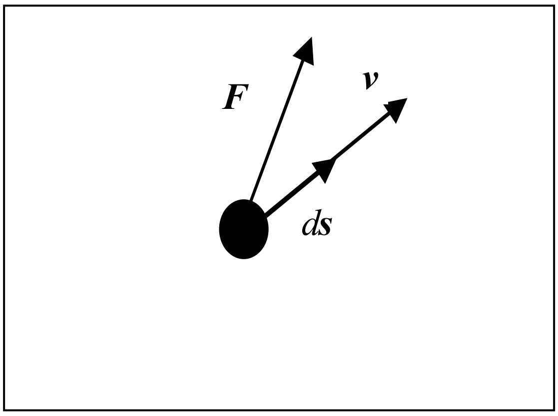
$$J\omega_1 = mvb - J\omega_2$$

Ker je trk prožen se ohranja tudi energija. Tik pred odbojem je ta enaka rotacijski kinetični palice $J\omega_1^2/2$, ta je enaka kinetični energiji palice in telesa tik po odboju: $J\omega_1^2/2 = J\omega_2^2/2 + mv^2/2$

Vstavimo izraz za J in ω_1, sistem obeh poslednjih enačb rešimo po v in ω_2:
$v = 2\omega_2 bM/(M+3m)$; $\omega_2 = \omega_1(3m - M)/(3m+M)$; če je M = 3m palica miruje po trku.
Telesu se po trku začetna kinetična energija uniči zaradi dela zaviralne sile trenja F_t $mv^2/2= F_t\, x = k_t mgx \Rightarrow x=$ ... Po trku se vrtilna kinetična energija palice pretvori je v potencialno energijo zaradi dviga težišča po zasuku palice za φ v skrajno lego:
$J\omega_2^2/2 = M\, gh = Mg(b/2)(1\text{-}\cos\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = 1 - b\omega_2^2/3g$.

DELO IN ENERGIJA

VIII.1 DELO ZUNANJE SILE PRI TRANSLACIJSKEM GIBANJU



Majhen pomik točkastega telesa $d\boldsymbol{s}$ ⇈ s silo $\boldsymbol{F}$.
Delo sile ΔA pri majhnem pomiku je definirano kot:

$$dA = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s},$$

kjer • označuje skalarni produkt dveh vektorjev. Zato je delo sile $\boldsymbol{F}$, ki ni vzporedna s pomikom $\boldsymbol{ds}$ enako:

$$dA = F \cos \varphi \, ds.$$

Celotno delo zunanje sile vzdolž gibanja telesa pa je vsota del sile vseh drobnih pomikov:

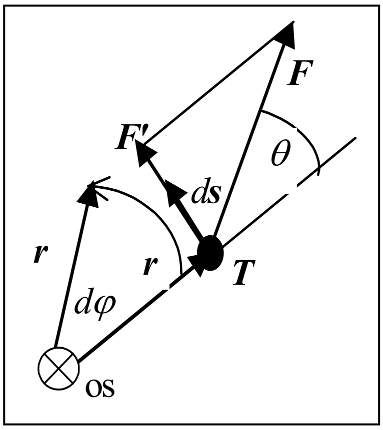
$$A = \int F \cos\varphi \, ds = \int \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s}.$$

Če je sila konstantna med gibanjem telesa (ohranja jakost in smer glede na smer gibanja), jo lahko postavimo izven integrala

$$A = \int F \cos\varphi \, ds = F \cos\varphi \int ds = F \cos\varphi \, s = Fs \cos\varphi = \boldsymbol{F} \bullet s$$

Delo je enostaven skalarni produkt vektorja sile in vektorja opravljenega premočrtnega pomika poti samo takrat, ko je sila konstantna (gibanje pa premočrtno). $A = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{s}$, Če $\boldsymbol{F}$ ↑↑ $\boldsymbol{s}$ je $A=Fs$.

VIII.2 DELO ZUNANJE SILE PRI ZASUKU TELESA



$\boldsymbol{F} \perp$ os. Pomik $ds = r\, d\varphi$ - za toliko se pomakne prijemališče sile $\boldsymbol{F}$. Njena projekcija na pomik težišča telesa T za $d\boldsymbol{s}$ je $F' = F \sin\theta$, $\boldsymbol{F'}$ ↑↑ $d\boldsymbol{s}$. Delo sile pri tem pomiku ob zasuku težišča je $dA = F' ds = dA = F \sin\theta\, ds$. Pomik ds ob zasuku: $ds = r\, d\varphi \Rightarrow$
$dA = F \sin\theta\, r\, d\varphi$. Navor sile $M = Fr \sin\theta \Rightarrow$ $dA = M\, d\varphi$ $\Rightarrow$

$$\boxed{A = \int M\, d\varphi}$$

Če sila $\boldsymbol{F}$ ni pravokotna na os, je izraz za delo bolj kompliciran, brez izpeljave navedemo:

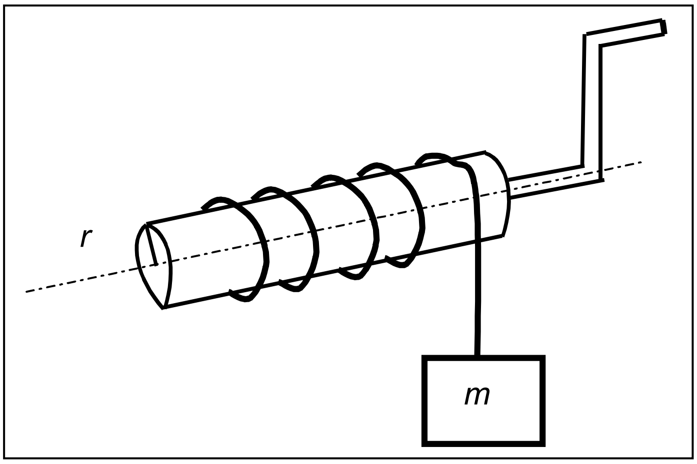
$$\boxed{A = \int \boldsymbol{M} \cdot \omega \, dt}$$

ki ga primerjamo z izrazom za delo pri translatornem gibanju:

$$A = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \, dt,$$

vidimo, da pri delu sile pri rotaciji togega telesa navor nadomesti silo, kotna hitrost pa translacijsko hitrost.

VAJA



A = ?
Utež se spusti za dh, teža opravi delo $dA = mg\, dh$, hkrati izvede navor $M = mg\, r$: pomik navzdol za dh pomeni zasuk za $d\varphi$, pomik dh je enak loku $ds = dh = r\, d\varphi$.
Delo $dA = M\, d\varphi = mgr\, dh/r = mg\ \ dh$. Pri tem problemu je delo sile pri rotaciji = delo enake sile pri transl. pomiku.

VIII.3 IZREK O OHRANITVI KINETIČNE ENERGIJE PRI TRANSLACIJSKEM GIBANJU

dA = **F** • d**s**, *2. Newton. z.* **F** = m**a** ⇒ dA = m**a** • d**s**, *ker je* d**s** = **v**dt, **a** = d**v**/dt ⇒ dA = m(d**v**/dt) • **v**dt = m d**v** • **v**, *pri translacijskem gibanju je* d**v** ↑↑**v** ⇒

dA = m v dv

$$A = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = m\frac{v^2}{2}\bigg|_{v_1}^{v_2} = m\frac{v_2^2}{2} - m\frac{v_1^2}{2},$$

Vpelje se kinetična energija

$$W_k = m\frac{v^2}{2},$$

Sprememba kinetične energije je enaka delu zunanje sile

$$A = W_{k2} - W_{k1}.$$

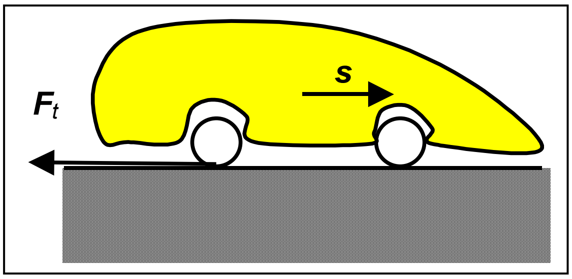
I

Izrek o ohranitvi kinetične energije pri translacijskem horizontalnem gibanju se glasi: *kinetična energija se ohranja, če je delo zunanjih sil enako nič.*

Če je delo zunanje sile zaviralno (**F** ↑↓ d**s**), A < *0* ⇒ *končna kinetična energija je manjša od začetne:*

$$W_{k2} < W_{k1}.$$

VAJA:



$v_0 = 72\ km/h$

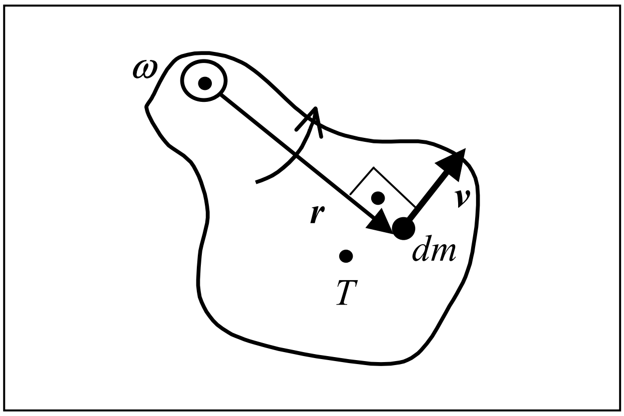
$v_k = 0$

$k_t = 0{,}5$ – *blokiranje*

$s = ?$

$F_t = mg\,k_t$, $A_t = F_t\,s = mg\,k_t\,s = W_{k2} - W_{k1}$

VIII.4 ROTACIJSKA ENERGIJA TOGEGA TELESA



Vsake del togega telesa, ki je oddaljen od osi za r *ima krožilno hitrost* v = rω*. Kinetična energija za masni koščcek* dm *je*

$dW_k = dm\,(r\omega)^2/2 \Rightarrow$ *ROTACIJSKA KINETIČNA ENERGIJA:*

$$W_k = \int dW_k = \frac{\omega^2}{2}\int r^2 dm = \frac{1}{2}J\omega^2 = W_{rot}$$

.

Vztrajniki imajo velik J $\Rightarrow$ *med vrtenjem lahko oddajo veliko kinetične energije pri manjšanju kotne hitrosti, če zaviralni navor ni prevelik.*

Naj se togo telo vrti okoli težišča, pri čemer se težišče giblje. Vpeljemo celotno kinetično energijo togega telesa:

$W_k = W_{ktran} - W_{rot}$,

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2},$$

kjer je v_c^2 *hitrost gibanja težišča,* J_c *pa lastni vztrajnostni moment za vrtenje okoli težiščne osi.*

Celotno delo zunanjih sil zaradi translacije in rotacije telesa:

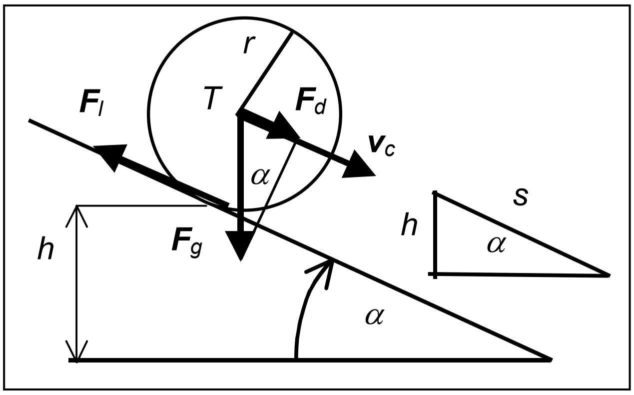
$A = \int \mathbf{M}\bullet\omega\, dt + \int \mathbf{F}\bullet d\mathbf{s}$,

[če sta sila in navor stalna $A = M\omega\, t + Fs$*]. Izrek o spremembi kinetične energije se glasi*

$$A = \int \boldsymbol{M} \cdot \omega\, \boldsymbol{dt} + \int F \cdot \boldsymbol{ds} = W_{k2} - W_{k1} =$$

$$A = \frac{mv_{c2}^2}{2} - \frac{mv_{c1}^2}{2} + \frac{J_c\omega_2^2}{2} - \frac{J_c\omega_1^2}{2}$$

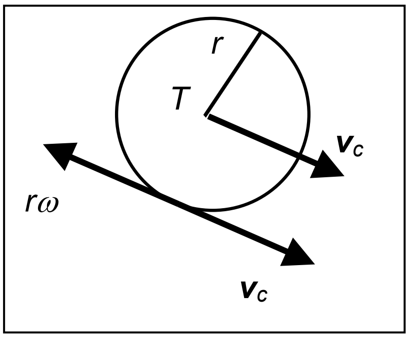
VAJA



Krogla se kotali na klancu. Kolika je hitrost težišča v_c *na dnu klanca, če je bila na vrhu* $v_{c0} = 0$ *?* $W_{k0} = 0$. $F_d = F_g \sin\alpha$*, delo zunanje sile pri gibanju po klancu, je delo dinamične komponente sile teže, ki povzroči spremembo* celotne *kinetične energije toge krogle:*

$A_d = mg \sin\alpha\ s = mgh$ – *delo sile teže. Končna* W_k*:*

$W_k = m\, v_c^2/2 + J_c\, \omega^2/2 = A_{tot}$. *Poleg sile teže opravi delo tudi zaviralna sila lepenja – krogla namreč* ne drsi *po podlagi, se zgolj kotali – relativna hitrost stične točke valja in podlage je nič, obnašanje sile lepenja je podobno kot pri mirovanju telesa, ki ga vlečemo.*



Delo sile lepenja: $dA_l = -F_l\, ds = -F_l\, v_{rel}\, dt = 0$. *Torej je delo vseh zunanjih sil le delo sile teže. Za kroglo je* $J_c = 2mr^2/5$*, ker ni drsenja je* $v_c = r\omega \Rightarrow$

$mgh = m\, v_c^2/2 + 2m\, r^2 v_c^2/(r^2 * 2 * 5)$

$gh = v_c^2\, 7/10 \Rightarrow v_c = (10/7)^{1/2}(gh)^{1/2} < v_c = (2gh)^{1/2}$ *pri prostem padu. Za valj* $v_c = (4/3)^{1/2}(gh)^{1/2}$.

VIII.5 POTENCIALNA ENERGIJA

Izrek o spremembi kinetične energije $A = W_{k2} - W_{k1}$*, delo razbijemo na delo teže in na delo vseh ostalih zunanjih sil:*

$$A = A_G + A_Z \Rightarrow$$
$$A_Z = W_{k2} - W_{k1} - A_G.$$

Delo teže:

$$A_G = \int \mathbf{F_G} \bullet d\mathbf{s} = m\int \mathbf{g} \bullet (dx, dy, dz)$$
$$A_G = - m\int (0, 0, g) \bullet (dx, dy, dz) =$$
$$A_G = - mg \int dz = - mg(z_2 - z_1) \Rightarrow \textit{delo ostalih sil:}$$

$$\boxed{A_Z = W_{k2} - W_{k1} + mgz_2 - mgz_1}$$

Potencialna energija je definirana kot

$$W_p = mgz,$$

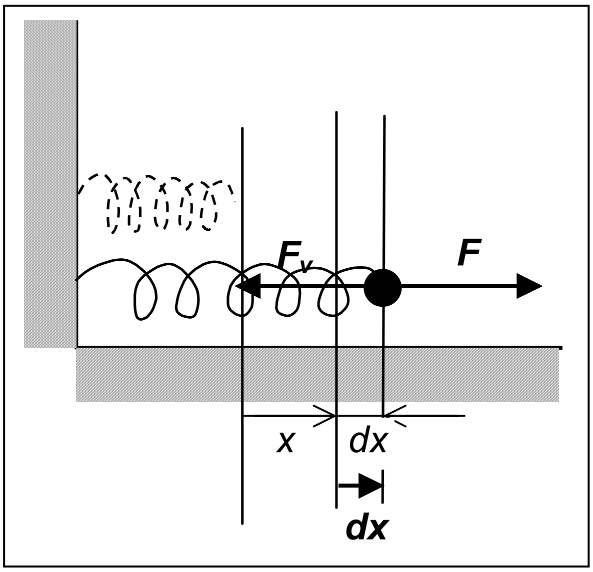
zato je delo vseh zunanjih sil razen teže enako:

$$A_Z = W_{k2} - W_{k1} + W_{p2} - W_{p1}$$

$$\boxed{A_Z = (W_{k2} + W_{p2}) - (W_{k1} + W_{p1}).}$$

Še samo delo sile teže: $A_G = - mg(z_2 - z_1) = - W_{p2} + W_{p1}.$

VIII.6 PROŽNOSTNA ENERGIJA



Počasi in enakomerno raztegujemo vzmet z zunanjo silo ***F***, ki je nasprotna sili vzmeti $\boldsymbol{F}_v$. Sila vzmeti je *povratna* sila:
$\boldsymbol{F}_v \uparrow\downarrow d\boldsymbol{x} \Rightarrow$ zunanja sila deluje v smeri raztezka
$\boldsymbol{F} \uparrow\uparrow d\boldsymbol{x}$
Hookov z.: $F = kx$
(k je konstanta vzmeti) $\Rightarrow$
Delo zunanje sile pri majhnem raztezku:
$dA = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{x} = F\,dx = kx\,dx \Rightarrow$

$$A = k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = k\frac{x_2^2}{2} - k\frac{x_1^2}{2},$$

vpelje se *prožnostna energija*

$$W_{pr} = k\frac{x^2}{2},$$

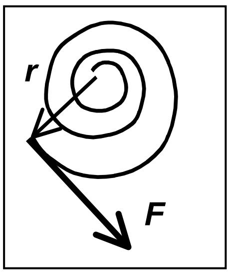
delo zunanje (vlečne) sile je zato:

$$A = W_{pr2} - W_{pr1},$$

delo sile vzmeti pa je

$$A_v = -W_{pr2} + W_{pr1}.$$

Spiralna vzmet



$\boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{r} \Rightarrow M = rF$, sila spiralne vzmeti je sorazmerna kotu zasuka: $F = D\,\varphi \Rightarrow M = rD\varphi$
$A = \int M\,d\varphi = D\int \varphi\,d\varphi = D\,\varphi_2^2/2 - D\,\varphi_1^2/2 \Rightarrow$
$W_{pr} = D\varphi^2/2$, $A = W_{pr2} - W_{pr1}$.

VIII.7 IZREK O OHRANITVI MEHANSKE ENERGIJE

Delo vseh zunanjih sil razen teže in prožnostne sile = spremembi mehanske energije

Mehanska energija $W = W_k + W_p + W_{pr}$.
Če je delo vseh zunanjih sil razen teže in prožnostne sile enako nič: $A = 0 \Rightarrow \Delta W = W_2 - W_1 = 0 \Rightarrow$

$$W_{k2} + W_{p2} + W_{pr2} = W_{k1} + W_{p1} + W_{pr1} \Rightarrow$$

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgz_2 + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgz_1 + \frac{kx_1^2}{2},$$

če ni rotacije telesa.

VIII.8 MOČ

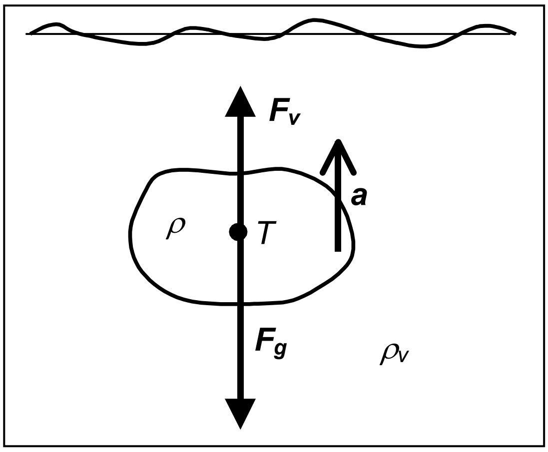
Moč pri translaciji telesa: $P = dA/dt = Fds/dt = Fv$

Moč pri rotaciji telesa: $dA = Fds = Fr\, d\varphi = M\, d\varphi \Rightarrow$

$$\boxed{P = dA/dt = M\, d\varphi/dt = M\omega}$$

IX. HIDROSTATIKA IN HIDRODINAMIKA

IX.1 SILA VZGONA



Sila vzgona F_V = *teži izpodrinjene tekočine:*
$F_V = m_v\, g = \rho_v\, V_v\, g$,
kjer je ρ_v *gostota okolne (izpodrinjene) tekočine,* V_v *pa njen volumen. Ko je telo v celoti potopljeno, je volumen telesa* V *enak volumnu izpodrinjene tekočine* $V = V_v$, *samo tedaj sila vzgona prijemlje v težišču, kjer je seveda prijemališče sile teže samega telesa. Pri plavajočih telesih prijemališče sile vzgona* ni *v težišču mase telesa, pač pa v težišču izpodrinjene tekočine. Naj je sila vzgona večja od sile teže telesa. Tedaj se telo po 2. Newton. z. giblje s pospeškom:*

$$ma = F_V - F_g = m_v\, g - m\, g = \rho_v\, V_v\, g\ - \rho\, V\, g$$
$$ma = V\, g\, (\rho_v - \rho),$$

m je masa telesa in kjer smo upoštevali, da je telo v celoti potopljeno in da je s tem volumen izpodrinjene tekočine enak volumnu telesa $(V=V_v)$, *sicer* $V <> V_v$.

VAJA 1: Kos lesa miruje na gladini, kolik je delež potopljenega dela, če je njegova gostota 0.8 gostote kapljevine pod njim?

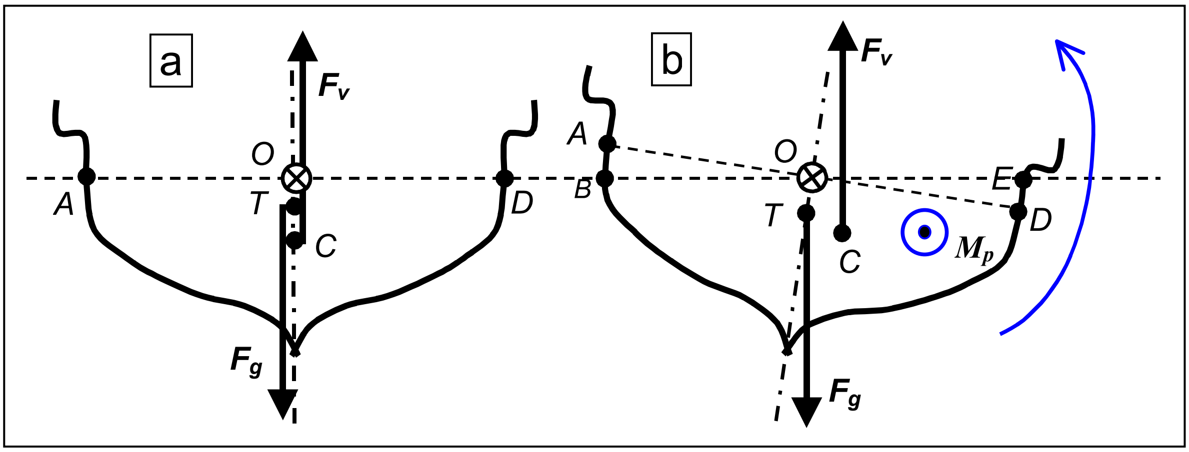
VAJA 2: Sod V = 150 l je napolnjen z zrakom kot pomoč pri dvigu sidra z morskega dna. Sidro ima maso 16 kg v morju. Masa soda je 20 kg. S koliko dodatno silo bo moral dvigati sidro potapljač?

VAJA 3: Na plavajočo bojo v obliki pokončnega valja z višino l = *1 m in ploščino osnovne ploskve* S = *2 m*^{2}, *pade z višine* h = *2 m nad bojo vreča peska mase* m = *60 kg na sredino zgornje ploskve. Za koliko se pri padcu potopi boja? S kolikšno amplitudo in periodo zaniha boja z vrečo? Boja ima srednjo gostoto* ρ = *500 kg/m*^{3}, *gostota vode je* ρ_V = *1000 kg/m*^{3}, *upor vode zanemarimo (iz revije Presek 31/5, 2003-2004).*

Tik pred padcem na bojo je hitrost vreče $v = (2gh)^{1/2}$. *Gre za neprožen trk:* $mv = (m+M)v_0$, $M = \rho\, S\, l$ *masa boje in* v_0 *skupna začetna hitrost tonjenja. Pred padcem vreče je sila vzgona* F *na bojo enaka sili njene teže* Mg, *po padcu pa je* $F = Mg + g\rho_V S\, z$, *kjer je* x *globina potopa od ravnov. lege, naj* $k = g\rho_V\, S \Rightarrow F = Mg + k\, z$ *(kot pri vzmeti). Največji potop z = Z izračunamo z izrekom o ohran. mehan. energije:* $(m+M)\, v_0^2/2 + (m+M)g\, Z = A$, *kjer je* A *delo sile vzgona* $A = \int(Mg + k\, z)\, dz = Mg\, Z + \ k\, Z^2/2$. *Z pa* ni *amplituda nihanja, ker za novo ravnovesno lego* z' *velja, da je pod prejšnjo, po enačbi:* $mg = g\rho_V$

S z' = *k z'* $\Rightarrow$ *amplituda* $z_0 = Z - z'$*. Perioda nihanja se izračuna po formuli za vzmetno nihalo:* $T = 2\pi\,((m+M)/k)^{1/2}$.

IX.2 METACENTER

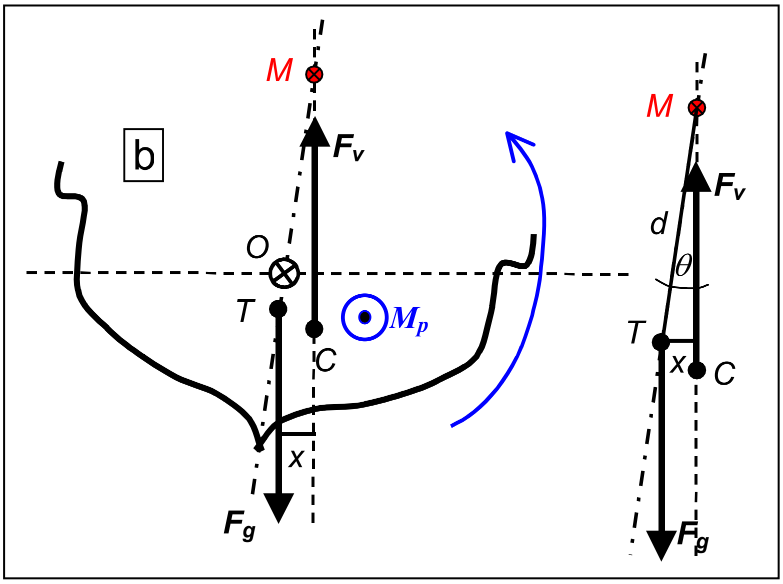


a) *Težišče* T *se nahaja* nad *prijemališčem* sile vzgona C*. Zdi se, da je zato plovilo nestabilno. Sila teže* $\mathbf{F_g}$ *je po jakosti enaka sili vzgona* $\mathbf{F_v}$*, sicer bi se plovilo vertikalno gibalo s pospeškom.*

b) *Še vedno velja* $F_g = F_v$ *, sicer bi plovilo po vertikali imelo pospešek. Pri nagibu plovila okoli gredlja ostane težišče* T *na istem mestu plovila, vendar se premakne prijemališče vzgona* C *v desno za* x $\Rightarrow$ *vzpostavi se* povratni navor dvojice sil $\mathbf{M_p}$ $\Rightarrow$ *stabilno plovilo. Prijemališče sile vzgona C se je premaknilo v desno zato, ker se je del prvotnega volumna izpodrinjene tekočine* AOB *premaknil v* EOD*, prijemal. sile vzgona pa se nahaja v* težišču izpodrinjene tekočine*.*

Povratni navor dvojice sil je x F. Vendar ta navor dvojice sil vzgona in teže ni nujno vedno povratni!

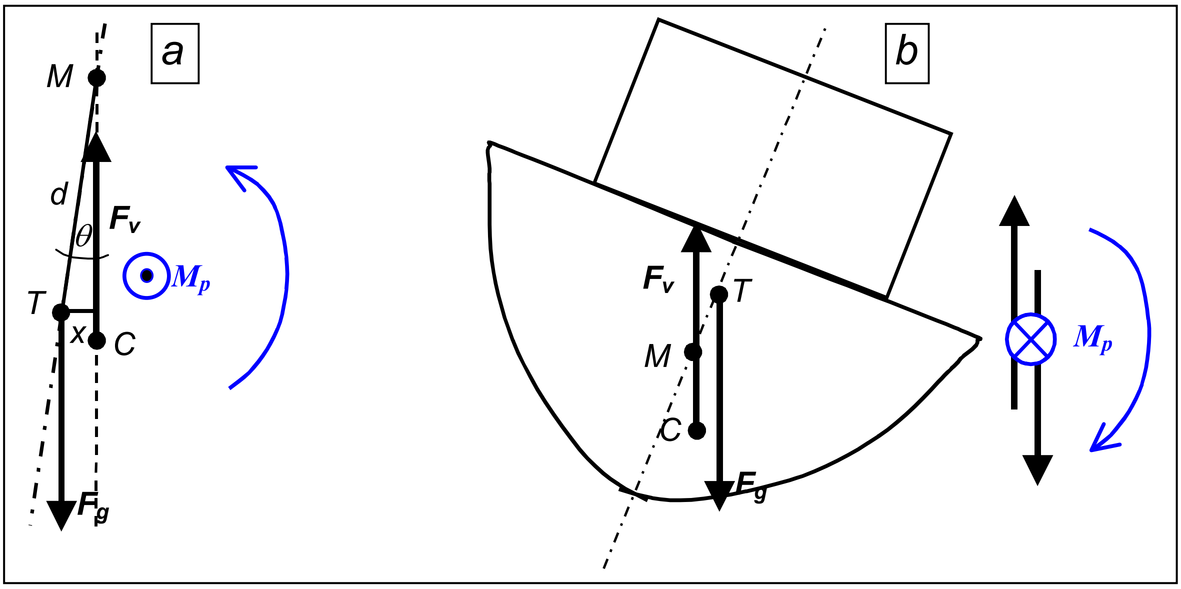
Metacenter M *je točka presečišča med simetralo plovila, na kateri leži težišče* T*, in med nosilko sile vzgona, ki je vertikalna:*



Razdalja med težiščem in metacentrom TM = d *se imenuje* metacentrična oddaljenost, *njena horizontalna projekcija je*

$$x = d \sin\theta \cong d\,\theta$$

za majhne nagibe plovila

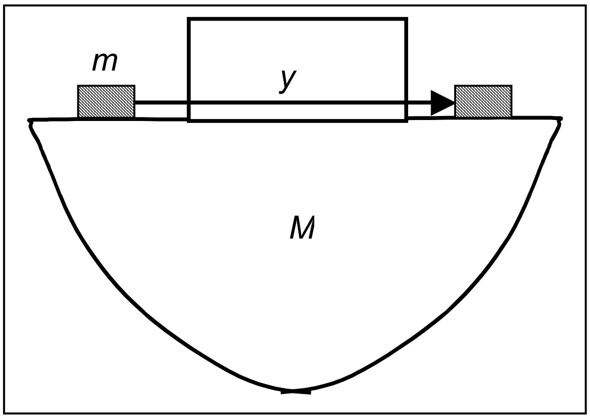


a) *Metacenter* M *je* nad *težiščem* T *(vertikalno v višji legi). Navor dvojice sil* $M_p = F_g x = mg\, d \sin\theta \cong mg\, d\, \theta$ *povrne plovilo v ravnovesno lego. Ta je tudi odgovoren za nihanje plovila.*

b) *Metacenter* M *je* pod *težiščem* T *. Navor dvojice sil teže in vzgona tokrat* ni povraten, *plovilo je nestabilno in se prekucne.*

c) *Metacenter* M *sovpada* T $\Rightarrow$ *nevtralno ravnovesje, ki lahko postane nestabilno.*

Metacentrična višina se lahko določi eksperimentalno:



Dodatno breme na plovilu mase m *pomaknemo prečno po palubi. Ko se* m *nahaja v eni legi, je plovilo zasukano proti njemu, kov drugi, pa je zasukano za drugi kot* θ*. Ker se v obeh primerih po umiritvi plovilo ne suka, je prisotno ravnovesje navorov: Navor sile teže bremena okoli osišča = navoru dvojice sil vzgona in celotne teže na plovilu. Zadevo poenostavimo, če zapišemo, da pomik bremena pomeni* spremembo navora *njegove sile teže na osišče, in sicer za* $M_m = mg\,\Delta y$ *. Naj je sprememba naklonskega kota plovila, ki je izmerjen, enaka* $\Delta\theta$*. Povratni navor dvojice sil je* $M_p = (M + m)\, g\, d\, \sin(\Delta\theta) \cong (M + m)\, g\, d\, \Delta\theta \Rightarrow$

ker $m \ll M \Rightarrow M_p = \cong M\, g\, d\, \Delta\theta = M_m = mg\, \Delta y \Rightarrow$

$$d = (m\, \Delta y)/(M\, \Delta\theta).$$

Opomba: Metacentrična višina je v resnici določena z odvodom:

$$d = (m/M)\, dy/d\theta.$$

IX.3 NIHANJE PLOVILA

Upoštevajmo, da je sprememba vrtilne količine plovila pri bočnem sukanju okoli vzdolžne osi je enaka navoru dvojice sil teže in vzgona:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = M_p = J\alpha ,$$

kjer je vztraj. moment plovila $J = m\, r_J^2$*, kjer je* r_J *značilni* krožilni *polmer,* m *masa plovila,* $\alpha = d^2\theta/dt^2$ *je kotni pospešek plovila. Ker gre za povratni navor, ki zmanjšuje kot odklona* $\theta \Rightarrow M_p = - m\, g\, d\, \theta$ *, kjer je* d *metacentrična razdalja* $\Rightarrow$

$$- m\, g\, d\, \theta = m\, r_J^2\, d^2\theta/dt^2 \Rightarrow$$

$$d^2\theta/dt^2 = - g\, d\, \theta / r_J^2 ,$$

kar je diferencialna enačba za nihanje, vpeljemo: $\omega^2 = g\, d / r_J^2$*, pa zapišemo rešitev, ki pravi, da je bil odklon plovila v* $t = 0$ *enak nič:*

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t),$$

kjer je θ_0 *amplituda odklona. To lahko vstavimo v enačbo za nihanje in jo preverimo, če je res rešitev. Perioda nihanja plovila je:*

$$T = 2\pi \frac{r_j}{\sqrt{gd}} .$$

Perioda nihanja je tem večja, večji ko je krožilni polmer r_J. *Večja ko je metacentrična razdalja* d $\Rightarrow$ *manjša je perioda. Ampak če je* T *majhna* $\Rightarrow$ *plovilo niha z visoko frekvenco. Kako je bilo pri nihanju togega telesa?*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd_T}}$$

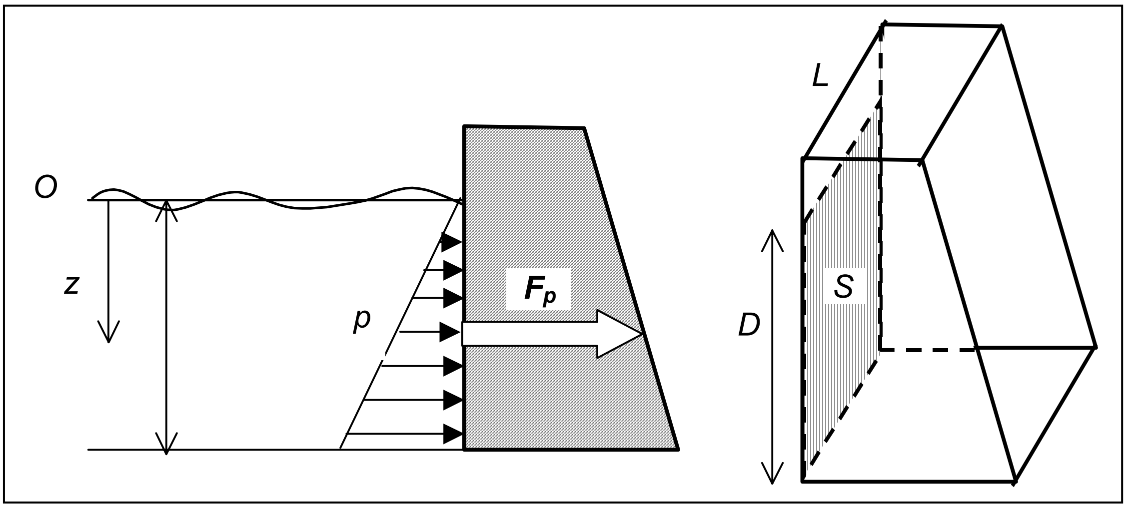
Kjer je *J* vztraj. moment *togega* telesa (pri nihanju plovila se preliva izpodrinjena tekočina), d_T pa razdalja težišča od osišča, ki ni enaka metacentrič oddaljenosti. Vemo, da je $J = m r_J^2$, po drugi strani izrazimo iz formule za nihajni čas togega telesa *J*, v katero vstavimo izraz za *d* iz predhodne formule za nihanji čas plovila:

$$J = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2} = \frac{T^2 mg\, r_j^2\, 4\pi^2}{4\pi^2 T^2 g} = m r_j^2 .$$

Tako smo pokazali ekvivalentnost izrazov za vztrajnostni moment togega telesa in plovila.

IX.4 JEZOVI IN REZERVOARJI

IX.4.1 RAVNOVESJE SIL

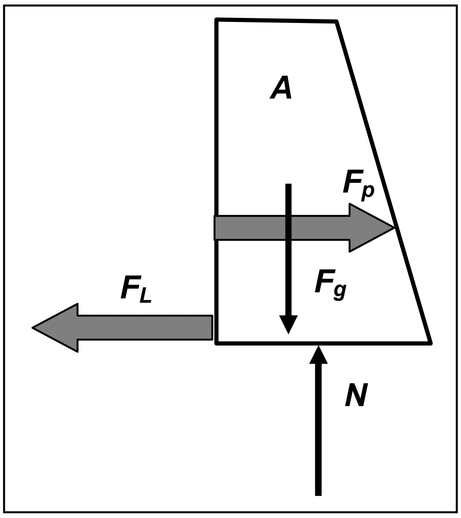


Zračni tlak na gladini in okoli jezu zanemarimo. Vodna masa deluje na vertikalno ploskev površine S = DL *s tlačno silo in z navorom te sile. Sile tlaka na jez je:*

$F_p = \langle p \rangle S = (\rho g D/2) S$, *kjer je* $\langle p \rangle$ *povprečen tlak po vertikali* $(0 + \rho g D)/2$. *Torej je tlačna sila:*

$$F_p = (\rho g D/2)\, DL = \rho g D^2 L/2.$$

Ker bran miruje, je vsota vseh sil na njo enaka nič:



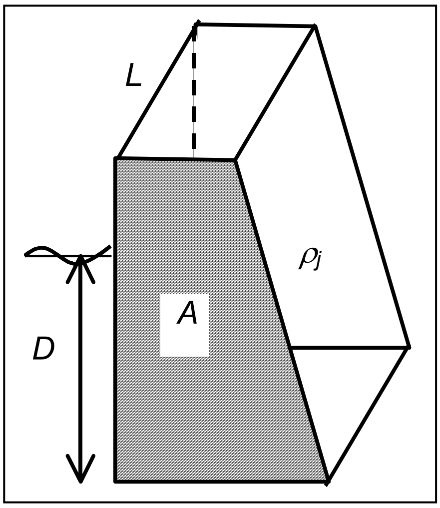
$F_p = F_l$, *kjer je* F_l *sila lepenja podlage. Normalna sila podlage je enaka teži brane:* $N = F_g$. *Bran horizontalno ne zdrsne dokler sila lepenja ne preseže kritične vrednosti*

$F_p = F_L < k_L N = k_L F_g$, *kjer je* k_L *koeficient lepenja med brano in podlago. Silo teže branu zapišemo z njenim volumnom:*

$F_g = \rho_j V_j g$, *kjer je volumen jezu:* $V_j = A L$.

IX.4.2 Faktor varnosti pred zdrsom pri jezovih

Za stabilnost pred zdrsom velja neenačba



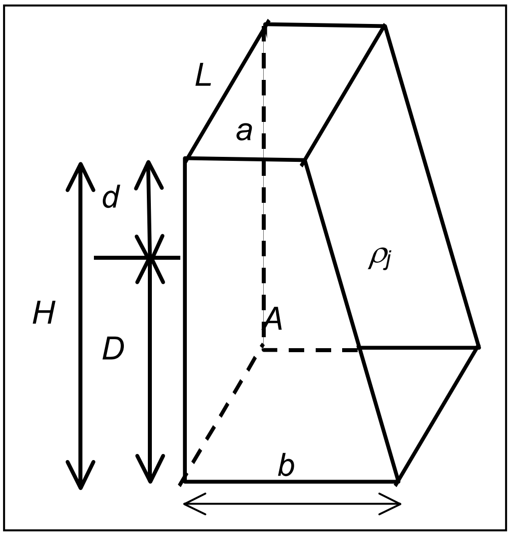
$F_p < k_L F_g \Rightarrow \rho g D^2 L/2 < k_L \rho_j A L g.$

Faktor varnosti zdrsa: $f_D = F_L / F_p \Rightarrow$

$$f_D = 2k_L \left(\frac{\rho_j}{\rho}\right)\left(\frac{A}{D^2}\right).$$

Za varnost mora veljati

$f_D > 1$, *če* $f_D = 1 \Rightarrow$ *drsenje se prične.*

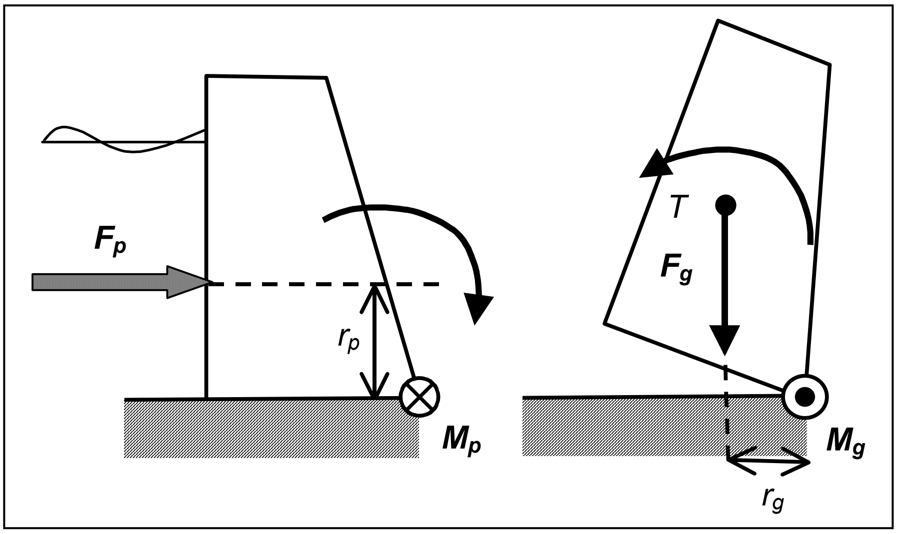


VAJA:

L = *220 m*
a = *4,1 m*
b = *12,7 m*
H = *25,6 m*
k_L = *0,73*, $\rho_j = 2{,}92\ g/cm^3$,
$\rho = 1{,}0\ g/cm^3$.
Kolik mora biti d, *da bo*
$f_D = 1{,}8$?

A = (a + b)H/2.

IX.4.3 RAVNOVESJE NAVOROV PRI JEZOVIH



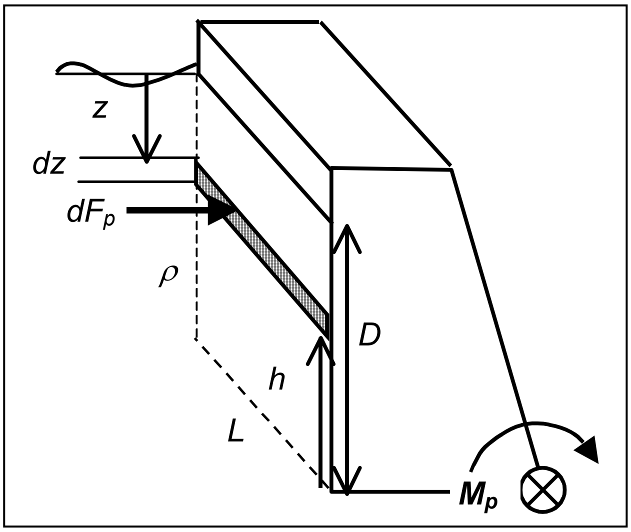
Sila tlaka prijemlje v višini r_p*, navor te sile* $M_p = r_p F_p$*, druga je sila teže jezu, ki ustvarja povratni navor* $M_g = r_g F_g$*. Za stabilnost mora veljati:*

$$M_g > M_p \Rightarrow r_g F_g > r_p F_p.$$

IX.4.4 Faktor varnosti pred *zasukom* jezu:

$$f_Z = M_g / M_p = r_g F_g / (r_p F_p) > 1,$$

vendar ne poznamo r_g, r_p *in* F_p (M_p)



$dF_p = p\,dS = p\,L\,dz =$
$dF_p = \rho g z\,L\,dz$, ρ ni $\rho(z)$, L *tudi ni* L(z)

$$F_p = \int_0^D L\rho g\, z dz = L\rho g \frac{D^2}{2}$$

$F_p = \langle p \rangle S$,
$\langle p \rangle = \rho g z L/2$
$dM_p = h\, dF_p =$
$dM_p = (D-z) p L dz$

$dM_p = (D-z)\,\rho g z\, L dz$*, s podobno integracijo kot pri sili tlaka izračunamo navor sile tlaka kot:*

$$M_p = \rho g L \frac{D^3}{6} = r_p F_p = r_p \rho g L \frac{D^2}{2} \Rightarrow r_p = D/3$$

prijemališče sile tlaka pri izvajanju navora okoli osi na dnu jezu, ki je merjeno od dna jezu navzgor, je na eni tretjini višine vode za jezom D.

VAJA

L = *95 m*

ρ_j = *2.88 g/cm*^{3}

Ko je voda 2,8 m pod vrhom jezu, je navor sile tlaka M_p = *444 MNm. Kolika je višina jezu, če je gostota vode* ρ = *1,0 g/cm*^{3}*? Je pomembna gostota materiala jezu?*

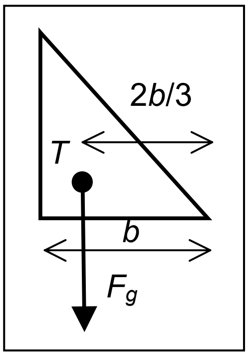
IX.4.5 NAVOR UPIRANJA TEŽE JEZU

Sila, ki izvaja povratni navor jezu ni sila, ki se upira zdrsu – slednja je sila lepenja. Povratni navor jezu izvaja sila teže jezu: $M_g = r_g F_g$ *, silo teže običajno enostavno določimo iz geometrije jezu in gostote materiala, neznana je razdalja* r_g *od osišča do nosilke sile teže – gre za koordinato težišča glede na osišče, ki se za vsako geometrijo jezu izračuna po formuli:*

$r_g = \int x \, dm/m$*, ker je* $m = \rho_j V_j = \rho_j AL$ *in* $dm = \rho_j dV_j = \rho_j L dA \Rightarrow$

$r_g = \int x \, dA/A$*, kar pomeni, da integriramo po preseku* A *jezu. Brez izpeljav zapišimo, da velja za trikoten profil jezu z osnovnico* b*:*

$r_g = b/3$.



Za trapezoidalen presek jezu z osnovnicama b *in* a (b>a) *velja:*

$$r_g = \frac{2b^2 + 2ab - a^2}{3(a+b)},$$

navor teže $M_g = F_g r_g = \rho_j g A L r_g$.

VAJA:

Izračunaj za jez trikotnega profila, ki ima višino H = *56 m in osnovnico* b = *21 m, potrebno prečno širino jezu* L*, da bo navor sile teže* M_g = *26,3 G Nm (*ρ_j = *2,72 g/cm*^{3}*).*

(a = *0),* $A = bH/2$, $M_g = r_g F_g = F_g\, 2b/3 = \rho_j g A L\, 2b/3 \Rightarrow L$.

PONOVITEV: Faktor varnosti proti zasuku:

$f_Z = M_g / M_p = r_g F_g /(r_p F_p) > 1,$

tokrat poznamo $M_g = \rho_j g A L r_g$, $M_p = \rho g L D^3/6 \Rightarrow$

$$f_Z = 6\left(\frac{\rho_j}{\rho}\right)\frac{A r_g}{D^3},$$

ki za trapezoidalen presek ($A = H(a+b)/2$), *za katerega poznamo* r_g *postane funkcija razmerja gostot in dimenzij trapeza:*

$$f_Z = 6\left(\frac{\rho_j}{\rho}\right)\frac{H(2b^2+2ab-a^2)}{D^3} > 1.$$

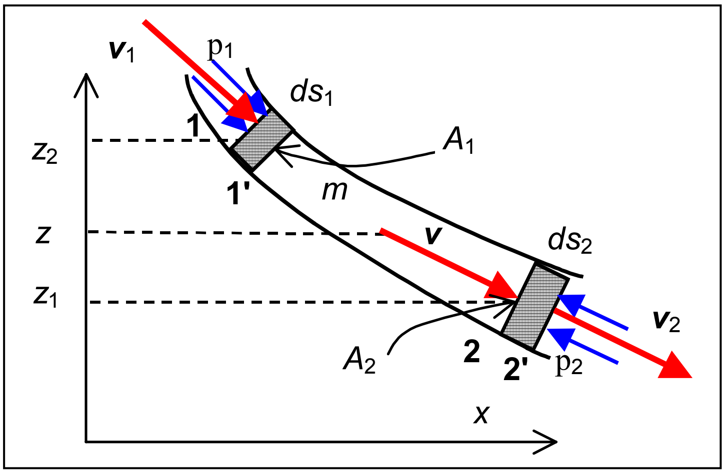
Ponovimo še faktor varnosti pred zdrsom:

$$f_D = 2k_L\left(\frac{\rho_j}{\rho}\right)\left(\frac{A}{D^2}\right) = 2k_L\left(\frac{\rho_j}{\rho}\right)\frac{(a+b)H}{2D^2}.$$

VAJA:

Jez trapezne oblike ima $f_Z = 1{,}4$, *višina vode D = 48,3 m, ki je d = 2,2 m pod vrhom jezu. Kolik je koeficient lepenja* $k_{L\,min}$ *in kolika je osnovnica* b *?* ($\rho_j = 2{,}72\ g/cm^3$)

IX.5 BERNOULLIJEVA ENAČBA - ENERGIJSKA ENAČBA TEKOČINE



Predpostavimo stacionarno gibanje – po cevi, ali pa znotraj tokovne cevi, ki je omejena s tokovnicami (črte, katerih tangente so hitrosti delcev). Stacionarno gibanje pomeni, da se hitrost toka na enem mestu s časom ne spreminja. Če pa spremljamo delce tekočine, pa se njihova hitrost vzdolž trajektorje spreminja. Poleg tega predpostavimo, da se gostota tekočine ne spreminja pri pomiku 'cevi' tekočine med 1-2 v lego 1'-2'. Tekočina pri pomiku izgubi maso $dm_1 = \rho\, dV_1$, *hkrati pridobi maso* $dm_2 = \rho\, dV_2$. *Velja ohranitev mase tekočine med 1-2* $\Rightarrow$

$\rho\, dV_1 = \rho\, dV_2 \Rightarrow dV_1 = dV_2 \Rightarrow$

$$A_1\, ds_1 = A_2\, ds_2,$$

kjer sta A_1 *in* A_2 *preseka v ustreznih legah.*

Izrek o spremembi mehanske energije, ki pravi, da je delo zunanjih sil enako spremembi energije, zapišemo za del tekočine, ki se je nahajal med 1 in 2. Sila tlaka je tista, ki izvaja delo A_p, *poleg dela izgub zaradi strižnih sil (trenje):*

Delo sile tlaka – izgube zaradi striž. sil = ΔW.

$$W_{pred\ pomikom} = W_k + W_p = mv^2/2 + mgz$$

$$W_{po\ pomiku} = W_{pred\ pomikom} + dm\, v_2^2/2 + dmgz_2 - dm\, v_1^2/2 - dmgz_1$$

$$\Delta W = dm\, v_2^2/2 + dmgz_2 - dm\, v_1^2/2 - dmgz_1 = A_p$$

$A_p = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2$, *delo sile tlaka* p_2 *je negativno, ker* p_2 *nasprotuje gibanju 'zamaška' tekočine od 2 do 2'.*

Upoštevamo, da je $A_1\, ds_1 = A_2\, ds_2 = dV = dm/\rho$, *pa zapišemo delo sile tlaka* $A_p = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 \Rightarrow$

$$dm\, v_2^2/2 + dmgz_2 - dm\, v_1^2/2 - dmgz_1 = p_1\, dm/\rho - p_2\, dm/\rho,$$

enačbo delimo z maso dm *in preuredimo:*

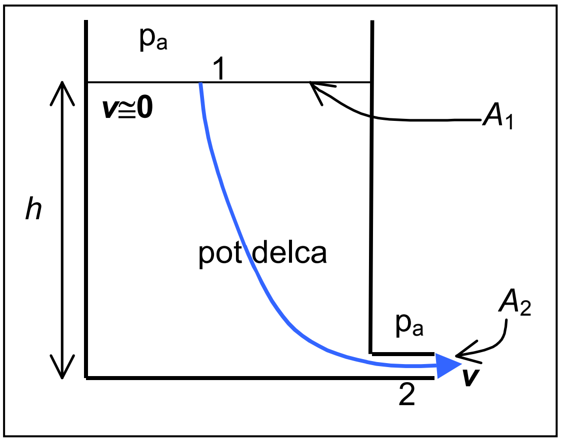
$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2,$$

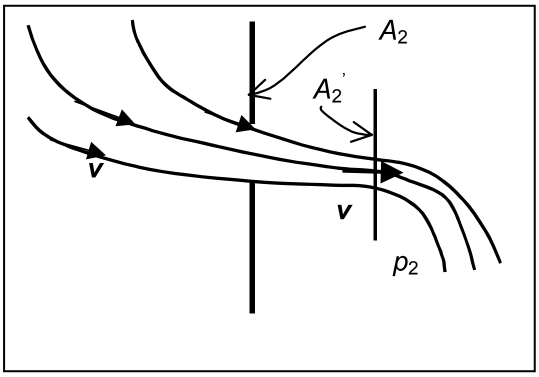
kar je Bernoullijeva enačba, ki je v tej obliki enačba za energijo tekočine na enoto mase. Delo izgub (strižnih, ali viskoznih sil) smo kar zanemarili. Enačbo zapišemo:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz=\mathrm{konst.}$$

vzdolž tokovnice, oz. tudi vzdolž poti delca tekočine.

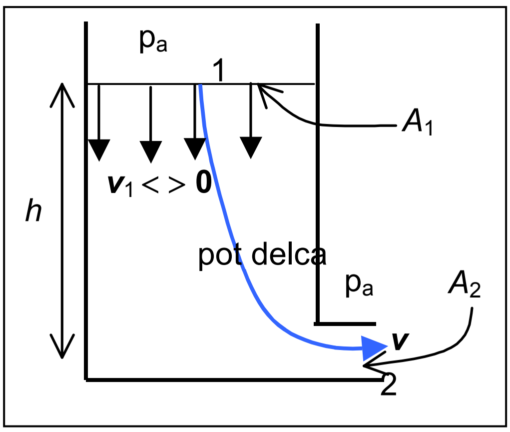
VAJA 1:





h = 0,8 m, kolika je hitrost iztekanja, če zanemarimo izgube in če je površina preseka iztočne cevi
$A_2 \ll A_1$ *– površina gladine. zapiši Bernoullijevo konstanto za točki 1 in 2. V resnici:* $v = C_V (2gh)^{1/2}$,
C_V *=0,8-0,9 (izgube energije med 1 in 2). Pretok skozi odprtino pa utrpi dodatne izgube, ker hitrosti delcev skozi* A_2 *niso horizontalne, curek se tam še zožuje, zato se upošteva manjši presek* A_2': $\phi = vA_2' = C_a v A_2$, $\phi = C_a C_V (2gh)^{1/2} A_2$
$\phi = C_d (2gh)^{1/2} A_2$, $C_d = C_a C_V < 1$.

VAJA 2:



Tokrat upoštevamo, da je hitrost na gladini $v_1 <> 0$, *preseka nista zelo različna,*
$A_2 < A_1$, *vendar odprtina nima velike vertikalne dimenzije.*
V točki1: $p_a/\rho + gh + v_1^2/2$,
V točki 2: $p_a/\rho + v_2^2/2$, *enačimo energijo v obeh:*

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh \Rightarrow$$

$v_2 = (v_1^2 + 2gh)^{1/2}$. *Sprememba volumna zaradi spuščanja gladine* $dV = A_1 v_1 dt$ *je enaka spremembi volumna, ki zapusti sod skozi pipo v enakem času:* $dV = A_2 v_2 dt \Rightarrow$
$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = A_1 v_1 / A_2 = (v_1^2 + 2gh)^{1/2}$ *, kar je enačba za kvadrat hitrosti* v_1. *Upoštevajmo, da se zaradi te hitrosti višina* h *zmanjšuje:* $v_1 = - dh/dt$, *uvedemo še brezdimenzijsko količino* $\varepsilon = A_2 / A_1 < 1$ *in enačbo za* v_1 *zapišemo:*
$(1 - \varepsilon^2) v_1^2 = 2gh\varepsilon^2 \Rightarrow (1 - \varepsilon^2)(dh/dt)^2 = 2gh\varepsilon^2$, *kar vodi k enačbi za časovno spremembo višine gladine:*

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2 2gh}{1-\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{\varepsilon\sqrt{2g}\sqrt{h}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$ *, kjer smo z*

negativnim predznakom upoštevali upadanje gladine. Ločimo spremenljivke, h *na levo stran enačbe,* t *na desno stran in*

integriramo $\Rightarrow \int_{h_0}^{h} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\varepsilon\sqrt{2g}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \int_0^t dt \Rightarrow$

$$2\left(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}\right) = -\frac{\sqrt{2g}\,\varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \Rightarrow h = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{\varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2$$ *, ali*

$$h = h_0\left(1 - \sqrt{\frac{g}{2h_0}}\frac{\varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2.$$

Največji možni čas iztekanja se pojavi takrat, ko je $h = 0 \Rightarrow$

$$1 = \sqrt{\frac{g}{2h_0}}\frac{\varepsilon t_{\max}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \Rightarrow t_{\max} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

VAJA: $h_0 = 1$ *m in* $h_0 = 10$ *m*

IX.6 PRETOK VOLUMNA, PRETOK MASE

Pretok volumna: $\phi_V = dV/dt$, *ker* $dV = S\,dx$ *in* $dx = v\,dt \Rightarrow$
$dV = S\,v\,dt \Rightarrow$

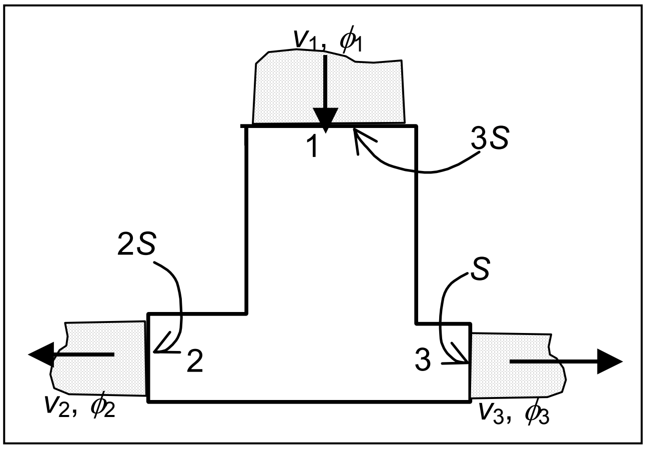
$$\boxed{\phi_V = S\,v}$$

V primeru iztekanja iz soda je $\phi_V = A_2 v$. *Masni pretok:*
$\phi_M = dm/dt$, $dm = \rho\,dV \Rightarrow$

$$\boxed{\phi_M = \rho S\,v = \rho\phi_V}$$

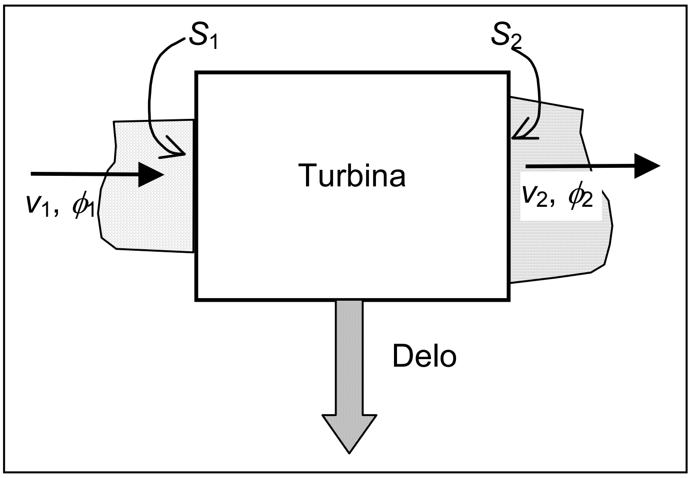
VAJA 1:

$S = 10\ cm^2 = S_3$, $v_1 = 5\ m/s$; $S_2 = 2S$, $\phi_2 = 9\ l/s$; $S_1 = 3S$



$v_2 = ?$ $v_3 = ?$ *Kaj, če* $\phi_3 = 0$?
Ravnovesje volumskih pretokov: $\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$
$v_2 = \phi_2 / S_2 = \phi_2 / (2S)$
$\phi_1 = S_1 v_1 = 3\,S\,v_1$
$\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$

VAJA 2



Turbina:
$S_1 = 300\ cm^2$
$S_2 = 2S_1$
$\rho = 1\ kg/dm^3$
$P = 120\ kW$ – *moč obratovanja*
$v_1 = ?$ $v_2 = ?$

$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$,
$P = A_{od} / t$

V času t *priteče masa* $m = \phi_{M1}\,t = \rho\phi_1 t = \rho\,S_1 v_1 t$. *Voda pridrvi z* W_{k1} *in turbino zapusti z manjšo* $W_{k2} \Rightarrow$
odvedeno delo: $A_{od} = W_{k1} - W_{k2} = P\,t \Rightarrow$

$$P = \frac{\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}}{t} = \frac{m}{2t}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \frac{\phi_{M1}}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$$

$$P = \frac{\rho S_1 v_1}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right); \quad v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2}$$

$$P = \frac{\rho S_1 v_1}{2}\left(v_1^2 - \frac{v_1^2 S_1^2}{S_2^2}\right) = \frac{\rho S_1 v_1^3}{2}\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right).$$

$$v_1 = \left[2P \Big/ \rho S_1\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\right]^{1/3}$$

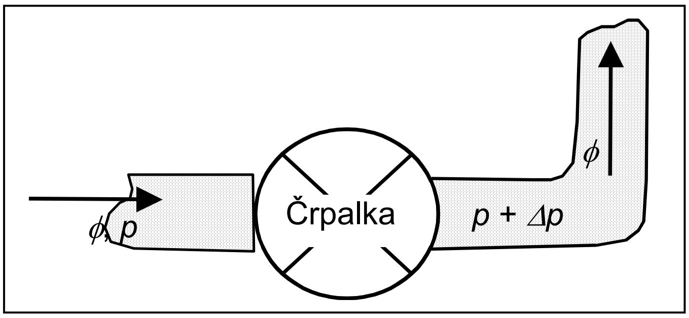
Izkoristek turbine: $\eta = (W_{k1} - W_{k2}) / W_{k1} = A_{od} / W_{k1}$

$\eta = Pt / W_{k1} =$

$$\eta = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)2}{2mv_1^2} = 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} = 1 - \frac{v_1^2 S_1^2}{v_2^2 S_2^2} = 1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Če $v_2 = 0 \Rightarrow$ *100 % izkoristek po tej formuli.*

VAJA 3



Porabljena moč črpalke

$P_0 = 8{,}5\ kW$

$\Delta p = 5\ bar$

$\phi = 40\ m^3/h$

Izkoristek črpalke?

$A_{dov} = A_{por}$

$\eta = A_{odd}/A_{dov} = (P_{odd}\, dt)/(P_0\, dt) = P_{odd} / P_0.$

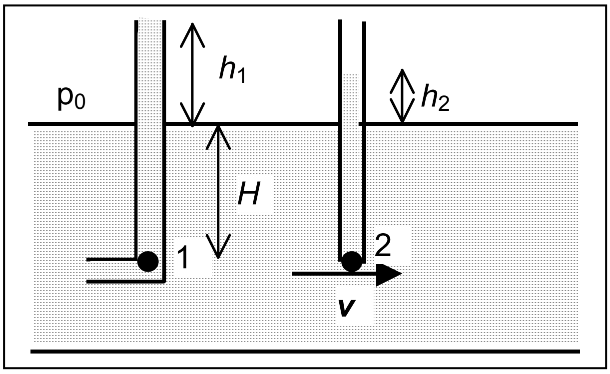
Črpalka premaguje delo sile tlaka – toliko dela mora opraviti:

$= F\, dx = \Delta p\ S\, dx = \Delta p\ dV.$

Ker je $\phi = dV/dt \Rightarrow dV = \phi\, dt \Rightarrow F\, dx = \Delta p\, \phi\, dt \Rightarrow$

$P_{odd} = \Delta p\, \phi$; $\eta = \Delta p\, \phi / P_0$

VAJA 4



Meritve hitrosti z zastojnim tlakom. V ustju cevke 1 se tekočina ustavi, teče pa mimo lege 2.

$\rho = 1\ kg/dm^3$

$H = 5\ cm$, $p_0 = 1\ bar$

$h_1 = 4\ cm$, $h_2 = 2\ cm$

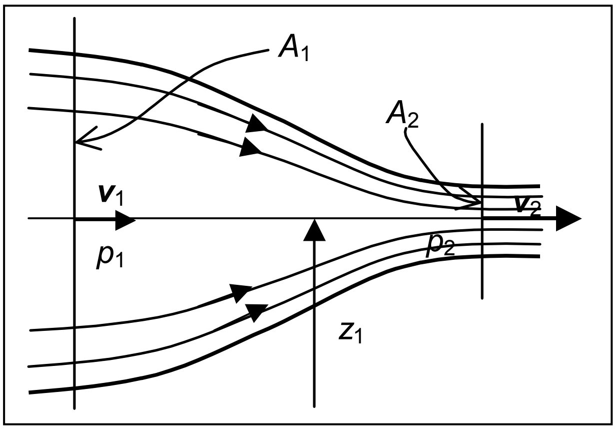
$v = ?$

$p_1 = \rho g(h_1 + H)$; $p_2 = \rho g(h_2 + H)$

Bernoullijeva enačba:

$p_1/\rho + 0 = p_2/\rho + v^2/2 \Rightarrow v = (2g(h_1 + h_2))^{1/2}$; $p_1 - p_2$ = *zastoj. tlak = gostoti* W_k.

VAJA 5



Gasilska cev:

$\rho = 1\ kg/dm^3$

$A_1 = 12\ cm^2$, $A_2 = 3\ cm^2$

$\phi = 2{,}4\ l/s$, $p_1 = 250\ kPa$

$p_2 = ?$

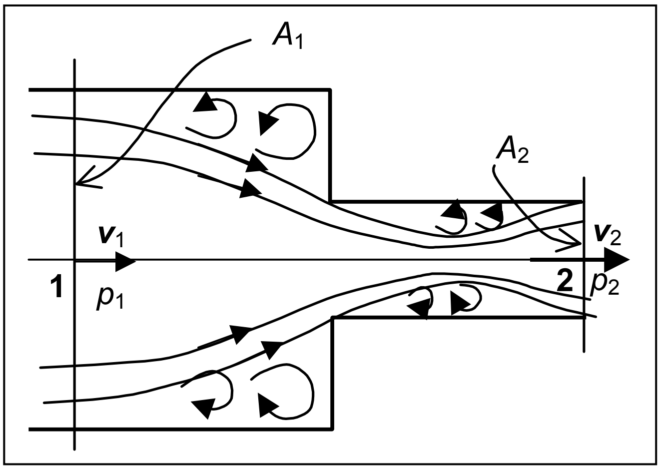
$p_1/\rho + v_1^2/2 = p_2/\rho + v_2^2/2$

$p_2 = p_1 + \rho(v_1^2 - v_2^2)/2$

$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \phi$,

$p_2 = p_1 + \rho\phi^2(1/A_1^2 - 1/A_2^2)/2$

VAJA 6



$A_1 = 9\ cm^2$, $A_2 = 3\ cm^2$,

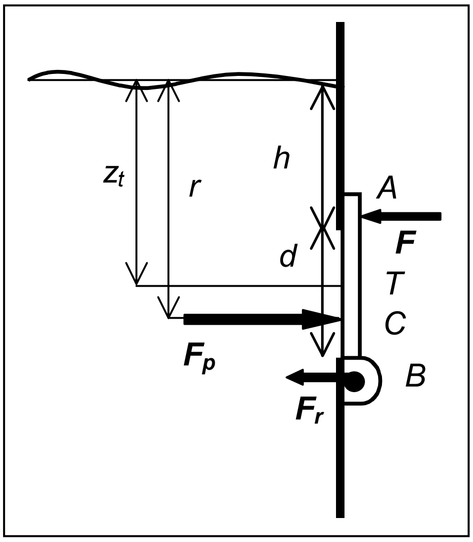
$\phi = 2,\ l/s$, $p_1 = 150\ kPa$

$K = 0{,}34$ $p_2 = ?$ $v_2 = ?$

Iztekanje skozi naglo zoženje cevi. V območju vrtinčenj ob steni cevi (separacija) je zmanjšan tlak in se pojavijo izgube. Točka 1 je dovolj vzvodno, da ni prizadeta z vrtinčenjem ob zožitvi. V točki 2 pa izgube energije označimo z energijsko višino izgub

$$h = K\, v_2^2/2:$$
$$p_2/\rho + v_2^2/2 + h = p_1/\rho + v_1^2/2 \Rightarrow$$
$$p_2/\rho + v_2^2/2\,(1+K) = p_1/\rho + v_1^2/2$$

VAJA 7



Rezervoar vsebuje gorivo gostote 700 kg/m^3*. Pri strani ima krožno odprtino premera 1,8 m, ki je zaprta z loputo, ki imajo tečaj na spodnji strani. Nivo goriva je 2 m nad zgornjim robom odprtine. Izračunaj celotno silo tlaka na vrata* F_p*, silo na zapah na zgornji strani odprtine* F *in reakcijsko silo tečaja* F_r*. Kolike pa bi bili poslednji dve sili, če bi bil tečaj lopute na zgornji strani odprtine in zapah na spodnji?*

Lega težišča lopute T *je* $z_t = h + (d/2) = 2{,}9$ m

Lega prijemališča sile tlaka C *pod težiščem* T *je* $z_p = r - z_t = r_J^2/z_t$, *za krožno odprtino je* $r_J^2 = d^2/16$ *(predavanja 'Center tlaka')* $\Rightarrow$

$z_p = r - z_t = 1{,}8^2/(16 \cdot 2{,}9)$ m $= 0{,}07$ m *- razdalja od T do C*

F_p = *povprečen tlak * površina odprtine*

$F_p = \rho g\, z_t\, \pi d^2/4 = 700 * 9.8*2{,}9*1{,}8^2*\pi*/4$ N $= 50{,}62$ kN

I. Navori okoli tečaja v legi B *so v ravnovesju: navor tlaka ima za ročico razdaljo BC =* $(d/2 - z_p)$

$F\, d = F_p\, (d/2 - z_p) \Rightarrow F = F_p\, (d/2 - z_p)/d = F_p\, (0{,}5 - z_p/d)$

$F = 23{,}34$ kN.

Reakcijska sila tečaja pa je: $F_r = F_p - F = 27{,}28$ kN.

II. Tečaj v legi A*, zapah s silo* F *v legi* B*. Ravnovesje navorov okoli* A*:* $F\, d = F_p\, (d/2 + z_p) \Rightarrow F \Rightarrow F_r = F_p - F$

IX.7 REYNOLDSOVO ŠTEVILO

Strižna napetost ali viskozna napetost (sila na ploskovno enoto)

$$\boxed{\tau = F/A = \mu\, du/dy}$$

μ je dinamična viskoznost [kg/(ms)], lastnost tekočine.

μ [kg/(ms)]	*snov ($T = 20\ ^0C$)*
0,001	*voda*
0.0016	*Hg*
1.5	*glicerin*
$\cong$ 0,12	*strojno olje*

Vpeljemo brezdimenzijsko Reynoldsovo število:

$$\boxed{Re = \text{inercialna sila /viskozna sila}}$$

*Inercialna sila je vztrajnostna sila, ki se po 2. Newton. zakonu oceni kot masa * pospešek. Naj je značilna dimenzija telesa, ki potuje po tekočini enaka* l*, njegov volumen je tedaj v grobem* $V \cong l^3$ *, masa kot* $m \cong \rho\, l^3$*, značilna hitrost* u *s katero gre tekočina mimo telesa (ali hitrost, s katero telo prepotuje razdaljo enako njeni dimenziji)* $u \cong l\,/\,t$ *in pospešek* $a \cong l\,/\,t^2$*. Inercialna sila se tedaj oceni kot*

$$F_i = m\, a \cong \rho\, l^3\, l\,/\,t^2 = \rho\, l^2\, u^2.$$

Viskozna sila se oceni kot $F_v = \tau\ A \cong \tau\ l^2 = \mu\ du/dy\ l^2$

$$F_v \cong \mu\ du/dy\ l^2 \cong \mu\ (u/l)\ l^2 = \mu\ u\ l$$

Tedaj je: $Re = F_i\,/\,F_v = (\rho\, l^2 u^2)/(\mu\, ul)$

$$\boxed{Re = (\rho l u)/\mu = lu/\nu,}$$

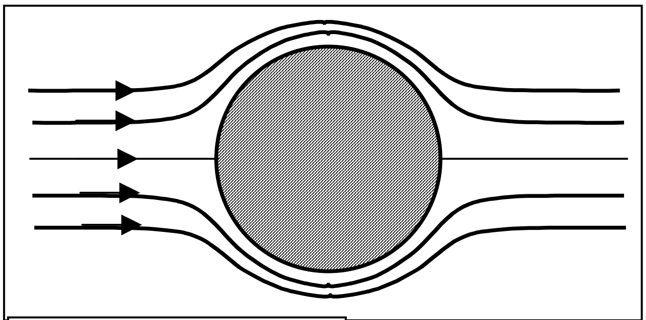
kjer je $\nu = \mu\,/\,\rho$ *kinematična viskoznost ($\cong 10^{-6}\ m^2/s$ za vodo).*

IX.8 STOKESOV ZAKON UPORA

Re število je merilo za stopnjo turbulence v tekočini. V grobem velja:
Re $<$ *2000 tok tekočine je laminaren*
Re $>$ *2000 tok je turbulenten pri običajnih pogojih v naravi. Tedaj se v opazovani točki tekočine hitrost stalno spreminja, ima izrazite fluktuacije. Vendar pa je lahko povprečenje te hitrosti po primerno dolgem času neodvisno od začetnega trenutka povprečevanja. V tem primeru je turbulenten tok stacionaren,* $\langle \mathbf{u} \rangle$ *ni funkcija časa. V posebnih pogojih (skorajda brez vibracij) so uspeli v laboratoriju izvesti, da je tudi pri* Re = *50000 tok* laminaren. Re *število je pomembno pri obtekanju poljubnih teles. Skoraj zagotovo lahko rečemo, da velja:*

Re $<=$ *1 laminaren tok*
Re $>=$ *10^4 turbulenten tok, če*
1 $<$ Re $<$ *10^4 prehodni režim, nestabilen.*

Naj je Re $<=$ *0,5, pri obtekanju kroglice:*



Velja: du/dr $\cong$ *1,5* u/R
Zaviralna tangencialna sila na površini krogle se tedaj oceni kot:
$F_v = A\ \mu\ du/dy =$
$4\ \pi R^2\ \mu\ 1{,}5\ u/R$

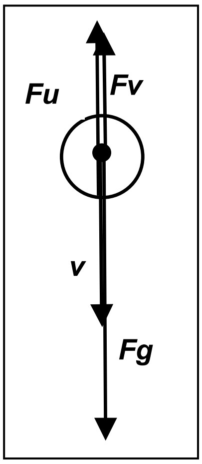
$$\boxed{F_v = 6\ \pi\ R\ \mu\ u}$$

Stokesov zakon upora, ki pravi:

*Za laminarno obtekanje tekočine (*Re $<=$ *1) okoli krogle je sila premosorazmerna s hitrostjo toka (ali s hitrostjo gibanja krogle).*

VAJA:

Kroglica gostote ρ *in polmera* R *enakomerno pada v tekočini z vskoznostjo* μ *in gostoto* ρ_0*. Kako je hitrost padanja odvisna od gostot?*



Enakomerno vertikalno gibanje, vsota vseh sil je enaka nič:

$$F_u + F_v = F_g$$

$$F_g = mg = \rho V g = \rho\, 4\,\pi R^3\, g/3$$

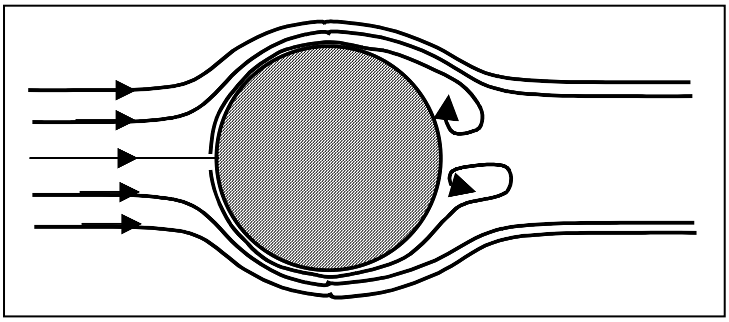
$$F_v = \rho_0\, 4\,\pi R^3\, g/3$$

$$F_u = 6\,\pi R\,\mu\, v$$

Vse tri sile vstavimo v ravnovesno enačbo, izrazimo hitrost kot:

$v = (2/9)\, R^2\, g\, (\rho - \rho_0)/\mu$ *- laminarno gibanje*

IX.9 SILA UPORA PRI TURBULENTNEM GIBANJU



Naj je Re $>= 10^4$*, turbulentno obtekanje krogle. V tanki plasti okoli krogle viskozna tekočina vleče za seboj počasnejše dele tik ob steni. Na zadnji strani se tekočina 'odlepi' od telesa in se zavrtinči. S tem pride do tlačne razlike med sprednjim in zadnjim delom telesa ' spredaj je večja hitrost, zato manjši tlak kot zadaj. Ta tlačna razlika potiska telo proti toku – telo izvaja silo upora proti toku. Gre za* dinamičen upor*, ki je sorazmeren* zastojnemu tlaku *in* prečnemu preseku A *ovire. Zastojni tlak je po Bernoullijevi enačbi sorazmeren* $u^2/2$*:*

$$\boxed{F_d = C_d\, A\, \rho\, u^2/2}$$

$F_d = C_d\, A\, \rho\, u^2/2$, C_d je koeficient upora ('drag coefficient'). Ta sila upora je zelo potgosta in nastopa tudi pri obtekanju plovila, pri toku vode skozi cev pipe, sila vetra ipd.

C_d	oblika
0,04	kapljica
0,2-0,5	krogla
0,4	izbočena polkrogla
1,3	vbočena polkrogla (padalo)
1,1	plošča krožnega preseka