Tekočine so snovi, ki tečejo in se med seboj mešajo. Skoznje se lahko premikamo in lahko jih prelivamo. Ne moremo jih raztegovati, lahko pa jih stiskamo. Tekočine zlahka spreminjajo obliko, kar pomeni, da se ne upirajo zunanjim strižnim silam. Zaradi tega nimajo lastne oblike; zavzamejo obliko posode, v kateri so. Tekočine so npr. voda, glicerin, alkohol, med, zrak in drugi plini, živo srebro in druge tekoče kovine itd.

Tekočine razdelimo v pline in kapljevine. **Plini** so zelo lahki (imajo majhno gostoto, red velikosti kg/m^3), so izredno stisljivi in gibljivi (majhna viskoznost), zlahka se mešajo. Vedno zavzamejo celoten razpoložljiv prostor in pritiskajo v vse smeri na vse stene posode. Ni mogoče, da bi se plin »sesedel« na dno posode, nad njim pa bi bil vakuum. Gostota plina je po vsej prostornini praktično enaka, kar pomeni, da lahko zanemarimo vpliv teže na porazdelitev plinov v prostoru (izjema je zemeljsko ozračje, katerega gostota je zaradi teže pri tleh večja kot v višjih plasteh).

Kapljevine se od plinov ločijo po večji gostoti (red velikosti 1000 kg/m^3), večji viskoznosti in predvsem po manjši stisljivosti. Kapljevine težje tečejo in jih težje mešamo kot pline. Enako kot plini tudi kapljevine zavzamejo obliko posode. Vendar ne napolnijo celotne prostornine posode, ampak le njen spodnji del (vpliv teže), tako da tvorijo prosto površino (gladino). Gladina kapljevine je običajno vodoravna. V majhnih količinah imajo kapljevine obliko kaplje (odtod ime kapljevina).

Razdelitev tekočin na kapljevine in pline ni vedno enostavna. Zelo zgoščeni in ohlajeni plini so po nekaterih lastnostih blizu lahko tekočim kapljevinam.

Lastnosti tekočin so predvsem posledica dejstva, da so tekočine sestavljene iz veliko majhnih delcev (**molekul** oziroma skupkov molekul), ki se stalno gibljejo, večinoma neurejeno. Velika gibljivost molekul omogoča, da tekočine tečejo, se mešajo in da se skoznje premikamo. V »mirujoči« tekočini je gibanje molekul povsem neurejeno; molekule z medsebojnimi trki stalno spreminjajo smer in hitrost gibanja, tako da se kljub živahnemu gibanju v povprečju zadržujejo na istem mestu, zaradi česar tekočina navzven miruje. Pretakanje oziroma gibanje tekočine pa pomeni določeno urejenost gibanja molekul.

Molekularna zgradba kapljevin

Kapljevine so po notranji zgradbi na eni strani podobne plinom (predvsem pri višjih temperaturah, v bližini vrelišča), na drugi strani pa trdninam (pri nižjih temperaturah, v bližini tališča). Kakor v plinih je tudi v kapljevinah izrazito statistično neurejeno gibanje molekul, le da so kapljevine bolj goste in viskozne kot plini. Majhna stisljivost kapljevin nakazuje, da se molekule skoraj dotikajo druga druge; med njimi že učinkujejo močne medmolekularne sile, ki preprečujejo, da bi se molekule razbežale. Kapljevina je torej skup izredno veliko molekul, ki se gibljejo druga ob drugi.

7. TEKOČINE

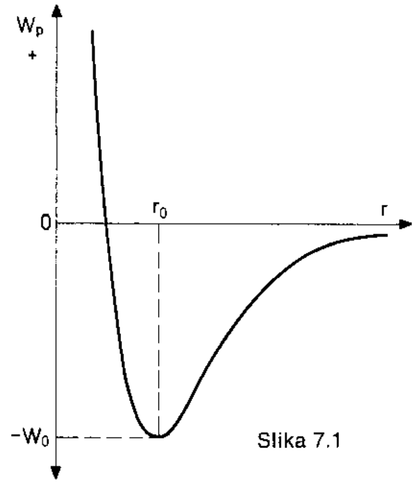
Posreden dokaz o termičnem gibanju molekul v kapljevini je t. i. **Brownovo gibanje** drobnih delcev v kapljevini. V kapljevino natrosimo delce (npr. trose, fin prah, tuš) ter pod mikroskopom opazujemo njihovo gibanje. Ker so delci specifično težji od kapljevine, bi morali v kapljevini padati in se zbrati na dnu. Dejansko pa opazimo, da se gibljejo neurejeno v vseh smereh, večinoma sicer premočrtno, vendar pogosto nenadoma (kot ob trku) spremenijo smer, da se gibljejo po nekakšni cikcakasti črti. Takšno gibanje razpršenih delcev je posledica neurejenega udarjanja kapljevinskih molekul, ki z vseh strani obdajajo delce. Udarci molekul ob delce se v povprečju večinoma izničijo, toda tu in tam se zgodi (ker se molekule gibljejo neurejeno), da dobi delec v eni smeri močnejši sunek in v tej smeri sune. Naslednjič dobi močnejši sunek v drugi smeri itd. Zaradi udarjanja kapljevinskih molekul, ki se gibljejo termično (neurejeno), se drobni delci, razpršeni v kapljevini, gibljejo termično kot plinske molekule (gl. str. 178). Ker so ti delci relativno veliki (v primerjavi z molekulami), učinkuje na njihovo gibanje tudi teža, zato gostota (koncentracija) delcev v kapljevini ni enakomerna; delci se zgostijo ob dnu, višje pa so redkejši (podobno kot v ozračju, gl. str. 156).

Čeprav bi iz lastnosti kapljevin pričakovali povsem neurejeno stanje v kapljevini, pa rentgenska preiskava zgradbe kapljevin kaže, da tudi v kapljevini obstaja nekak red (predvsem pri nižjih temperaturah), le da ta ne sega skozi celotno snov (kot v trdnini), ampak le do razdalje nekaj molekularnih premerov v okolico posameznih molekul (t. i. **bližnji red**).

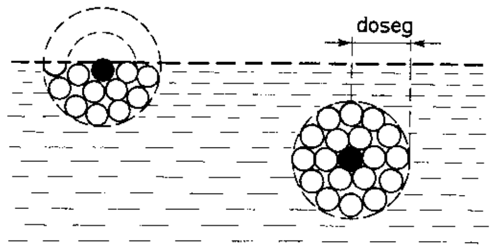
Ko se trdnina pri tališču stali, preide v kapljevinsko stanje v skupkih molekul (koščkih trdnine), v katerih je še ohranjena kristalna struktura trdnine. Sproščeni skupki se gibljejo neurejeno in med njimi so večje ali manjše praznine (luknje), zaradi česar ima kapljevina v splošnem manjšo gostoto kot trdnina iste vrste (izjema je voda, pri kateri je trdnina zgrajena izredno razredčeno). Molekule prehajajo skozi praznine od enega koščka do drugega, tako da ti stalno spreminjajo obliko in velikost. Razen tega se koščki trdnine z višanjem temperature postopoma drobijo in sproščene molekule napolnjujejo praznine med njimi. Mikro območje bližnjega reda se tako s segrevanjem kapljevine zmanjšujejo in pri višjih temperaturah je notranja zgradba kapljevine praktično povsem neurejena.

Zaradi zgoščenosti molekul v kapljevini se močno izrazijo sile med molekulami, ki močno vplivajo na njihovo gibanje in razporejanje v kapljevini. Sila med molekulama (ki sta razmaknjeni npr. za r) ima podobno naravo kot sila med atomoma (slika 6.1). Če sta molekuli zelo razmaknjeni (velik r), je sila med njima privlačna, vendar je izrazita le do razdalje nekaj premerov molekule (r_0). Za $r \gg r_0$ je sila med molekulama zanemarljivo majhna (npr. v plinastem stanju). Medmolekularna sila ima torej **kratek doseg**, njen vpliv se razteza le v neposredno okolico molekule. Pri ravnovesni razmaknjenosti molekul ($r \approx r_0$) se sila med njima izniči, za $r < r_0$ (molekuli se dotikata in »deformirata«) pa postane odbojna. V kapljevinskem stanju se molekule razvrščajo tako, da je vsaka od njih v povprečju v ravnovesju, da je povprečna razmaknjenost med njimi okrog r_0. Dejstvo, da postane sila med molekulami močno odbojna, brž ko se oddaljenost med njimi zmanjša pod r_0 (ko se molekule dotaknejo), se odraža v zelo majhni stisljivosti kapljevin.

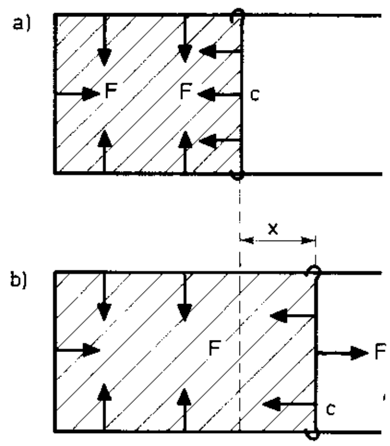
V zvezi z medmolekularnimi silami ima vsaka molekula v kapljevini **potencialno energijo**. Ta se spreminja z razdaljo r med molekulama podobno kot potencialna energija atoma v molekuli (gl. sliko 6.2). Na sliki (7.1) je ilustrirana tipična odvisnost potencialne energije W_p



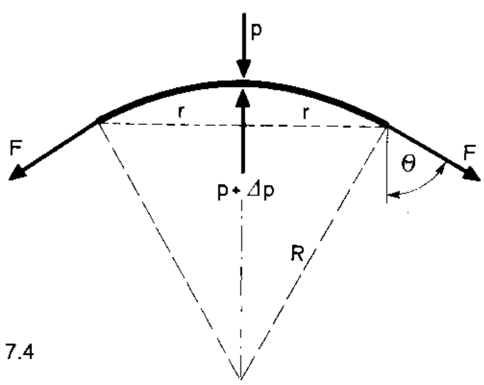
Slika 7.1



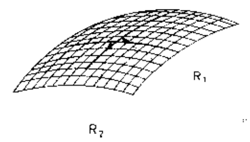
Slika 7.2



Slika 7.3



Slika 7.4



Slika 7.5

molekule od oddaljenosti r med sosednjima molekulama. Vzamemo, da je $W_p \approx 0$, če sta molekuli zelo razmaknjeni (velik r). Manjši razdalji r torej ustreza (ker je sila med molekulama privlačna) manjša potencialna energija (manj pozitivna); ta je zato bolj in bolj negativna, če se r zmanjšuje. Najbolj negativna ($= -W_0$) je pri ravnovesni razmaknjenosti molekul ($r \approx r_0$), pri kateri se sila med molekulama izniči. Za $r < r_0$ se potencialna energija strmo poveča. Da se molekula v kapljevini odtrga od druge molekule (molekuli sta razmaknjeni za r_0), je potrebna energija W_0 (potencialna energija molekule se mora povečati od $-W_0$ na 0, to je za W_0).

Ker imajo medmolekularne sile kratek doseg (nekaj r_0), učinkujejo na izbrano molekulo le molekule iz njene neposredne soseščine. Teh molekul je npr. $N = 10$. Izbrana molekula ima potemtakem potencialno energijo okrog $-NW_0$, kar pomeni, da se lahko odtrga iz notranjosti kapljevine le, če prejme energijo NW_0. Ta energija je merilo za izparilno toploto, kolikršna odpade na eno molekulo (gl. str. 221).

Površinska napetost

Kapljevina je na zgornji strani omejena s prosto gladino, ki je napeta. Če previdno položimo britvico na gladino vode, britvica plava na vodi, četudi je specifično težja. Opazimo, da se gladina vode pod britvico upogne, kot da bi bila napeta opna. Nekatere žuželke zlahka plešejo po mirni gladini vode, ne da bi se jim noge omočile. Napolnimo kozarec z vodo do vrha. Ko je kozarec že povsem poln, se gladina vode upogne in napne, kot da bi preprečevala, da bi se voda razlila čez rob. Šele ko ta napeta opna »poči«, se voda razlije. Površinska napetost je nadalje vzrok, da se kapljevina v majhnih množinah oblikuje v kroglaste kapljice.

Površinska napetost se pojavlja tudi pri trdninah, le da tam zaradi toge zgradbe in oblike ne povzroča opaznih efektov.

Površinska napetost je v zvezi z močnimi medmolekularnimi silami, ki imajo kratek doseg. Molekula v notranjosti kapljevine je z vseh strani obdana z drugimi molekulami (slika 7.2). Recimo, da jo v območju dosega medmolekularnih sil obdaja N molekul. Njena potencialna energija potemtakem znaša $-NW_0$ (gl. zgoraj). Molekulo na gladini kapljevine pa obdajajo druge molekule le z ene strani. Če je nad kapljevino vakuum, obdaja molekulo na gladini okrog $N/2$ molekul, zaradi česar ima potencialno energijo $-NW_0/2$. Torej ima molekula na gladini kapljevine višjo potencialno energijo kot molekula v notranjosti (v zgornjem primeru kar za $NW_0/2$ višjo). Razlika med potencialno energijo molekule z gladine in potencialno energijo molekule v notranjosti kapljevine se imenuje **površinska energija molekule.** Ta je odvisna tako od vrste in stanja kapljevine (od gostote molekul in od sil med njimi) kot od sredstva, ki je nad gladino kapljevine.

Da povečamo površino proste gladine, moramo potegniti molekule iz notranjosti kapljevine in jih razvrstiti po gladini. Ob tem se poveča potencialna energija molekul, za kar je potrebno delo. Zahtevano delo (A) je sorazmerno s številom prenesenih molekul, to je $\Delta S/r_0^2$, kjer je ΔS povečanje površine gladine, r_0 pa povprečna razdalja med sosednjima molekulama:

$$A = (NW_0/2) \cdot \Delta S/r_0^2 = \sigma \Delta S \tag{7.1}$$

Sorazmernostni faktor $\sigma = NW_0/2r_0^2$ se imenuje **površinska napetost** (merska enota je $J/m^2 = N/m$); odvisna je od vrste in stanja kapljevine in sredstva na drugi strani gladine. Običajno navajamo površinsko napetost kapljevine s privzetkom, da kapljevina meji na zrak.

Delo $A = \sigma \Delta S$, opravljeno med povečanjem površine proste gladine, lahko prikažemo tudi kot delo, potrebno za premagovanje **površinske sile** (F), s katero molekule v površinskem sloju kapljevine nasprotujejo povečanju proste gladine.

Vzemimo pravokoten okvir z gibljivo prečko in ga potopimo v milnico, da se med njim napravi milnična opna (slika 7.3). Opazimo, da se prosta prečka premakne, pri čemer se površina milnične opne zmanjša. Premakne jo površinska sila F (ta učinkuje tudi na togi del okvira in ga skuša skriviti). Z dodatno silo F' previdno (in enakomerno) premikamo prečko v nasprotno smer (slika 7.3b), dodatna sila je torej enaka površinski sili: $F' = F$. Ko prečko premaknemo za x, opravimo delo $F'x = Fx$, ki znaša $\sigma \Delta S$ (gl. 7.1), pri čemer je ΔS povečanje proste gladine (na obeh straneh opne): $\Delta S = x \cdot 2c$ (c = dolžina prečke). Sledi: $A = Fx = \sigma \cdot 2xc$ ali

$$\sigma = F/2c \tag{7.2}$$

Površinska napetost je dana s površinsko silo na enoto dolžine mejne črte (to je torej linijska gostota površinske sile). Običajno merimo površinsko napetost tako, da potopimo v kapljevino krožno zanko (iz platine) in jo nato previdno dvigamo. Izmerimo dvižno silo, pri kateri zanka »pretrga« prosto gladino in zapusti kapljevino.

Površinska napetost kapljevine je v splošnem tem **manjša**, čim **višja je temperatura** (pri kritični temperaturi je celo nič, gl. str. 219, saj tedaj prosta gladina izgine). Odvisna je tudi od raznih primesi in nečistoč na gladini. Raztopina kuhinjske soli poveča površinsko napetost vode, detergent (ter druge površinske snovi) pa jo zmanjša. Seveda je površinska napetost odvisna tudi od snovi na drugi strani gladine (v splošnem je tem večja, čim bolj se gostoti snovi na obeh straneh gladine razlikujeta). Tako je površinska napetost vode (na meji z zrakom) pri običajnih temperaturah okrog 0,073 N/m, benzena pa 0,029 N/m, na meji voda-benzen pa znaša 0,034 N/m. Za pranje ali umivanje potrebujemo vodo s čim manjšo površinsko napetostjo (gl. str. 152), zato vodo segrejemo in ji dodamo detergent (nikakor pa je ne smemo soliti, npr. uporabiti morsko vodo).

Površinska sila v prosti gladini je vzrok, da je **tlak na notranji strani zakrivljene gladine večji od tlaka na zunanji strani**. Razlika tlakov (Δp) je večja, če je površinska napetost gladine večja in če je gladina bolj zakrivljena (manjši polmer zakrivljenosti).

Recimo, da napihnemo ravno prosto gladino s povečanim tlakom Δp v valjasto ploskev s krivinskim polmerom R in dolžino c (slika 7.4, os valjaste ploskve je pravokotna na list). Zaradi ukrivljenosti mejne ploskve se pojavi rezultanta površinskih sil F, ki nasprotuje povečanemu tlaku in skuša površino gladine zmanjšati. Ravnovesje sil za odsek valjaste ploskve s širino $2r$, kjer je $r = R\cos\theta$, dá enačbo:

$$\sigma \cdot 2c \cdot \cos\theta = (p + \Delta p - p) \cdot 2rc \quad \text{ali}$$
$$\Delta p = \sigma \cdot \cos\theta / r = \sigma / R \tag{7.3}$$

Podobno povečanje tlaka je v zvezi z ukrivljenostjo gladine v ravnini, pravokotno na prvo. Skupno povečanje tlaka na notranji strani poljubno zakrivljene gladine zato znaša:

$$\boxed{\Delta p = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)} \tag{7.4}$$

kjer sta R_1 in R_2 glavna krivinska polmera, merjena v dveh pravokotnih prerezih ploskve (slika 7.5). Posebej za kroglasto ploskev velja ($R_1 = R_2 = R$):

$$\Delta p = 2\sigma/R \tag{7.5}$$

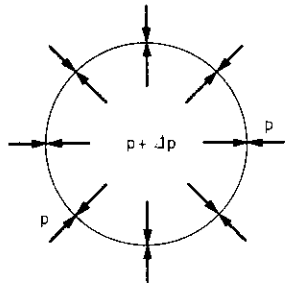
Do tega rezultata lahko pridemo tudi po drugačni poti. Mislimo si kroglasto ploskev s polmerom R (slika 7.6). Na notranji strani ploskve je tlak $p + \Delta p$, na zunanji pa p, tako da na gladino učinkuje celotna sila $F = \Delta p \cdot 4\pi R^2$ v smeri radialno navzven.

Če se krogla nekoliko napihne (njen polmer se poveča za dR), se njena površina poveča za $dS = d(4\pi R^2) = 8\pi R dR$. Za to povečanje je potrebno delo $dA = \sigma dS = 8\sigma\pi R dR$, ki ga opravi sila F na poti dR:

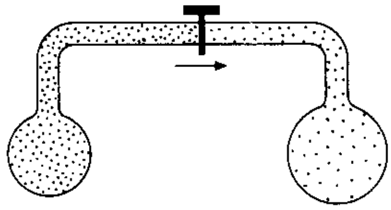
$$dA = FdR = \Delta p \cdot 4\pi R^2 dR = 8\,\sigma\pi R dR \quad \text{ali}$$
$$\Delta p = 2\sigma/R$$

kar že poznamo.

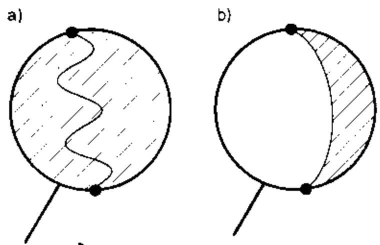
Za milni mehurček (tanka opna z dvema prostima gladinama s praktično enakima polmeroma) velja, da je tlak na notranji strani večji od zunanjega tlaka za $4\sigma/R$. Recimo, da sta različno velika mehurčka povezana s cevko (slika 7.7). V manjšem mehurčku je zračni tlak večji kot v večjem. Ko odpremo ventil v vezni cevki, začne zrak iz manjšega mehurčka iztekati skozi vezno cevko v večji mehurček (poganja ga razlika tlakov), zaradi česar se manjši mehurček zmanjšuje, večji pa povečuje.



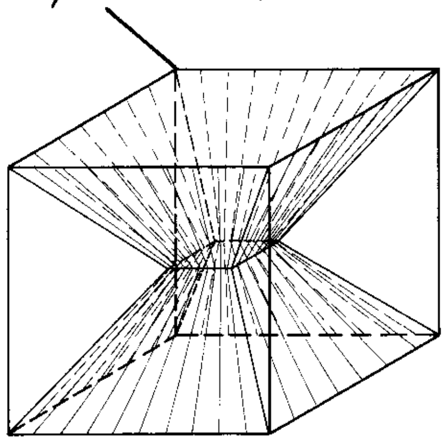
Slika 7.6



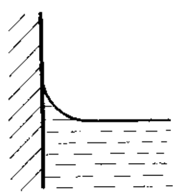
Slika 7.7



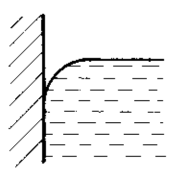
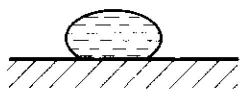
Slika 7.8



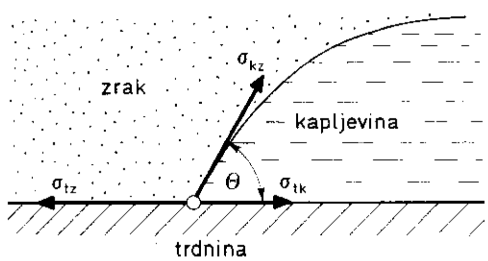
Slika 7.9




Slika 7.10

Slika 7.11



Slika 7.12

Površinska energija in močenje

Delo $A = \sigma \Delta S$, potrebno za povečanje površine proste gladine, poveča **površinsko energijo** (W_s) kapljevine:

$$\boxed{A = \Delta W_s = \sigma \Delta S} \tag{7.6}$$

Sprememba površinske energije je premo sorazmerna s spremembo površine gladine (ob predpostavki, da je površinska napetost stalna).

Stabilno ravnovesno stanje je povezano z **minimumom potencialne energije** (gl. str. 98). Kadar je pomembna edinole površinska potencialna energija, je stabilno stanje tisto, pri katerem je površina gladine najmanjša, kolikor je možno glede na dane robne pogoje (npr. glede na obliko in velikost okvira, na katerega je gladina vpeta). Zaradi tega se kapljevina z majhno maso (dovolj majhno, da lahko težnostno potencialno energijo zanemarimo v primerjavi s površinsko) oblikuje v kroglaste kaplje, saj ima krogla od vseh oblik teles najmanjšo površino pri dani prostornini. Večje kaplje niso več kroglaste; nekoliko se sploščijo v vodoravni smeri, da se njihovo težišče zniža. Pri tem se sicer površinska energija nekoliko poveča, vendar se težnostna zmanjša. Kaplja zavzame takšno obliko, da je vsota težnostne in površinske energije najmanjša.

Primer:

Koliko dela je potrebno, da razdelimo liter vode na kapljice s polmerom r = 1 mm? Površinska napetost vode je σ = 0,07 N/m.

N = število kapljic = $dm^3 \cdot 3/4\pi R^3 = 2{,}4.10^5$
$S = N \cdot 4\pi R^2 = 3\ \mathrm{dm^3/mm} = 300\ \mathrm{dm^2} = 3\ \mathrm{m^2}$

(Prvotno površino proste gladine litra vode zanemarimo)

$A = \sigma\Delta S = 0{,}07\ \mathrm{Nm^{-1}} \cdot 3\ \mathrm{m^2} = 0{,}21\ \mathrm{J}$

Pri pranju ali umivanju želimo, da voda prodre v najmanjše pore in tam raztopi umazanijo, zato mora biti njena površinska napetost čim manjša.

Razbijanje snovi na drobne kapljice je posebno težavno, če je površinska napetost velika, npr. pri živem srebru ($\sigma \approx 4{,}8$ N/m).

Površinski pojavi

Okroglo žično zanko potopimo v milnico, da nastane na njej milnična opna. Diametralno prek zanke je nameščena nitka, ki ohlapno leži v opni (slika 7.8a). Če z iglo prebodemo opno na eni strani nitke, da opna izgine, se opna na drugi strani nitke skrči tako, da se nitka napne v krožni lok (slika 7.8b). Opna se oblikuje v lunin krajec, ki ima pri dani zanki in dani dolžini nitke najmanjšo možno površino.

Žičnat okvir, ki sestavlja robove kocke, dvignimo iz milnice. Pričakovali bi, da bo milnična opna na vseh šestih mejnih ploskvah kocke. Namesto tega pa se opna razprede med okvir približno tako, kot je skicirano na sliki (7.9). Takšna razporeditev ploskev dá od vseh drugih možnosti najmanjšo možno površino. Tako lahko s pomočjo površinske napetosti raziskujemo, pri katerih oblikah ploskev dobimo najmanjšo površino.

Znano je, kakšno onesnaženje povzroči nafta, če se razlije po morski gladini. Razleze se po površini več km^2, tako da se stanjša celo do molekularnega sloja. Nafta ima manjšo površinsko napetost kot voda, zato se del vodne gladine z nafto širi na račun čiste vodne gladine (ki ima večjo površinsko napetost), saj se s tem manjša površinska energija celotne morske gladine. Mejna črta, ki ločuje vodni gladini z različnima površinskima napetostima (razlika je npr. zaradi različnih raztopljenih soli), se pomika tako, da se gladina z manjšo površinsko napetostjo povečuje na račun manjšanja gladine z večjo površinsko napetostjo.

Močenje

Voda, ki jo kanemo na čisto stekleno ploskev, se razleze in razmaže v tanek sloj. Ob steni čistega (nemastnega) kozarca se gladina vode zakrivi navzgor in voda »spleza« navzgor po steni (slika 7.10). Pravimo, da voda **moči** čisto stekleno ploskev. Drugače je, če je steklo mastno. Voda se ne razlije, ampak se napravijo kapljice. Ob mastni steni kozarca se gladina vode zakrivi navzdol (slika 7.11). Voda **ne moči** mastnega stekla. Po dežju se na dobro namaščeni lakirani strehi avtomobila naberejo drobne dežne kaplje, ki so znak, da je lakirana ploskev kvalitetna. Tudi živo srebro ne moči stekla.

Močenje ali nemočenje je v zvezi s površinsko napetostjo mejnih ploskev med različnimi snovmi – med kapljevino, trdnino in zrakom. Kakor se površinska napetost pojavlja na gladini, ki ločuje kapljevino od zraka, se pojavlja tudi na mejni ploskvi med kapljevino in trdnino ter med trdnino in zrakom. **Gladina kapljevine se ob stiku s trdnino in zrakom oblikuje tako, da je celotna površinska energija najmanjša.**

Ko se kapljevina na vodoravni ploskvi trdnine umiri, oklepa tangenta na gladino kapljevine ob stiku s trdnino kót θ, t. i. **kot močenja** (slika 7.12). Ta kót je odvisen od površinskih napetosti σ_{kz} (med kapljevino in zrakom), σ_{kt} (med kapljevino in trdnino) ter σ_{tz} (med trdnino in zrakom). Ker se rob kapljevine ne pomika v vodoravni smeri po ploskvi trdnine, je vsota vseh površinskih sil, ki učinkujejo nanj, enaka nič, zato velja:

$$\sigma_{tz} = \sigma_{tk} + \sigma_{kz}\cos\theta \quad \text{ali}$$
$$\cos\theta = (\sigma_{tz} - \sigma_{tk})/\sigma_{kz} \qquad (7.7)$$

Kapljevina moči trdnino, če je $\theta < 90°$ oz. $\cos\theta > 0$ (slika 7.12), kar se zgodi, če je $\sigma_{tz} > \sigma_{tk}$. Nasprotno, za $\sigma_{tz} < \sigma_{tk}$ *je* $\cos\theta < 0$, $\theta > 90°$, in kapljevina ne moči trdnine (slika 7.13). Mejna primera: $\theta = 0$ (kapljevina absolutno moči – razleze se v tanko plast) in $\theta = 180°$ (kapljevina absolutno ne moči – med kapljevino in trdnino se vrine zrak, kapljevina se dotika trdnine le v eni točki, celotna površinska energija je tako najmanjša). (Slika 7.14)

Britvica plava na vodni gladini, če je namaščena, da je voda ne moči. Poglejmo, kako se spreminja z višino (z) potencialna energija W_p sistema voda-britvica (to je vsota težnostne energije britvice W_t in površinske energije W_s britvice-vode). Preden se britvica dotakne vodne gladine (za $z > z_0$, slika 7.15), je površinska energija sistema britvica-zrak-voda manjša, kot je kasneje ($z < z_0$), ko je britvica že v vodi in ni več zraka med njo in vodo. Celotna potencialna energija $W_p = W_t + W_s$ se med padanjem brtivice do gladine enakomerno zmanjšuje. Ko britvica pri $z \approx z_0$ predre gladino, se W_p nekoliko poveča (ker se poveča W_s), nakar se zopet monotono manjša (ko britvica pada v vodi). Vidimo, da ima potencialna energija W_p tik nad vodno gladino minimum, zato je britvica na vodni gladini v stabilnem ravnovesju. Če jo želimo potopiti, moramo opraviti delo.

Kapilarni pojavi

Tanko cevko (kapilaro) nekoliko potopimo v kapljevino, da del cevke moli ven. Opazimo, da se gladina kapljevine v cevki zakrivi ob steni navzgor in obenem dvigne, če kapljevina moči notranjo steno cevke (slika 7.16). Če pa kaljevina ne moči cevke, se njena gladina v cevki zakrivi navzdol in spusti (slika 7.17). Ta pojav (**kapilarni dvig** ali **spust**) je izrazit v tankih kapilarah in če je površinska napetost kapljevine velika (npr. pri kapilarah z živim srebrom). Zakrivljena gladina v kapilari se imenuje meniskus.

Vzemimo kapilaro s polmerom r in jo navpično potopimo v kapljevino. Kapljevina moči kapilaro, kót močenja je θ. Gladina kapljevine se v kapilari dvigne za h nad okolišno gladino in ima kroglasto obliko s polmerom $R = r/\cos\theta$ (slika 7.16). Tik nad meniskusom je tlak enak zunanjemu zračnemu tlaku p_0, tik pod njegovo gladino je tlak $p_0 - 2\sigma/R$ (gl. 7.5). Na dnu dvignjenega stolpca kapljevine je tlak za ϱgh večji kot na vrhu (gl. str. 154) in torej znaša $p_0 - 2\sigma/R + \varrho gh$. Ta tlak mora biti enak zunanjemu zračnemu tlaku p_0, ki na enaki višini pritiska na ravno gladino okolišne kapljevine. Sledi:

$$p_0 - 2\sigma/R + \varrho gh = p_0 \quad \text{ali}$$

$$\boxed{h = 2\sigma/\varrho gR = 2\sigma\cos\theta/\varrho gr} \qquad (7.8)$$

Pri močečih kapljevinah je $\cos\theta > 0$ in zato tudi $h > 0$: kapljevina v kapilari se dvigne. Nasprotno: kapljevina se v kapilari spusti ($h < 0$), če ne moči sten kapilare ($\cos\theta < 0$), npr. živo srebro v stekleni cevki (slika 7.17).

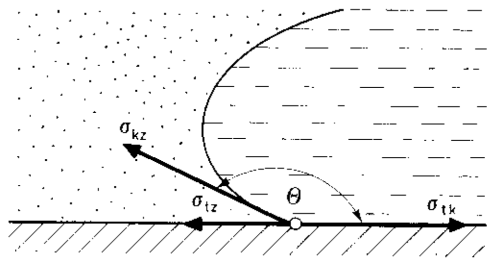
Do rezultata (7.8) za kapilarni dvig ali spust lahko pridemo tudi s pomočjo izreka o minimumu potencialne energije v stabilni ravnovesni legi. K potencialni energiji prištevamo težnostno energijo dvignjenega stolpca kopljevine in površinsko energijo med steno kapilare in kapljevino ter med steno in zrakom. Če se gladina kapljevine v kapilari dvigne za dh, se skupna površina kapilare in kapljevine poveča za $2\pi r dh$, skupna površina stene in zraka pa se za ravno toliko zmanjša. Površinska energija se torej poveča za $dW_s = 2\pi r dh(\sigma_{tk} - \sigma_{tz}) = - 2\pi r dh \sigma_{kz} \cos\theta$, kjer je σ_{kz} površinska napetost kapljevine ob stiku z zrakom, ki jo običajno označimo kar s σ. Celotna potencialna energija se pri tem spremeni za:

$$dW_p = dW_t + dW_s = \pi r^2 dh \varrho gh - 2\pi r\sigma\cos\theta dh$$

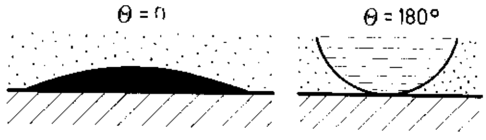
Potencialna energija ima pri višini h minimum, če velja $dW_p/dh = 0$ (gl. str. 98). Sledi:

$$\pi r^2 \varrho gh - 2\pi r\sigma\cos\theta = 0 \quad \text{ali} \quad h = 2\sigma\cos\theta/\varrho gr$$

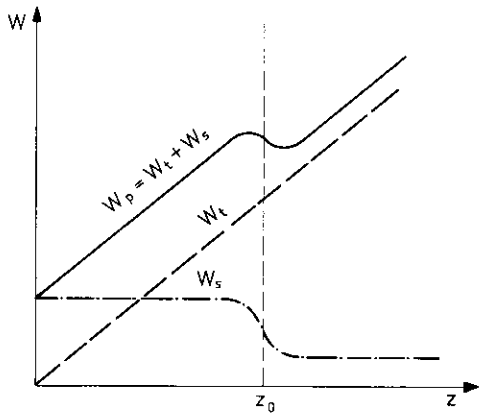
kar smo morali dokazati.



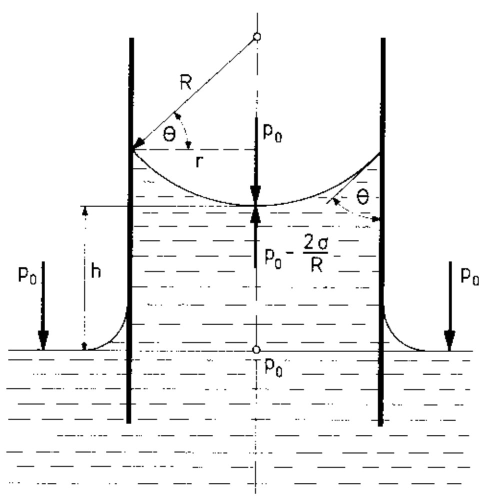
Slika 7.13



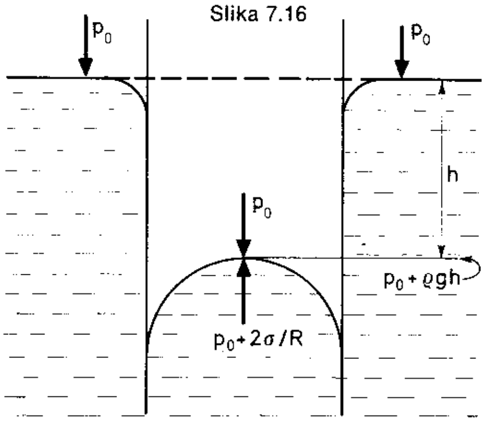
Slika 7.14



Slika 7.15



Slika 7.16



Slika 7.17

Primera:

1. Za koliko se spusti gladina živega srebra v tenki kapilari s polmerom $r = 1$ mm pod zunanjo gladino, če živo srebro ne moči notranje stene kapilare? Gostota živega srebra je $\varrho = 13{,}6$ g/cm^3, površinska napetost je $\sigma = 4{,}9$ N/m.

$$h = 2\sigma\cos\theta/\varrho gr = -0{,}072 \text{ m} = -7{,}2 \text{ cm}$$

2. En krak cevke U je kapilara s polmerom $r_1 = 1$ mm, drugi krak pa ima polmer $r_2 = 2$ mm. Za koliko se razlikujeta gladini vode v krakih, če je kót močenja $\theta = 30°$? Površinska napetost vode je 0,072 N/m.

Če ne bi bilo kapilarnega dviga, bi bili gladini vode v obeh krakih enako visoko (kljub različni debelini krakov). Zaradi površinske napetosti pa je gladina vode v ožjem kraku za Δh nad gladino vode v širšem kraku. Za tlake v vodi lahko napišemo enačbo (gl. sliko 7.18):

$$p_0 - 2\sigma/R_1 + \varrho g\Delta h = p_1 = p_0 - 2\sigma/R_2 \quad \text{ali}$$
$$\Delta h = (2\sigma/\varrho g)(1/R_1 - 1/R_2) = (2\sigma\cos\theta/\varrho g)(1/r_1 - 1/r_2)$$
$$\Delta h = 0{,}013 \text{ m} = 1{,}3 \text{ cm}$$

Kapilarni dvig oziroma spust je tem večji, čim tanjša je kapilara, čim lažja je kapljevina ter čim večja je površinska napetost med zrakom in kapljevino. Ta pojav je npr. pomemben pri rastlinah, saj se rastlinski sokovi in voda pretakajo po kapilarnih žilah tudi s kapilarnim dvigom. Pri stavbah s slabo hidro izolacijo proti tlom se vlaga iz zemlje dviga po kapilarnih porah v betonu. Na zunanjem ometu opazimo srage, ki kažejo, do katere višine se voda vzpne. (Kako je ta dvig odvisen od slanosti vode?) Neprekopana (zbita) ilovnata zemlja je prepredena s tankimi kapilarami. Po njih se dviga vlaga iz notranjosti in izhlapeva. S prekopavanjem raztrgamo kapilare in s tem preprečimo izgubo vlage zaradi kapilarnega dviganja in izhlapevanja. V vročih krajih shranjujejo hladno tekočino v lončenih poroznih posodah. Tekočina deloma prehaja skozi kapilare v steni in z izhlapevanjem ohlaja posodo ter tekočino v njej.

Tlak v mirujoči tekočini

Za mirujočo tekočino je značilno **izotropno napetostno stanje:** v vsaki točki tekočine je tlak neodvisen od smeri, v vsaki smeri učinkuje enako močno, tako da ga lahko obravnavamo kot skalar. Tlak zunanje sile, ki pritiska na mejno ploskev tekočine, se prenese skozi celotno tekočino, učinkuje na vsakem mestu tekočine in v vse smeri enako. Izotropna napetost pomeni (gl. str. 137), da so glavne (tlačne) napetosti enake ($\sigma_1 = \sigma_2 = = \sigma_3$), **strižna napetost** pa **je nič** ($\tau = 0$). Ne glede na to, kako je **ploskev** v tekočini usmerjena, **pritiska mirujoča tekočina vedno pravokotno** nanjo. Ravno tako pritiska pravokotno na vse mejne ploskve posode. Ker v mirujoči tekočini ni strižne napetosti, lahko tekočina vedno zavzame obliko posode.

Težni (hidrostatični) tlak

Iz srednje šole se spominjamo, da **se tlak zaradi teže tekočine povečuje z globino**. V homogeni (nestisljivi) tekočini se povečuje linearno z globino. Če je npr. tlak na gladini p_0 (zračni tlak), je tlak v globini h pod gladino enak:

$$\boxed{p = p_0 + \varrho gh} \quad \text{(Slika 7.19)} \qquad (7.9)$$

ker je ϱ gostota tekočine, g pa težni pospešek. Če se v homogeni tekočini pomikamo **v vodoravni smeri, se težni tlak ne spreminja.**

Da dokažemo zgornjo enačbo, si mislimo v mirujoči tekočini tenko vodoravno plast tekočine z debelino dz in osnovno ploskvijo dS (slika 7.20). Plast je na višini z nad dnom. Nanjo z vseh strani učinkujejo sile zaradi pritiska okolne tekočine ter njena lastna teža ($g\mathrm{d}m = \varrho g\mathrm{d}S\mathrm{d}z$). Ker tekočina miruje, je rezultanta vseh teh sil nič. Najprej ugotovimo, da so sile, ki pritiskajo v vodoravni smeri na stranske ploskve plasti, med seboj enake (tlak je torej enak v vodoravni smeri). Za navpične sile pa velja:

$$p\mathrm{d}S = (p + \mathrm{d}p)\mathrm{d}S + g\mathrm{d}m$$

pri čemer je dp razlika težnega tlaka med zgornjo in spodnjo ploskvijo plasti, to je sprememba tlaka ob spremembi višinske koordinate za dz. Sledi:

$$\boxed{\mathrm{d}p = -\varrho g\mathrm{d}z} \qquad (7.10)$$

Če se v tekočini dvignemo za dz, se težni tlak zmanjša za ϱgdz.

Če se gostota tekočine ne spreminja z višino, lahko zgornjo enačbo takoj integriramo, npr. od $z = 0$ (kjer je tlak p) do $z = h$ (kjer je tlak p_0), in dobimo že omenjeno enačbo (7.9).

Stolpec tekočine z višino h in gostoto ϱ povzroča tlak ϱgh, kar pomeni, da je tlak na dnu tega stolpca za ϱgh večji od tlaka na vrhu:

$$\Delta p = p - p_0 = \varrho gh$$

Primeri:

1. Stara enota tlaka 1 **torr** ali 1 mmHg ustreza tlaku 1 mm visokega stolpca živega srebra, ki ima gostoto 13,6 g/cm^3.

$\Delta p = \varrho gh = 13{,}6 \cdot 10^3\text{kgm}^{-3} \cdot 9{,}81\text{ms}^{-2} \cdot 10^{-3}\text{m} = 133 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ torr} = 133 \text{ Pa} = 0{,}133 \text{ kPa}$

Ko zdravnik pove srčni pritisk (zgornjo in spodnjo mejo), uporabi staro enoto tlaka, npr. 80/120 pomeni, da je spodnji tlak 80 torrov in zgornji 120 torrov. V novih enotah (kPa) mora torej reči 11/16.

Voda ima 13,6 krat manjšo gostoto kot živo srebro, zato je za enak tlak potrebna 13,6 krat večja višina. Za oceno zadošča, če vemo, da **10 m visok vodni stolpec povzroča tlak 1 bar**.

2. V cev U previdno natočimo vodo in olje, tako da se ne zmešata; v drugem kraku je npr. stolpec olja z višino h = 5 cm. Za koliko se razlikujeta gladina vode v enem kraku in olja v drugem? Gostota olja je ϱ = 0,8 g/cm^3. (Slika 7.21)

Na višini, kjer se v desnem kraku dotikata voda in olje, je tlak v obeh krakih enak npr. p_1. Tega izrazimo takole:

$$p_1 = p_0 + \varrho gh = p_0 + \varrho_0 g(h - \Delta h) \quad \text{ali}$$
$$\Delta h = (1 - \varrho/\varrho_0)h = 0{,}2\, h = 1 \text{ cm}$$

3. Posoda, napolnjena z vodo, je pokrita z obteženim pokrovom; površina pokrova je S = 4 dm^2, masa celotne uteži je m = 4 kg. Posoda je v zvezi z visoko navpično cevko, v katero natakamo vodo. Pri kateri višini vode nad ravnijo pokrova se pokrov dvigne in voda izlije iz posode? (Slika 7.22)

Ker zračni tlak p_0 pritiska tako na gladino vode v cevi kot na pokrov, ga ni treba upoštevati. Pokrov se dvigne, ko je težni tlak vodnega stolpca (ϱgh) enak tlaku teže uteži (mg/S):

$$\varrho gh = mg/S \quad \text{ali}$$
$$h = m/\varrho S = 10 \text{ cm}$$

4. V široko posodo z živim srebrom potopimo dolgo cevko in jo nagnemo za kót $\varphi = 60°$ glede na navpičnico. Iz cevke izsesamo zrak. Do katere višine se v nagnjeni cevki dvigne živo srebro, če je zračni tlak nad posodo enak $p_0 = 1$ bar? Površinsko napetost živega srebra zanemarimo. (Slika 7.23)

Zunanji zračni tlak p_0 nad posodo potisne živo srebro v cevki tako daleč, da je težni tlak dvignjenega stolpca živega srebra (ta je odvisen od višinske razlike $h = s \cdot \cos\varphi$) enak p_0:

$$p_0 = \varrho gh = \varrho gs\cos\varphi \quad \text{ali}$$
$$s = p_0/\varrho g\cos\varphi = 1{,}5 \text{ m}$$

5. Kako se težni tlak spreminja z globino v stisljivi tekočini? Stisljivost tekočine (χ) je stalna.

Ker se tlak z globino povečuje, se povečuje tudi gostota; povečanju tlaka za dp ustreza povečanje gostote za dϱ, kar sledi iz Hookovega zakona za tlak (gl. 6.20 z $V = m/\varrho$ in zato $\mathrm{d}V/V = -\mathrm{d}\varrho/\varrho$):

$$\chi \mathrm{d}p = -\mathrm{d}V/V = \mathrm{d}\varrho/\varrho$$

Najprej izračunamo, kako se z globino povečuje gostota tekočine. Pri spustu za dz se tlak poveča za $\mathrm{d}p = \varrho g\mathrm{d}z = \mathrm{d}\varrho/(\chi\varrho)$ ali

$$\mathrm{d}\varrho/\varrho^2 = \chi g\mathrm{d}z$$

Integriramo od $z = 0$, kjer je $\varrho = \varrho_0$ (na gladini vode), do globine z in dobimo, da se gostota povečuje z globino po enačbi:

$$\varrho = \varrho_0/(1 - \chi\varrho_0 gz)$$
$$\mathrm{d}p = \varrho g\mathrm{d}z = \varrho_0 g\mathrm{d}z/(1 - \chi\varrho_0 gz)$$

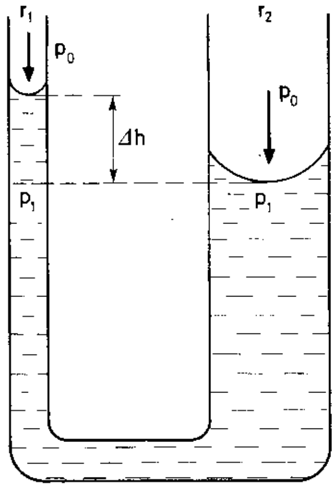
Zopet integriramo in dobimo končni rezultat:

$$p = p_0 - (1/\chi)\ln(1 - \chi\varrho_0 gz) = p_0 + (1/\chi)\ln(\varrho/\varrho_0)$$

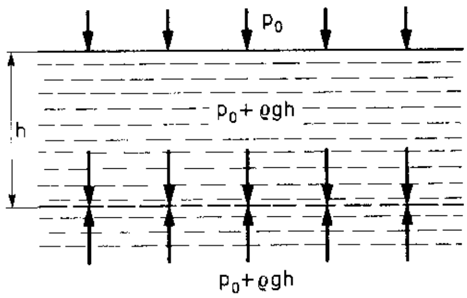
Za majhne globine, kjer še lahko zanemarimo stisljivost tekočine (to je za $\chi\varrho_0 gz \ll 1$), je $\ln(1 - \chi\varrho_0 gz) \approx -\chi\varrho_0 gz$ in zato $p = p_0 + \varrho_0 gz$, kar velja za nestisljive tekočine.

Zračni tlak

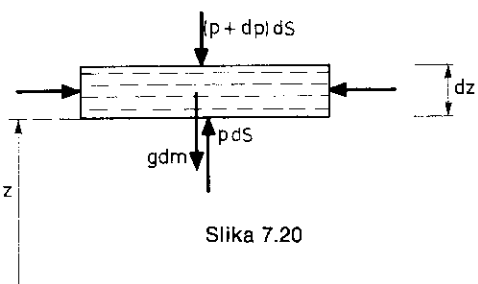
Zrak zaradi lastne teže pritiska na zemeljsko površje in na predmete, ki jih obliva. Zračni tlak je odvisen od težnega pospeška, od gostote zraka in od višine zračnih plasti nad mestom, kjer tlak merimo. Ker je odvisen od gostote zraka, se na danem mestu spreminja s temperaturo in vlažnostjo. Višja temperatura pomeni redkejši zrak in zato manjši tlak. S povečano vlažnostjo se gostota zraka zmanjša (ker se nekaj zračnih molekul nadomesti z lažjimi vodnimi molekulami) in s tem se zmanjša tudi zračni tlak (padec tlaka ob nespremenjeni



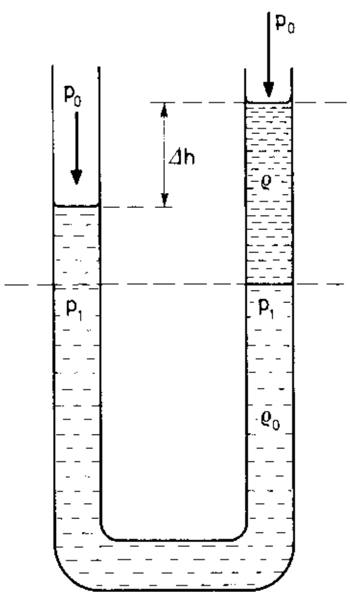
Slika 7.18



Slika 7.19



Slika 7.20



Slika 7.21

ali celo zmanjšani temperaturi lahko pomeni slabo vreme – povečano vlažnost).

Zračni tlak z višino pojema, največji je na dnu ozračja, to je na morski gladini, kjer pri normalnih pogojih (0 °C, gostota zraka 1,29 kg/m^3, g = 980,665 m/s^2) znaša:

$$p_0 = 1{,}013 \text{ bar}$$

Ta tlak so včasih uporabljali kot enoto – **fizikalno atmosfero** (atm); ekvivalenten je tlaku 760 mmHg.

Spreminjanje zračnega tlaka z višino je močno odvisno od geografskih in klimatskih razmer ter od letnega časa. Ako bi bil zrak v vsej višini enako gost kot ob morski gladini (ϱ_0 = 1,29 kg/m^3), bi zračni tlak pojemal z višino linearno in zračni plašč bi bil debel:

$$z_0 = p_0/\varrho_0 g = 8{,}0 \text{ km} \tag{7.11}$$

Celotnega ozračja je torej za 8 km debel plašč okrog Zemlje.

Seveda gostota zraka ni stalna, ampak se z višino zmanjšuje. Kako se zmanjšuje, je odvisno od temperature. Za **izotermno atmosfero (temperatura se ne spreminja z višino)** velja, da je **gostota premo sorazmerna s tlakom** (gl. str. 188). Tlak se torej spreminja z višino enako kot gostota. Za takšno atmosfero ugotovimo, da se **zračni tlak eksponentno zmanjšuje z višino**.

Zračni tlak na višini z nad morsko gladino označimo s p. Če se dvignemo za dz, se tlak spremeni za dp = – ϱgdz (gl. 7.10), kjer je ϱ gostota zraka na tej višini. Zaradi stalne temperature ozračja je količnik p/ϱ neodvisen od višine:

$$p/\varrho = konst. = p_0/\varrho_0 \quad \text{ali}$$
$$\varrho = \varrho_0 p/p_0$$

in dobimo:

$$dp = -(\varrho_0 g/p_0)p\,dz = -p\,dz/z_0 \qquad \text{(gl. 7.11)}$$
$$dp/p = -dz/z_0$$

Dobljeno enačbo integriramo, na levi strani od p_0 do $p(z)$, na desni od 0 do z:

$$\ln p(z) - \ln p_0 = -z/z_0 \quad \text{ali}$$

$$\boxed{p(z) = p_0 \exp(-z/z_0)} \quad \textbf{barometrska enačba} \tag{7.12}$$

Barometrska enačba predstavlja eksponentno zmanjševanje tlaka z višino v izotermni atmosferi. Z njeno pomočjo določimo višino z tako, da izmerimo zračni tlak $p(z)$ na tej višini (**višinomer**). Manometer kot višinomer kaže pravilno le, če se temperatura ne spreminja z višino. V resnici se spreminja, zato je treba višinomer pogosto naravnati na znano višino.

V mirnem hladnem ozračju s stalno temperaturo 0 °C je višinski gradient tlaka (to je sprememba tlaka na enoto višinske razlike) enak:

$$dp/dz = -\varrho g = -1{,}29 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9{,}81 \text{ ms}^{-2} = 13 \text{ Pa/m} =$$
$$= 1{,}3 \text{ mbar/10 m}$$

Če se v takem ozračju dvignemo za 10 m, se zračni tlak zmanjša za 1,3 mbar.

Na višini 3 km (nekaj nad vrhom Triglava) je zračni tlak okrog 0,7 bar, na višini 10 km pa 0,3 bar. Običajno vzamemo, da se zemeljsko ozračje razteza do okrog 100 km od zemeljskega površja; tam je tlak okrog tisočinka mbara (milijoninka tlaka na morski gladini).

Normalni življenjski pogoji zahtevajo zračni tlak 0,8–1,0 bar in gostoto zraka 1,2–1,3 kg/m^3. Ljudje pa stalno živijo tudi na višini 4 km (Tibet, Andi), kjer je zračni tlak okrog 0,6 bar. Moderna potniška letala letijo na višini 10–12 km pri zračnem tlaku 0,2 bar (v letalih vzdržujejo tlak 0,8 bar), nadzvočna reaktivna letala pa še višje, pri tlaku 0,1 bar.

Zračni tlak je na zemeljskem površju razmeroma velik, na vsak cm^2 pritiska s težo kilogramske uteži. Vendar nas ta tlak večinoma ne moti, kajti zrak pronica tudi v našo notranjost in tako pritiska z obeh strani. Drugače je, če se zunanji zračni tlak nadoma spremeni, npr. ob nenadni spremembi vremena, ob hitrem spustu ali dvigu letala, ob hitri vožnji navzdol po strmem klancu itd. Notranji zračni tlak se spreminja razmeroma počasi, zato nastane razlika tlakov, ki lahko človeku škodi.

Primer:

Votli kovinski polkrogli s premerom $2R$ = 41 cm (znani magdeburški polkrogli) staknemo in iz nastale krogle izsesamo zrak. Kolikšna sila je potrebna, da polkrogli razmaknemo? (Ko so poskus prvič napravili v nemškem mestu Magdeburg, so za to potrebovali 4 pare konj na vsaki strani).

Izračunati moramo rezultanto sil, s katerimi zunanji zrak pritiska pravokotno na polkroglo (slika 7.24). Zaradi simetrije je ta rezultanta (F_n) pravokotna na osnovno ploskev πR^2 polkrogle. Polkroglasto ploskev v mislih razdelimo na ozke, koaksialne trakove. Na en tak trak (s kotom θ) deluje sila dF = pdS = $p \cdot 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta$. Njena projekcija v smeri pravokotno na osnovno ploskev je:

dF_n = d$F \cdot \cos\theta = p \cdot \pi R^2 \sin(2\theta)d\theta$ (druge projekcije s simetrično ležečih mest se medsebojno izničijo). Celotna rezultanta znaša:

$$F_n = \int dF_n = \pi R^2 p \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)d\theta = \pi R^2 p \tag{7.13}$$

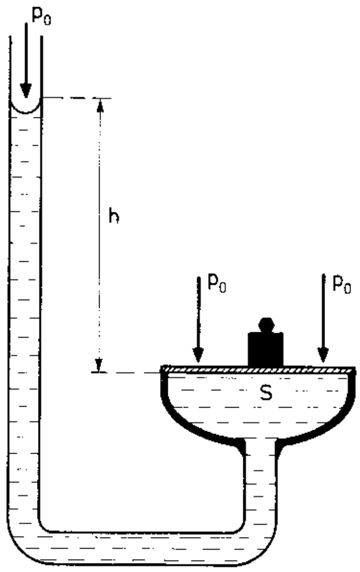
Rezultanta sil, s katerimi zrak pritiska na pokroglasto ploskev, je tolikšna, kot da bi zrak pritiskal neposredno na osnovno ploskev. Za magdeburški polkrogli dobimo:

$$F_n = \pi R^2 p = 13 \text{ kN}$$

Pritisk tekočine na stene

Znano je, da se kapljevina v veznih posodah umiri, tako da je gladina v vsaki (poljubno oblikovani) posodi enako visoko, če so posode zgoraj odprte in je zračni tlak nad gladino v vsaki posodi enak (slika 7.25). Na prvi pogled se to zdi čudno, saj je teža kapljevine v posodah različna in tudi spodnji preseki so različni.

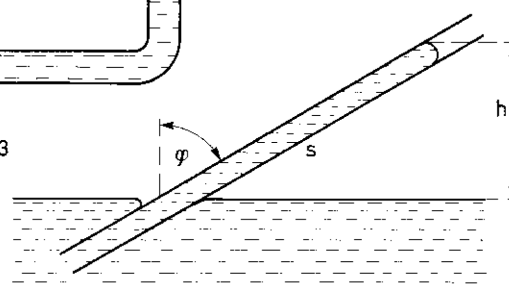
Element kapljevine v cevi, ki povezuje sosednji posodi, miruje, če z obeh strani pritiska nanj enak tlak, če je torej gladina v obeh posodah enako visoko (tlak je odvisen od višine). Pri mirujoči tekočini so zato gladine enako visoko.



Slika 7.22

Množina kapljevine v posodi pa je pomembna, če se vprašamo, s kolikšno celotno silo pritiska kapljevina na stene in dno posode. Kapljevina pritiska pravokotno na stene in njen težni tlak narašča linearno z globino, v vodoravni smeri pa je enak (slika 7.26). Po zakonu o medsebojnem učinkovanju teles (gl. str. 31) tudi posoda učinkuje na kapljevino z enako veliko silo kot kapljevina nanjo. Rezultanta (F) vseh pritiskov, s katerimi kapljevina pritiska na posodo, je torej enako velika (ima pa nasprotno smer) kot rezultanta sil, s katerimi posoda učinkuje na kapljevino.

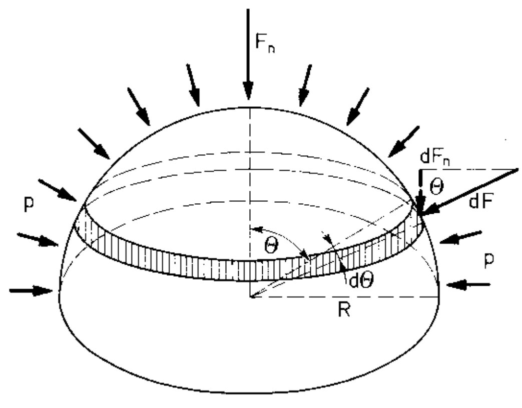
Na kapljevino potemtakem učinkujeta njena lastna teža ter rezultanta (F) pritiskov posode. Ker kapljevina v posodi miruje, sta ti sili nasprotno enaki. Sledi, da je $F = mg$ (teža kapljevine).



Slika 7.23

Rezultanta sil, s katerimi mirujoča kapljevina pritiska na stene in dno posode, je ne glede na obliko posode enaka teži kapljevine v posodi.

Poglejmo še, s kolikšno silo pritiska voda na del stene v posodi, npr. na pregrado jezu. Na sliki (7.27) je skiciran navpični prerez skozi pravokotno pregrado jezu (višina h, širina a). Zrak pritiska z vseh strani na jez, zato zračni tlak izpade iz računa in ga ne upoštevamo. Težni tlak vode narašča linearno z globino; na globini x pod gladino znaša $p = \varrho g x$. Ker se vodni tlak spreminja z globino, steno pregrade v mislih razdelimo na ozke vodoravne trakove. Na trak s površino $dS = a dx$ v globini x deluje sila $dF = p dS = a\varrho g\, x dx$. Celoten vodni pritisk na pregrado znaša:

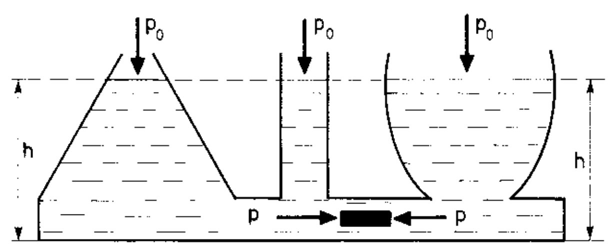


Slika 7.24

$$F = \int dF = a\varrho g \int_0^h x dx = a\varrho g h^2/2 \qquad (7.14)$$

Vodni pritisk skuša prevrniti pokončno pregrado okrog vodoravne osi skozi spodnje dotikališče 0. Navor sile dF glede na to os je:

$$dM = (h - x) dF = a\varrho g (h - x) x dx$$



Slika 7.25

Celoten navor pa:

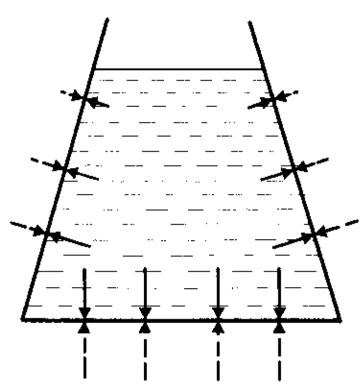
$$M = \int dM = a\varrho g \int_0^h (hx - x^2) dx = a\varrho g h^3/6 = F \cdot h/3 \quad (7.15)$$

Vidimo, da je celoten navor M tekočinskih pritiskov na navpično pravokotno pregrado glede na os skozi podporno točko tolikšen, kot da bi rezultanta F teh pritiskov prijemala na višini $h/3$ nad tlemi.

Primeri:

1. Zaprta posoda je do višine $h = 2$ m napolnjena z vodo. Nad gladino je v posodi stisnjen zrak s tlakom p = 2 bar. V vodoravnem dnu posode je odprtina s površino $S = 2\ \text{cm}^2$. S kolikšno silo moramo pritiskati na to odprtino od spodaj navzgor, da voda ne izteče? Zunanji zračni tlak je $p_0 = 1$ bar (slika 7.28).

$$(p + \varrho g h) S = F + p_0 S \quad \text{ali}$$
$$F = (p - p_0 + \varrho g h) S = 24\ \text{N}$$



Slika 7.26

Dodatno vprašanje: Recimo, da je nad gladino vode v posodi vakuum: $p = 0$.

2. V navpični steni velikega vodnega zbiralnika so na globini $h = 1{,}8$ m pod gladino vode polkrožna vratca (polmer $R = 40$ cm), ki se lahko vrtijo okrog zgornje vodoravne osi (slika 7.29). S kolikšno vodoravno silo G moramo pritiskati na spodnji konec vrat, da se ta zaradi vodnega pritiska ne odpro?

Računamo podobno kot v primeru na strani 157, le da vodoravni trakovi tu niso enako dolgi. Na globini x pod osjo vrat je tlak enak $p = \varrho g\,(h + x)$ in sila $dF = p dS = \varrho g\,(h + x) \cdot 2r dx$, kjer je $r = (R^2 - x^2)^{1/2}$. Navor dM te sile glede na zgornjo os je:

$$dM = x dF = 2\varrho g\,(h + x)\,(R^2 - x^2)^{1/2} x dx$$

Celoten navor M znaša:

$$M = \int dM = 2\varrho g \int_0^R (h + x)\,(R^2 - x^2)^{1/2} x dx$$

Integral najenostavneje rešimo s substitucijo $x = R\cos\varphi$. Dobimo:

$$M = \varrho g R^3 (2h/3 + \pi R/8)$$

Potisna sila G mora pritiskati na vrata najmanj z navorom $M = GR$. Sledi:

$$G = \varrho g R^2 (2h/3 + \pi R/8) = 540 \text{ N}$$

3. Na dnu jezera z globino $h = 20$ m stoji stožčast keson s polmerom $R = 1$ m in višino $v = 2$ m (slika 7.30). S kolikšno silo pritiska voda nanj?

Podoben primer smo imeli na strani 156, le da se zdaj tlak spreminja z globino. Voda pritiska pravokotno na plašč stožca. Tega v mislih razrežemo na ozke (koaksialne) trakove (slika 7.30b). Trak v globini x pod vrhom stožca ima površino $2\pi r dx/\sin\varphi$, kjer je $r = (R/v)x$, in voda pritiska nanj s silo $dF = p dS = \varrho g(h - v + x) \cdot 2\pi(R/v)x dx/\sin\varphi$. Upoštevamo le navpično komponento te sile:

$$dF_n = dF\cos\varphi = 2\pi\varrho g(R/v)^2\,(h - v + x)x dx$$

Rezultanta vseh vodnih pritiskov na plašč stožca potemtakem znaša (je usmerjena navzdol):

$$F_n = \int dF_n = 2\pi\varrho g(R/v)^2 \int_0^v (h - v + x)x dx = \pi R^2 \varrho g(h - v/3) = 610 \text{ kN}$$

Tudi tu dobimo (enako kot v primeru na strani 156), da je rezultanta tekočinskih pritiskov enako velika, kot če bi tekočina pritiskala navpično navzdol neposredno na osnovno ploskev πR^2, le da moramo (ker se tlak spreminja z globino) vzeti tlak z globine $h = v/3$, kjer je »prijemališče« te rezultante (gl. str. 157).

Vzgon in plavanje

Mirujoča tekočina pritiska na telo, ki je potopljeno v njej, z vseh strani pravokotno na njegovo površino; njen težni tlak narašča z globino. Rezultanta pritiskov tekočine na potopljeno telo se imenuje **vzgon** (F_{vzg}). Na vsako telo v tekočini (tudi v zraku) deluje poleg drugih sil še vzgon, ki predstavlja celotni pritisk obdajajoče tekočine.

Velikost vzgona enostavno ugotovimo s sklepanjem. Potopljeno telo (gostota ϱ, volumen V, oblika poljubna) v mislih nadomestimo s tekočino, ki jo je telo izpodrinilo (slika 7.31b). Pri tem se pritisk okolišne tekočine vzdolž mejne ploskve območja, kjer je bilo telo, ne spremeni. Na tekočino v tem območju potemtakem delujeta njena lastna teža ($\varrho_0 Vg$, ϱ_0 = gostota tekočine) in rezultanta pritiskov okolišne tekočine, to je vzgon F_{vzg}. Ker tekočina miruje, sta ti sili nasprotno enaki. Torej je **vzgon enak teži izpodrinjene tekočine** in **je usmerjen navzgor**. Ker se tekočina tudi ne vrti, pomeni, da **vzgon prijemlje v težišču izpodrinjene tekočine** (enako kot njena teža).

Na vsako telo v mirujoči tekočini učinkuje poleg njegove lastne teže ($mg = \varrho Vg$) še vzgon F_{vzg}, ki nasprotuje teži in je enako velik kot teža tekočine, ki jo je telo izpodrinilo (slika 7.31c). Ta rezultat velja ne glede na globino potopljenega telesa.

Zaradi vzgona je potopljeno telo navidezno lažje, to je pritiska navzdol z manjšo silo (za vzgon manjšo), kot če ni obdano s tekočino.

Primera:

1. Železno kocko najprej stehtamo na zraku (slika 7.32a), dobimo silo $F_1 = 8{,}6$ N, in nato v kapljevini (slika 7.32b), dobimo $F_2 = 7{,}3$ N. Kolikšna je gostota ϱ_0 te kapljevine? Gostota železa je $\varrho = 7{,}8$ g/cm^3.

Tehtanje na zraku dá težo kocke (vzgon v zraku zanemarimo): $F_1 = \varrho Vg$, kjer je V volumen kocke. S tehtanjem v kapljevini pa dobimo razliko med težo kocke in vzgonom:

$$F_2 = F_1 - F_{vzg} = F_1 - \varrho_0 Vg = F_1 - \varrho_0 F_1/\varrho \text{ ali}$$
$$\varrho_0 = \varrho(1 - F_2/F_1) = 1{,}2 \text{ g/cm}^3$$

Z dvakratnim tehtanjem telesa (v zraku in v vodi) lahko določimo tudi gostoto ali prostornino telesa.

2. Zlato zapestnico stehtamo na viseči vzmetni tehtnici. Če je zapestnica v zraku, dobimo silo $F_1 = 0{,}49$ N, če je v vodi, pa $F_2 = 0{,}44$ N. Koliko je v zapestnici zlata (m_1) in koliko bakra (m_2)? Gostota zlata je $\varrho_1 = 19{,}2$ g/cm^3, gostota bakra je $\varrho_2 = 8{,}9$ g/cm^3.

Računamo podobno kot pri primeru 1.

S prvim tehtanjem določimo maso zapestnice:

$$m = F_1/g = 50 \text{ g} = m_1 + m_2$$

Razlika sila $F_1 - F_2$ je enaka vzgonu, to je teži izpodrinjene vode:

$$F_1 - F_2 = \varrho_0 Vg \text{ ali}$$
$$V = (F_1 - F_2)/\varrho_0 g = 5{,}1 \text{ cm}^3 = V_1 + V_2 = m_1/\varrho_1 + m_2/\varrho_2.$$

Iz dobljenih enačb izračunamo: $m_1 = 8{,}6$ g zlata in $m_2 = 41{,}4$ g bakra.

Vzgon izračunati je enostavno, če tekočina obdaja telo z vseh strani, npr. če telo lebdi v tekočini ali plava na njeni gladini. Drugače je, če se telo ploskoma dotika stene ali dna posode, tako da ga tekočina obliva le z ene strani. Tedaj izračunamo rezultanto tekočinskih pritiskov z integriranjem (enako kot v primerih na strani 158) in poiščemo njeno navpično projekcijo, ki podaja vzgon.

Primera:

1. Polkroglasta votla posoda se ploskoma tišči navpične stene v velikem vodnem zbiralniku. Središče polkrogle je na globini h pod gladino, polmer je R. Kolikšen vzgon dviguje polkroglo? (Slika 7.33)

$$dF = pdS = \varrho_0 g(h + R\cos\theta) \cdot \pi R\sin\theta \cdot Rd\theta$$

$$dF_n = dF\cos\theta = \pi\varrho_0 gR^2(h + R\cos\theta)\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$F_n = \int dF_n = \pi\varrho_0 gR^2 \int_0^{\pi}(h + R\cos\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$F_n = (2\pi R^3/3)\varrho_0 g$ = *teža vode,* ki jo je polkrogla izrinila.

Torej je tudi tu vzgon (navpična projekcija tekočinskih pritiskov) enak teži izpodrinjene tekočine (neodvisno od globine telesa).

Za vajo izračunaj še vodoravno projekcijo rezultante.

2. V primeru 3 na strani 158 smo izračunali rezultanto sil, s katerimi voda pritiska na stožčast keson, ki stoji na dnu jezera. Dobili smo, da voda pritiska navzdol s silo $F_n = \pi R^2\varrho g(h - v/3)$. Stožec nekoliko privzdignimo. Voda se zrine pod njegovo osnovno ploskev in ga zato potiska navzgor z dodatno silo $\pi R^2\varrho gh$. Voda potemtakem pritiska na privzdignjen stožec (ki ga obliva z vseh strani) z rezultanto:

$$\pi R^2\varrho gh - \pi R^2\varrho g(h - v/3) = \pi R^2\varrho gv/3 = \varrho gV$$

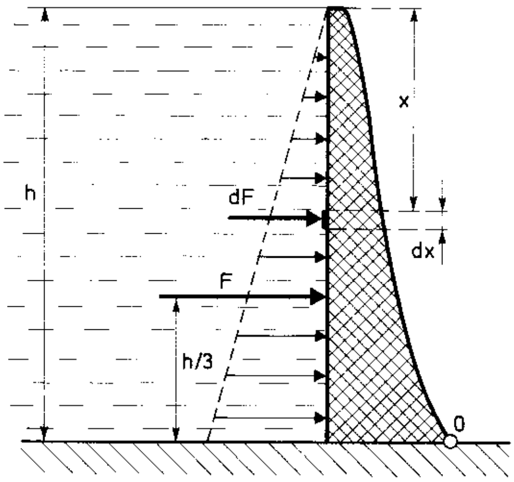
v smeri navzgor, kar je ravno vzgon (teža od stožca izpodrinjene vode).

Plavanje

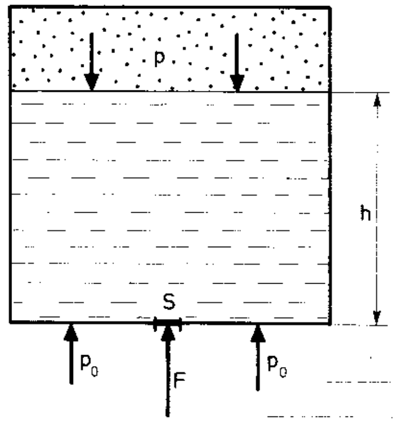
Kako se telo giblje v mirujoči tekočini (pada, lebdi ali se dviguje), je odvisno predvsem od razmerja njegove gostote (ϱ) do gostote (ϱ_0) okolišne tekočine. Če je telo nehomogeno (recimo – votlo), je merodajna njegova povprečna gostota: m/V, pri čemer je m celotna masa, V pa celotna prostornina telesa, to je prostornina izpodrinjene tekočine. Za telo, ki je v celoti potopljeno v mirujoči tekočini, velja tole:

$\varrho > \varrho_0$	telo pada (pospešeno ali enakomerno), teža telesa večja od vzgona
$\varrho = \varrho_0$	telo lebdi (je v mehanskem ravnovesju), teža telesa je enaka vzgonu
$\varrho < \varrho_0$	telo se dviguje (pospešeno ali enakomerno), teža telesa manjša od vzgona

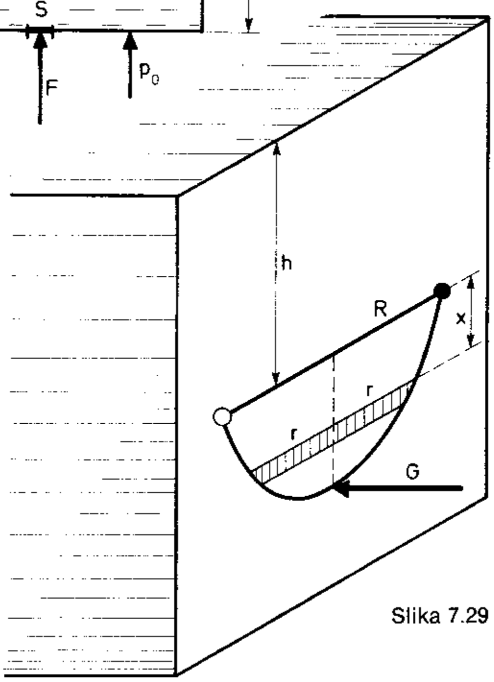
Telo, ki je specifično težje od obdajajoče ga tekočine ($\varrho > \varrho_0$), najprej pospešeno pada, njegova hitrost narašča. Zaradi gibanja se v tekočini pojavijo dodatne sile, npr. viskozni upor, ki nasprotujejo gibanju in naraščajo s hitrostjo. Zato telo pada vedno manj



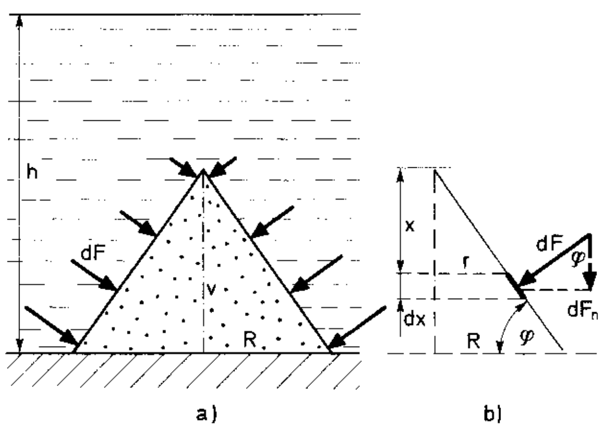
Slika 7.27



Slika 7.28



Slika 7.29



Slika 7.30

pospešeno, dokler se sile ne izenačijo, nakar pada naprej enakomerno. Vsaka tekočina (tudi voda) je bolj ali manj stisljiva, njena gostota narašča z globino (ker narašča težni tlak). Zato padajoče telo v globokem morju lahko doseže globino, na kateri se njegova teža izenači z vzgonom. Na tej globini nato lebdi.

Telo, specifično lažje od tekočine ($\varrho < \varrho_0$), se v tekočini pospešeno dviguje, ker je vzgon večji od njegove teže. Ko doseže gladino in pomoli iz tekočine, se vzgon zmanjša. Ko postane manjši od teže telesa, se telo dviga pojemalno, doseže največjo višino, pade nazaj v tekočino itd. Telo nekaj časa niha gor in dol na gladini, nakar se umiri. Mirujoče **telo plava na gladini**, pri čemer je **potopljen tolikšen del telesa, da je teža telesa enaka vzgonu** (zaradi izpodrinjene tekočine).

Recimo, da je od celotne prostornine V plavajočega telesa potopljena prostornina V_1. Velja:

$$V\varrho g = V_1\varrho_0 g \text{ ali}$$
$$V_1/V = \varrho/\varrho_0 \qquad (7.16)$$

Primer za plavajočo ledeno goro v morju: $V_1/V = 0{,}92/1{,}03 = 0{,}89$. Le 11% prostornine ledene gore moli iznad morske gladine. Plavajoče telo se potopi v kapljevino tem bolj, čim večja je njegova gostota v primerjavi z gostoto kapljevine. Zato je ugrez ladij v sladkih vodah (npr. na reki) večji kot na morju.

Primeri:

1. Splav je sestavljen iz $n = 10$ lesenih debel z dolžino $b = 10$ m in premerom $d = 30$ cm. Največ s kolikšnim tovorom (m) lahko obremenimo splav? Gostota lesa je $\varrho = 0{,}8$ g/cm^3.

Tovor mora biti lažji od tovora, pri katerem se splav ravno potopi. V tem skrajnem primeru je vzgon enak: $F_{vzg} = n(\pi d^2/4)\varrho_0 g$ = *teža splava + teža tovora* (mg). Sledi:

$$m = nb(\pi d^2/4)\,(\varrho_0 - \varrho) = 1400 \text{ kg}$$

2. Lesena palica (dolžina $b = 4$ m, gostota $\varrho = 0{,}8$ g/cm^3) je na enem koncu vrtljivo pritrjena ob pomol, ki je $h = 1$ m nad gladino vode; drugi konec palice je v vodi (slika 7.34). Kolikšen kót oklepa plavajoča palica z navpičnim zidom pomola? Ali je vzgon enak teži palice?

Potopljen je del palice z dolžino x, tako da je navor vzgona enak navoru teže palice. Dobimo enačbo:

$$x\varrho_0\,(b - x/2) = \varrho b \cdot b/2 \text{ (vzgon prijemlje v težišču potopljenega dela palice)}$$

ki je kvadratna enačba za neznanko x. Izberemo rešitev:

$$x = b(1 - \sqrt{1 - \varrho/\varrho_0}\,)$$
$$\cos\varphi = h/(b - x) = (h/b)\,(1 - \varrho/\varrho_0)^{-1/2} = 0{,}56$$
$$\varphi = 56°$$

Palica ni prosta, poleg njene teže in vzgona učinkuje nanjo še reakcijska sila R v vrtišču; rezultanta vseh teh sil je nič.

3. Votla železna krogla s tanko steno (polmer $R = 40$ cm) plava na gladini vode, tako da je njen vrh na višini $h = 55$ cm nad gladino. Kolikšna je debelina (b) stene? Gostota železa $\varrho = 7{,}8$ g/cm^3.

Potopljen je krogelni odsek s prostornino $V_1 = (2\pi R^2/3)(2R - h)$. Teža krogle je enaka vzgonu: $4\pi R^2 b\varrho g = V_1\varrho_0 g$ ter

$$b = \varrho_0(2R - h)/6\varrho = 5{,}3 \text{ mm}$$

4. Ploščat železen kvader z višino $h = 5$ cm ploskoma leži na gladini živega srebra, nad katero je voda. Koliki del kvadra je v živem srebru? Površinsko napetost zanemarimo. Gostota živega srebra je $\varrho_1 = 13{,}6$ g/cm^3, železa pa $\varrho = 7{,}8$ g/cm^3.

Teža plavajočega kvadra (ki je potopljen tudi v vodi) je enako velika kot vsota vzgonov v živem srebru in vodi. Dobimo enačbo:

$$\varrho h = \varrho_1 x + \varrho_0(h - x) \text{ ali}$$
$$x = h(\varrho - \varrho_0)/(\varrho_1 - \varrho_0) = 2{,}7 \text{ cm}$$

Kvader se v živem srebru potopi za 2,7 cm.

5. Lesena palica z enakomernim prerezom S je spodaj obtežena s svincem (skupna masa je m) in plava v pokončni legi na vodi. Če palico nekoliko potopimo in nato spustimo, začne nihati gor in dol okrog prvotne ravnovesne lege. Kolikšna je lastna frekvenca tega nihanja, če zanemarimo upor in površinsko napetost?

V ravnovesni legi je teža palice enaka vzgonu. Če palico potopimo za x, se vzgon poveča za $\varrho_0 gSx$, tako da na palico učinkuje rezultanta $\varrho_0 gSx$ v smeri navzgor in vsiljuje sproščeni palici pospešek a:

$$ma = -\varrho_0 gSx \text{ ali}$$
$$a = -(\varrho_0 gS/m)x = -\omega^2 x \qquad \text{(gl. 1.33)}$$
$$\omega = \sqrt{\varrho_0 gS/m}$$

Stabilnost plavanja. Plavajoče telo je v mehanskem ravnovesju, če je vsota vseh sil, ki učinkujejo nanj (to je rezultanta teže in vzgona), enaka nič in če je rezultanta navorov teh sil nič. To pomeni, da morata vektorja teže in vzgona ležati na isti navpičnici. Kako je plavanje stabilno, ugotovimo, če plavajoče telo nekoliko nagnemo iz ravnovesne lege in nato spustimo. Če se telo vrne k prvotni ravnovesni legi, je plavanje stabilno; če se odvrne od nje, pa labilno.

Na izmaknjeno telo deluje navor vzgona, ki učinkuje navzgor iz težišča izpodrinjene tekočine. Navpična premica vzgona seka težiščno os pokonci plavajočega telesa v točki M, ki se imenuje **metacenter** M. Če je ta nad težiščem C telesa (slika 7.35a), zavrti vzgon telo nazaj k prvotni ravnovesni legi; plavanje je tedaj **stabilno**. Nasprotno pa je **plavanje labilno**, če je metacenter pod težiščem (slika 7.35b). Da ladja plava stabilno (sunki vetra ali valov je ne smejo prevrniti), mora biti tovor naložen čim nižje, tako da je težišče ladje s tovorom vred pod metacentrom.

Kockasto telo, katerega gostota je majhna v primerjavi z gostoto kapljevine (ki je torej le malo potopljeno), plava stabilno tako, da leži ploskoma na gladini. Pri skoraj enako gostem telesu kot kapljevina (ki je skoraj v celoti potopljeno) pa med stabilnim plavanjem moli rob iz gladine.

Tlak v pospešeni in vrteči se kapljevini

V mirujoči kapljevini se s krajem spreminja edinole težni tlak: linearno narašča z globino, v vodoravni smeri pa je enak. V kapljevini, ki se kot celota giblje pospešeno ali se vrti, se poleg težnega tlaka pojavlja še tlak zaradi pospeševanja oziroma vrtenja. Videli bomo, da ta tlak pada v smeri pospeška kapljevine oziroma v smeri radialno k osi vrtenja. Obenem gladina kapljevine ni vodoravna: nagnjena je v smer pospeška.

Najprej vzemimo, da se posoda s kapljevino giblje s stalnim pospeškom a v vodoravni smeri (slika 7.36). Po začetnem pljuskanju kapljevine sem ter tja v smeri pospeševanja se kapljevina v posodi »umiri«, tako da se vsak delček kapljevine giblje s pospeškom a posode, pri čemer je gladina kapljevine nagnjena za kót φ glede na vodoravno smer.

V notranjosti kapljevine si mislimo element z dolžino dx v vodoravni smeri in z navpičnim prerezom dS. Ker se ta giblje pospešeno v desno, je tlak z leve ($p + dp$) večji od tlaka z desne (p). Razlika tlakov (dp) v vodoravni smeri pospešuje element. Newtonov zakon dinamike za ta primer dá enačbo:

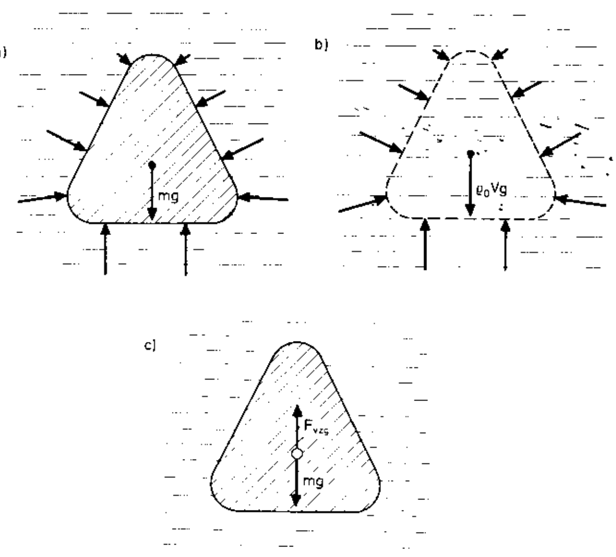
$$dp\,dS = dma = dS\,dx\,\varrho a \quad \text{ali}$$
$$dp = a\varrho\, dx \tag{7.17}$$

Pri stalnem pospešku tlak v kapljevini linearno narašča v nasprotni smeri pospeška.

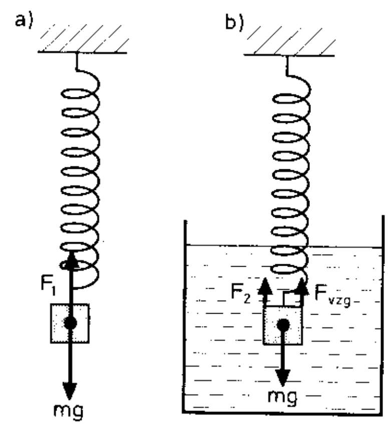
V kapljevini, ki miruje ali v kateri se posamezni deli ne gibljejo relativno drug glede na drugega, je tlak neodvisen od smeri: tlak v vodoravni smeri je enak tlaku v navpični smeri. Torej je dp enak spremembi težnega tlaka na vodoravni razdalji dx. Zaradi tega je gladina kapljevine nagnjena tako, da je na levi strani elementa za dz višje kot na desni:

$$dp = \varrho g\, dz = a\varrho\, dx \quad \text{ali}$$
$$\mathrm{tg}\varphi = dz/dx = a/g \tag{7.18}$$

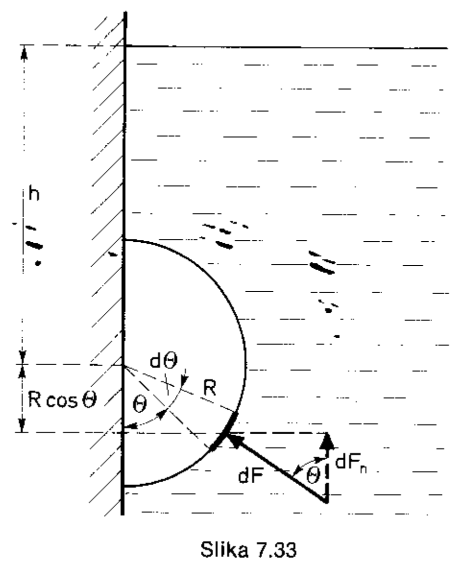
Mereč naklon gladine, določimo pospešek posode (to je pospešek koordinatnega sistema, v katerem opazujemo gladino kapljevine.



Slika 7.31



Slika 7.32



Slika 7.33

Primera:

1. Kockasta posoda (stranica d) je polna vode. Posoda se začne gibati s stalnim pospeškom a v vodoravni smeri. Koliko vode se izlije iz posode do trenutka, ko se voda v posodi umiri?

Naklon nagnjene kapljevine: $\mathrm{tg}\varphi = a/g$
Volumen izlite vode: $V = d^3\mathrm{tg}\varphi/2 = d^3a/2g$

2. U-cev z odprtima pokončnima krakoma je do polovice napolnjena z vodo; razdalja med krakoma je b = = 10 cm. S kolikšnim stalnim pospeškom se giblje cev v vodoravni smeri, če je gladina vode v enem kraku za h = 2 cm višja kot v drugem? (Slika 7.37)

Rezultat dobimo ali s pomočjo enačbe (7.18): $\mathrm{tg}\varphi = a/g = h/b$ ali pa tako, da napišemo Newtonov zakon dinamike za kapljevino v vodoravnem delu cevi: $\varrho gh \cdot S = ma = \varrho bS \cdot a$ in $a = hg/b = 0{,}2\ g = 2\ \mathrm{m/s^2}$.

Vprašanje: Kako se mora gibati posoda s kapljevino, da v kapljevini ni težnega tlaka?

Rotacijski paraboloid

Navpična valjasta posoda s kapljevino se začne vrteti s stalno kotno hitrostjo ω. Po začetnem pljuskanju, ko se različni deli kapljevine različno gibljejo, se kapljevina v posodi umiri tako, da vsak del kroži z enako kotno hitrostjo ω kot posoda. Opazimo, da se gladina rotirajoče kapljevine zakrivi v paraboloid (slika 7.38).

Računamo podobno kot pri enakomerno pospešeni kapljevini (slika 7.36), le da imamo tu radialni pospešek. Element kapljevine, ki na oddaljenosti r kroži enakomerno okrog osi, se giblje z radialnim pospeškom $a_r = r\omega^2$, zato velja:

$$\mathrm{d}p\mathrm{d}S = \mathrm{d}ma_r = \varrho \mathrm{d}S\mathrm{d}r \cdot r\omega^2 \quad \text{ali}$$
$$\mathrm{d}p = \varrho\omega^2 r\mathrm{d}r$$

Po integraciji dobimo:

$$p = p_1 + \varrho\omega^2 r^2/2 \tag{7.19}$$

kjer je p_1 tlak na osi ($r = 0$, odvisen je od globine).

V vrteči se tekočini se tlak povečuje radialno navzven s kvadratom oddaljenosti od osi.

Tlak p na danem mestu kapljevine, izračunan po enačbi (7.19), je obenem težni tlak; ta pa se linearno povečuje z globino: $p = p_0 + \varrho gz$ (p_0 je zračni tlak nad gladino, z je višinska koordinata gladine na oddaljenosti r od osi, merjena z danega nivoja). Sledi:

$$z = z_0 + (\varrho\omega^2/2g)r^2 \tag{7.20}$$

kjer je $z_0 = (p_1 - p_0)/\varrho g$ ali $p_1 = p_0 + \varrho gz_0$

Gladina kapljevine, ki se enakomerno vrti okrog navpične osi, ima obliko rotacijskega paraboloida. Ta je tem globlji, čim hitreje se kapljevina vrti.

Primeri:

1. Odprta pokončna valjasta posoda s polmerom $R = 20$ cm je napolnjena z vodo. Koliko vode izteče iz posode, če posodo enakomerno vrtimo s frekvenco $\nu = 2/\mathrm{s}$ okrog njene pokončne simetrijske osi?

Ko se kapljevina v posodi vrti s kotno hitrostjo $\omega = 2\pi\nu$, ima njena gladina obliko rotacijskega paraboloida (slika 7.39).

$$z_1 = \omega^2 R^2/2g$$

Volumen izlite kapljevine dobimo z integriranjem:

$$V = \int \mathrm{d}V = \int_0^{z_1} \pi r^2 \mathrm{d}z = (2\pi g/\omega^2)\int_0^{z_1} z\mathrm{d}z = \pi g z_1^2/\omega^2$$
$$V = \pi\omega^2 R^4/4g = \pi^3\nu^2 R^4/g = 20 \text{ litrov}$$

2. Recimo, da polno posodo iz zgornjega primera pokrijemo s pokrovom in nato vrtimo s stalno frekvenco. S kolikšno silo (F) skuša vrteča se voda dvigniti pokrov? Stisljivost vode zanemarimo.

Tlak v vrteči se vodi narašča v radialni smeri po enačbi (7.19):

$$p = \varrho r^2\omega^2/2 \quad (\text{vzeli smo } p_1 = 0)$$

Ker se pritisk vode na pokrov spreminja v radialni smeri, razdelimo v mislih pokrov na ozke koncentrične kolobarje: $\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$.

$$\mathrm{d}F = p\mathrm{d}S = \pi\varrho\omega^2 r^3\mathrm{d}r$$
$$F = \int \mathrm{d}F = \pi\varrho\omega^2 \int_0^R r^3\mathrm{d}r = \pi\varrho\omega^2 R^4/4$$
$$F = \pi^3\varrho\nu^2 R^4 = 198\ \mathrm{N}$$

3. Steklena cev je zvita v pravokotni, enakokraki U s stranico $b = 30$ cm. En krak je odprt, drugi je zaprt. Cev napolnimo z živim srebrom in jo nato vrtimo okrog navpičnega, odprtega kraka s stalno kotno hitrostjo $\omega = 10/\mathrm{s}$. Kolikšni so tlaki v točkah 1, 2, 3 in 4? (Slika 7.40) Gostota živega srebra je $\varrho = 13{,}6\ \mathrm{g/cm^3}$, zunanji zračni tlak je $p_0 = 1{,}03$ bar.

$$p_1 = p_0 = 1{,}03 \text{ bar}$$
$$p_2 = p_0 + \varrho gb = 1{,}43 \text{ bar}$$
$$p_3 = p_2 + \varrho\omega^2 b^2/2 = 2{,}04 \text{ bar}$$
$$p_4 = p_0 + \varrho\omega^2 b^2/2 = p_3 - \varrho gb = 1{,}64 \text{ bar}$$

Reši nalogo še za primer, da cev vrtimo okrog zaprtega kraka.

Rotacijski vzgon – centrifugalna separacija

Mirujoča tekočina pritiska na potopljeno telo z vzgonom, ki je usmerjen navzgor. V rotirajoči tekočini pa je treba tudi upoštevati, da se tlak v radialni smeri povečuje. Zaradi tega ima rezultanta pritiskov tekočine na telo (če rotirata) komponento tudi v radialni smeri k osi vrtenja.

Vzemimo, da telo skupaj s tekočino kroži okrog navpične osi s stalno kotno hitrostjo ω. Težišče telesa je za r oddaljeno od osi (slika 7.41). Krožeče telo zaradi vztrajnosti pritiska na tekočino ob zunanji strani močneje kot ob notranji. To obenem pomeni, da zunanja tekočina pritiska nanj proti osi močneje, kot pritiska notranja tekočina proč od osi. Rezultanta teh pritiskov je usmerjena k osi in se imenuje **rotacijski vzgon** F_{rv} (slika 7.41b).

Rotacijski vzgon določimo podobno kot statični vzgon (slika 7.31). Telo v mislih nadomestimo z izrinjeno tekočino (gostota ϱ_0 in prostornina V). Ta kroži z radialnim pospeškom $r\omega^2$ (r je oddaljenost težišča telesa od osi), torej deluje nanjo centripetalna sila $ma_r = \varrho_0 Vr\omega^2$ proti osi, kar je lahko le iskani rotacijski vzgon:

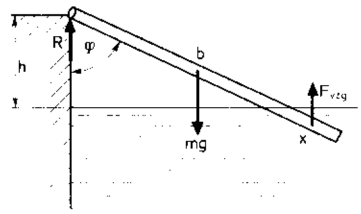
$$F_{rv} = \varrho_0 Vr\omega^2 \tag{7.21}$$

Da telo z gostoto ϱ in prostornino V kroži v tekočini na razdalji r (oddaljenost njegovega težišča) od osi, mora nanj učinkovati centripetalna sila $\varrho Vr\omega^2$. Na razpolago je rotacijski vzgon $\varrho_0 Vr\omega^2$. Če je $\varrho > \varrho_0$, je rotacijski vzgon prešibak in telo se med kroženjem odmika od osi, dokler ne zadene ob zunanjo steno vrteče se posode. Nasprotno, za $\varrho < \varrho_0$ je rotacijski vzgon večji od potrebne centripetalne sile, zato rotirajoča tekočina potiska telo k osi; telo na koncu obstane na osi.

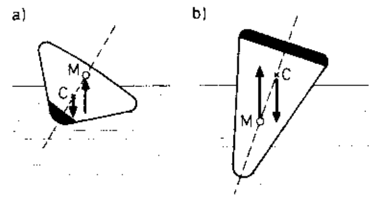
Telo, ki je specifično težje od tekočine, se v vrteči tekočini odmika proč od osi; specifično lažje telo pa se pomika k osi.

V zvezi s tem pojavom si oglejmo poskus. Vodoravno položena steklena cev, ki je na konceh zakrivljena navzgor, je napolnjena z vodo; v njej sta kovinska kroglica in enako velika kroglica iz vate. Če cev miruje (slika 7.42a), je kovinska kroglica na najnižjem mestu (to je na osi cevi), kroglica iz vate pa zaradi statičnega vzgona na najvišjem (zaradi oblike cevi to pomeni, da je najbolj oddaljena od cevi). Drugače je, če cev zavrtimo okrog navpične osi. Izrazi se rotacijski vzgon, ki potiska kroglico iz vate (ker je lažja od vode) k osi (to je navzdol), kovinsko kroglico pa proč od osi, to je navzgor. Kaj kmalu se kroglica iz vate znajde na spodnjem delu cevi (na osi), kovinska kroglica pa na dvignjenem koncu (slika 7.42b).

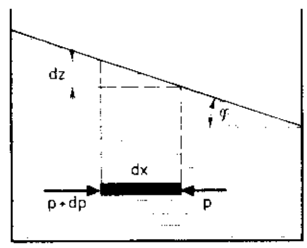
Rotacijski vzgon izkoriščamo za centrifugalno separacijo mešanice tekočin, npr. za izločanje maščob iz mleka in podobno. Tekočinsko mešanico zavrtimo v ultracentrifugi s precejšnjo frekvenco. Gostejše komponente v vrteči se mešanici se bolj oddaljijo od osi kot redkejše; najlažje se zberejo na osi, to je na dnu ultracentrifuge.



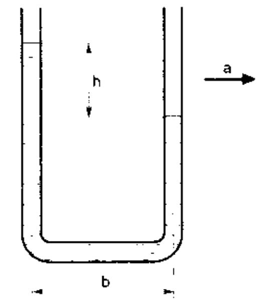
Slika 7.34



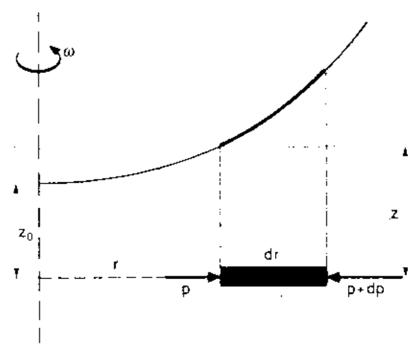
Slika 7.35



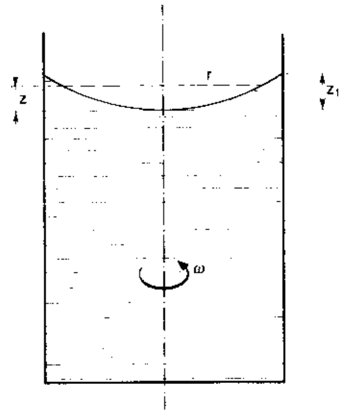
Slika 7.36



Slika 7.37



Slika 7.38



Slika 7.39

Gibanje tekočin

Tekočina je sistem zelo velikega števila delcev, ki se gibljejo vsak zase z različnimi hitrostmi in v različnih smereh. Gibanje takšnega sistema je v splošnem zapleteno in ga ni mogoče verno popisati. Lahko računamo podobno kot pri sistemu točkastih teles (gl. str. 52), da torej zasledujemo gibanje vsakega delca tekočine posebej, kakšne sile med potjo učinkujejo nanj in kako se zaradi njih spreminja njegova hitrost (t. i. **Lagrangeov zapis** gibanja tekočine). Vendar ta zapis ne omogoča enostavnega in hitrega pregleda gibanja tekočine. Primerneje je, da se vprašamo, kakšne so hitrosti tekočine na posameznih mestih prostora in kako se te spreminjajo s časom zaradi tlakov, ki učinkujejo na posameznih mestih (t. i. **Eulerjev zapis**). Tekočinski delec ima na nekem mestu hitrost, ki je značilna za to mesto. Hitrost tekočine torej obravnavamo kot lastnost prostora in časa, ne pa delca samega. Vpeljemo t. i. **hitrostno polje**, ki zajema celotno območje tekočine. Poznati hitrostno polje pomeni, poznati vektor hitrosti (**v**) na vsakem mestu polja (to je kot funkcijo krajevnih koordinat, npr. x, y, z) ter kako se ta spreminja s časom (t):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}\,(x, y, z; t)$$

Privzamemo, da je tekočina kontinuum (zvezno porazdeljena snov), tako da je hitrost **v** zvezna funkcija časa in krajevnih koordinat.

Hitrostno polje tekočine enostavno določimo tako, da tekočino nekako zaznamujemo (npr. vanjo natrosimo prah ali ji primešamo barvilo) in jo nato slikamo. Premik vnesenih delcev med eksponiranjem je merilo za hitrost tekočine na posameznih mestih hitrostnega polja. Večkratno zaporedno slikanje nam pokaže, kako se hitrostno polje spreminja s časom, kako so hitrosti **v** na različnih mestih polja odvisne od časa.

Hitrostno polje ponavadi ponazorimo s tokovnicami, podobno kot polje sile grafično predstavimo s silnicami (str. 92). **Tokovnica je črta, katere tangenta kaže smer hitrosti tekočine v posameznih točkah** (slika 7.43).

Naj bo **dr** diferencialni ločni element na tokovnici (ta predstavlja premik tekočinskega delca v kratkem času dt v smeri tangente na tokovnico: $\mathbf{dr} = \mathbf{v}dt$). Ker sta vektorja **v** in **dr** kolinearna, je njun vektorski produkt nič: $\mathbf{v} \times \mathbf{dr} = 0$ ali v kartezijevih koordinatah:

$$(v_y dz - v_z dy)\mathbf{e}_x + (v_z dx - v_x dz)\mathbf{e}_y + (v_x dy - v_y dx)\mathbf{e}_z = 0$$

Levo stran zaporedoma množimo z $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ in $\mathbf{e}_z$ in dobimo, da so izrazi v okroglih oklepajih identično nič. Sledi:

$$dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z = 0 \qquad (7.22)$$

kar je **enačba tokovnice v diferencialni obliki**. Po integriranju dobimo enačbo tokovnice, ki podaja njeno obliko in lego v prostoru. Splošno jo zapišemo v implicitni obliki:

$$f(x, y, z; t) = c$$

kjer je c konstanta. Vsaki vrednosti konstante ustreza posebna tokovnica. Narišemo toliko tokovnic, kolikor jih je potrebnih za ponazoritev gibanja tekočine. Več sosednjih tokovnic skupaj sestavlja tokovno nit oziroma **tokovno cev**.

Če se **hitrostno polje ne spreminja s časom**, to je če je hitrost **v** na vsakem mestu tekočine neodvisna od časa, je **gibanje tekočine stacionarno**. Hitrosti tekočine so sicer na različnih mestih različne, vendar so stalne. Vsako naslednje slikanje dá enako sliko tokovnic: **tokovnice »mirujejo«**

$$\mathbf{v}(x, y, z; t) = \mathbf{v}(x, y, z)$$

Tekočinski delec ima na nekem mestu enako hitrost, kot jo je tam imel njegov predhodnik (ki se je medtem premaknil na sosednje mesto itd.). Torej so tokovnice tudi tirnice gibanja tekočinskih delcev. **Pri stacionarnem gibanju se tekočinski delci premikajo vzdolž tokovnic.**

V splošnem je gibanje tekočine **nestacionarno: hitrostno polje se spreminja s časom**. Možno je, da se spreminja le velikost hitrosti, njena smer pa ne. Tedaj se slika tokovnic še ohranja, le da tekočinski delci hitreje oz. počasneje potujejo vzdolž tokovnic. V splošnem se pri nestacionarnem gibanju spreminjata s časom tako velikost kot smer hitrosti tekočinskih delcev, kar pomeni, da **se slika tokovnic spreminja**. Tokovnice opletajo sem ter tja in se vrtinčijo. Tekočinski delec je v enem trenutku na eni tokovnici, v naslednjem na drugi itd., tako da tokovnice niso več smiselne.

Glede na obliko tokovnic in njihovo medsebojno lego je gibanje tekočine laminarno ali turbulentno. Pri **laminarnem gibanju** se tokovnice lepo vijejo druga ob drugi, tekočina teče v plasteh (laminah) in **slika tokovnic se ne spreminja s časom**. Barvni prameni, ki jih v začetku vlijemo v tekočino, se ne razmešajo in ostanejo ločeni ves čas, dokler je gibanje še laminarno. Tako npr. teče lena reka, med in druge viskozne tekočine. Vsako stacionarno gibanje je tudi laminarno. (Ali velja tudi obratno, da je vsako laminarno gibanje stacionarno?)

Drugačno od laminarnega je **turbulentno gibanje** tekočine. To je izrazito nestacionarno gibanje, katerega tokovnice se burno spreminjajo s časom, opletajo sem ter tja, se ovijajo itd., tako da se tekočina povsem premeša. V turbulentni tekočini sproti nastajajo vrtinci, potujejo skoznjo in v njej izginevajo. Neurejeno vrtinčenje je glavna značilnost turbulentnega gibanja (odtod tudi ime turbulenca). Takšno gibanje je možno pri velikih hitrostih in če tekočina ni močno viskozna. Viskozne sile namreč ovirajo burno relativno gibanje posameznih delcev tekočine. Turbulentno se npr. giblje voda v brzicah oziroma hitro tekočih rekah, dim iz dimnika, veter itd.

Obravnavali bomo gibanje **nestisljivih tekočin**, katerih gostota ni odvisna od tlaka oziroma hitrosti gibanja. Tudi zrak lahko večinoma vzamemo kot nestisljivo tekočino, če je le hitrost majhna v primerjavi s hitrostjo zvoka (340 m/s). Pogosto zanemarimo še viskoznost (to je notranje trenje), kot da bi tekočina bila **idealna** (brez energijskih izgub zaradi viskoznosti).

Tok tekočine

Ko obravnavamo gibanje tekočine, nas predvsem zanima, koliko tekočine steče skozi prečni prerez v časovni enoti, zanima nas torej **masni tok** Φ_m, s katerim povemo maso pretečene tekočine (merska enota kg/s), oziroma **volumenski tok** Φ_V, ki podaja volumen pretečene tekočine (merska enota m^3/s). O masnem oz. volumenskem toku smo že razpravljali v poglavju o sili curka in reakcijski sili (str. 57).

Volumenski tok Φ_V skozi dano tokovno cev s prerezom S je definiran s količnikom:

$$\boxed{\Phi_V = dV/dt} \qquad (7.23)$$

kjer je dV volumen tekočine, ki v časovnem intervalu dt steče skozi prerez S. Če tekočina teče pravokotno skozi prerez z enako hitrostjo vzdolž celotnega prereza (slika 7.44a), je $dV = vSdt$ ter

$$\Phi_V = vS \qquad (7.23a)$$

Prerez S je lahko nagnjen glede na smer gibanja tekočine (slika 7.44b). Tedaj upoštevamo projekcijo preseka na prečno smer: $S' = S\cos\varphi$, kjer je φ kót med vektorjem **v** in pravokotnico na presek: $\Phi_V = vS' = vS\cos\varphi$. Ta izraz matematično poenostavimo, če vpeljemo **vektor preseka S**, ki **ima smer normale na presek**. Z njegovo pomočjo lahko **volumenski tok** Φ_V izrazimo kot **skalarni produkt hitrosti in preseka**:

$$\boxed{\Phi_V = vS\cos\varphi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}} \qquad (7.24)$$

Volumenski tok skozi dano ploskev je pri dani hitrosti tekočine največji, če je presek pravokoten na hitrost, to je če sta vektorja **v** in **S** kolinearna ($\varphi = 0$). Nasprotno je $\Phi_V = 0$ pri $\varphi = 90°$, to je če je vektor **S** (normala na presek) pravokoten na tokovnice, tako da te tečejo mimo preseka (ga ne prebadajo).

V splošnem se hitrost tekočine (**v**) spreminja vzdolž preseka (tako v smeri kot v velikosti), pa moramo zato določiti povprečno hitrost ($\bar{v}$) tekočine na območju preseka. Presek **S** v mislih razdelimo na diferencialne elemente d**S**, izračunamo diferencialne toke $d\Phi_v = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ skoznje in te seštejemo (integriramo) v celotni tok:

$$\Phi_v = \int d\Phi_v = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int v \cos\varphi \, dS \qquad (7.25)$$

ki ga nato izrazimo kot produkt povprečne hitrosti $\bar{v}$ in preseka:

$$\Phi_v = \bar{v}S$$

Povprečna hitrost tekočine je potemtakem določena z enačbo:

$$\bar{v} = (1/S) \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \qquad (7.26)$$

v je hitrost tekočine, ki teče skozi diferencialni presek d**S**. Integriramo vzdolž preseka, na katerega se tok Φ_v nanaša.

Masni tok Φ_m je premo sorazmeren z volumenskim tokom:

$$\boxed{\Phi_m = dm/dt = \varrho dV/dt = \varrho \Phi_v} \qquad (7.27)$$

Primeri:

1. S kolikšno povprečno hitrostjo ($\bar{v}$) teče voda iz vodovodne pipe, ki ima prečni presek 2 cm^2, če v eni minuti priteče 6 litrov vode?

$\Phi_v = \bar{v}S = dV/dt = V/t$ ali
$\bar{v} = V/St = 6000 \text{ cm}^3/(2 \text{ cm}^2 \cdot 60 \text{ s}) = 0{,}5 \text{ m/s}$

2.Voda teče po dolgi valjasti cevi z notranjim polmerom R. Prečni profil hitrosti je paraboličen: hitrost se spreminja v radialni smeri po enačbi $v(r) = v_0(1 - r^2/R^2)$. Največja (= v_0) je na osi ($r = 0$), ob steni ($r = R$) je nič. Kolikšna je povprečna hitrost ($\bar{v}$)? Kolik je volumenski tok skozi prerez cevi?

Krožni prerez cevi razdelimo na tanke, koaksialne kolobarje (slika 7.45). Skozi kolobar s polmerom r in širino dr teče volumenski tok $d\Phi_v = v(r) \cdot dS = v(r) \cdot 2\pi r dr = 2\pi v_0(1 - r^2/R^2) r dr$. Celotni tok skozi cev je:

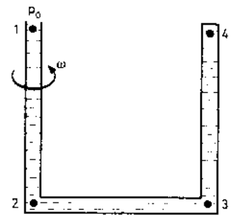
$$\Phi_v = \int d\Phi_v = 2\pi v_0 \int_0^R (r - r^3/R^2) dr = 2\pi v_0 \cdot R^2/4$$

$$\Phi_v = \bar{v} \cdot S = \bar{v} \cdot \pi R^2, \quad \text{kjer je}$$
$$\bar{v} = v_0/2 \qquad (7.28)$$

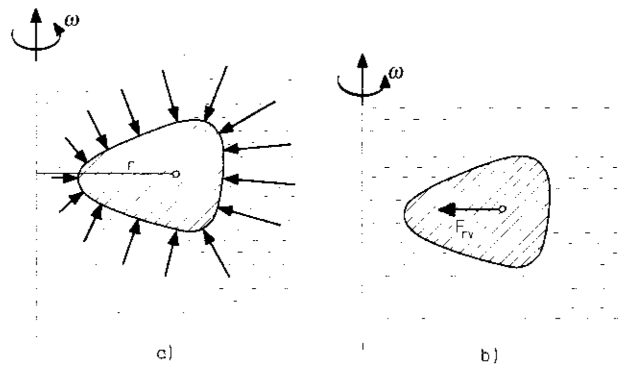
Pri paraboličnem profilu hitrosti je povprečna hitrost enaka polovici največje hitrosti, s katero tekočina teče vzdolž osi.

3.Izračunaj volumenski tok tekočine skozi polkroglasto ploskev (polmer R) v enakomernem toku tekočine. Na vsakem mestu tekočine je hitrost enaka.

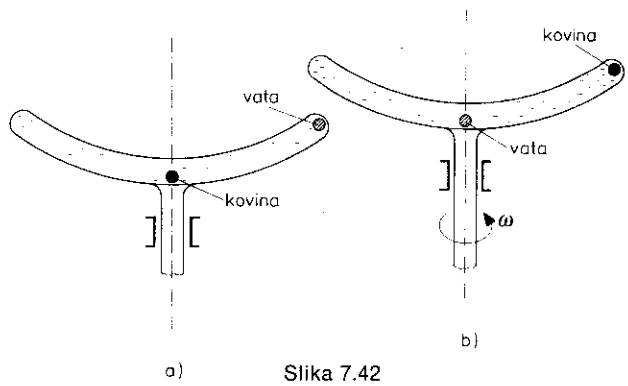
Računamo podobno, kot smo računali zračni pritisk na polkroglasto ploskev (slika 7.24). Polkroglasto ploskev razdelimo na koaksialne kolobarjaste pasove z osjo v



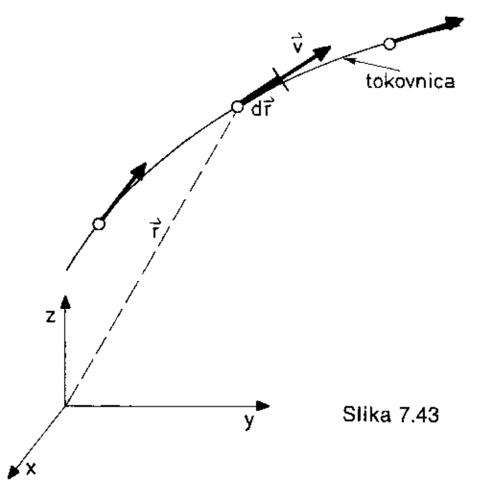
Slika 7.40



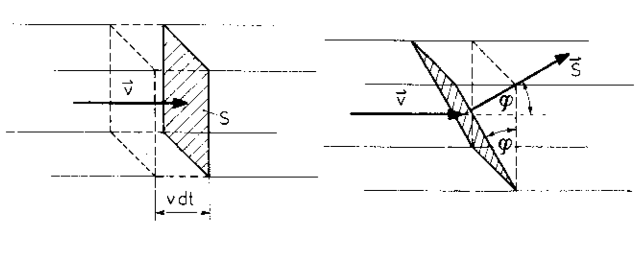
Slika 7.41



Slika 7.42



Slika 7.43



Slika 7.44

smeri hitrosti tekočine. Diferencialni tok skozi pas pri kotu θ je:

$$d\Phi_v = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v dS \cos\theta = v \cdot 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta \cdot \cos\theta$$

Celoten tok je:

$$\Phi_v = \int d\Phi_v = R^2 v \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = \pi R^2 v$$

Torej je tok skozi polkroglasto ploskev enako velik, kot če voda teče neposredno pravokotno skozi ekvatorialni presek πR^2.

Kontinuitetna enačba

Kakor se med gibanjem ohranja masa telesa, se ohranja tudi masa tekočine. Kontinuitetna enačba zagotavlja, da tekočina med gibanjem niti ne izgineva niti ne nastaja iz niča. Izpeljali jo bomo za **stacionarno gibanje nestisljive tekočine**.

Pri stacionarnem gibanju se tekočina giblje vzdolž tokovnic. V tokovni cevi izberemo element tekočine med presekoma S_1 in S_2 (slika 7.46). Tekočina vstopa v ta element skozi prerez S_1 s povprečno hitrostjo v_1 in izstopa iz njega skozi prerez S_2 s povprečno hitrostjo v_2 (tekočina ne prečka stene tokovne cevi v nobeni smeri). Ker se hitrost tekočine na vsakem mestu tokovne cevi ne spreminja s časom, mora skozi prerez S_1 vstopati v enoti časa enako veliko tekočine, kot je izstopa skozi prerez S_2. Drugače bi se tekočina nabirala v elementu med presekoma S_1 in S_2 oziroma bi izginevala iz njega, pa bi se hitrost tekočine v tem elementu spreminjala s časom.

Stacionarnost gibanja nestisljive tekočine zahteva, da je **volumenski tok za vsak prerez tokovne cevi enak**, da se torej **vzdolž dane tokovne cevi ne spreminja**:

$$\Phi_v = vS = konst. \quad \boxed{v_1 S_1 = v_2 S_2} = \ldots \tag{7.29}$$

Kolikor tekočine v enoti časa vstopa v tokovno cev, toliko je teče skozi vsak prerez cevi in toliko je izteče iz nje. Kjer se **presek tokovne cevi zoži**, se **povprečna hitrost tekočine poveča** in obratno: **razširitev prereza je povezana z zmanjšanjem hitrosti tekočine**.

Vidimo, da je ploskovna gostota tokovnic v zvezi s hitrostjo tekočine. **Gostejše tokovnice** (manjši prerez tokovne cevi) **pomenijo večjo hitrost.** Kjer se tekočina upočasni (npr. kjer se struga reke razširi), se tokovnice razredčijo.

Pri stisljivi tekočini moramo upoštevati, da se njena gostota v splošnem spreminja vzdolž tokovne cevi. Namesto volumenskega toka **se** zato **pri stacionarnem gibanju ohranja masni tok**:

$$\Phi_m = \varrho \Phi_v = \varrho v S = konst. = \varrho_1 v_1 S_1 = \varrho_2 v_2 S_2 \tag{7.30}$$

Primera:

1. Tekočina teče stacionarno skozi valjasto cev, katere polmer R se v smeri toka (vzdolž koordinatne osi x) spreminja po enačbi $R = R_0(1 - x/2b)$; R_0 je polmer na začetku cevi, b je njena dolžina. S kolikšno povprečno hitrostjo izstopa tekočina iz cevi, če vstopa z volumenskim tokom Φ_v?

Izstopni polmer cevi je $R_1 = 0{,}5\, R_0$.

$$\Phi_v = \bar{v}_0 \cdot \pi R_0^2 = \bar{v} \cdot \pi R^2 = \bar{v}_1 \cdot \pi R_1^2 = \bar{v}_1 \cdot \pi R_0^2/4 \quad \text{ali}$$
$$\bar{v}_1 = 4\Phi_v/\pi R_0^2 = 4 v_0$$

Tekočina izstopa iz cevi s štirikrat večjo hitrostjo, kot vstopa vanjo.

2. Voda teče po cevi s polmerom $R_0 = 16$ cm s stalno hitrostjo $v_0 = 5$ m/s. Cev se razcepi v manjši cevi s polmeroma $R_1 = 12$ cm in $R_2 = 8$ cm. S kolikšno hitrostjo (v_1) se voda giblje v večji cevi, če se v manjši giblje s hitrostjo $v_2 = 4$ m/s? Pretakanje vode je stacionarno.

Volumenski tok iz prvotne cevi ($\Phi_v = v_0 S_0$) se razdeli med razcepljeni cevi: skozi večjo teče tok $v_2 S_2$, skozi manjšo pa $v_1 S_1$. Ker se celoten tok ohranja, velja:

$$v_0 S_0 = v_1 S_1 + v_2 S_2 \quad \text{ali}$$
$$v_0 R_0^2 = v_1 R_1^2 + v_2 R_2^2$$
$$v_1 = (v_0 R_0^2 - v_2 R_2^2)/R_1^2 = 7{,}1 \text{ m/s}$$

Viskoznost

Različni deli tekočine se v splošnem gibljejo z različnimi hitrostmi, kar pomeni, da se sosednje tekočinske plasti gibljejo relativno druga glede na drugo. Zaradi tega se med njimi izrazi t. i. **notranje trenje** ali **viskoznost**, ki je tem močnejše, čim večja je razlika hitrosti sosednjih plasti, to je čim bolj se hitrost tekočine spreminja s krajem. Notranjega trenja ni, če je hitrostno polje homogeno, če se vsak tekočinski delec giblje enako hitro in v enaki smeri.

Viskoznost je posledica medmolekularnih sil, s katerimi molekule iz ene plasti učinkujejo na molekule iz sosednje plasti, ter posledica preskakovanja molekul iz hitrejše plasti v počasnejšo ter obratno. Oboje skupaj povzroča, da hitrejša plast »vleče« počasnejšo s seboj z **viskozno silo** F, obenem pa počasnejša plast zadržuje hitrejšo z enako veliko silo.

V tekočini izberimo sosednji plasti, ki se prekrivata na površini S in sta razmaknjeni za dz prečno glede na smer gibanja (slika 7.47). Spodnja plast npr. drsi s hitrostjo v, zgornja pa z nekoliko večjo hitrostjo $v + dv$ v enako smer. Spodnja čuti viskozno silo F, s katero jo zgornja vleče v smeri gibanja (in jo pospešuje). Obenem spodnja plast zadržuje zgornjo (in jo upočasnjuje) z enako veliko silo F. Viskozna sila F med plastema je tem večja, čim večja je skupna površina S obeh plasti (vzdolž katere plasti drsita), čim bolj se hitrosti plasti razlikujeta (večji dv) ter čim bližje sta plasti druga drugi (manjši dz):

$$F \propto S \cdot dv/dz \quad \text{ali}$$

$$\boxed{F = \eta S \cdot dv/dz} \tag{7.31}$$

Sorazmernostni faktor η se imenuje **viskoznost tekočine** (merska enota: kg/ms = Pa · s, stara enota: 1 poise = 1 g/cms = 0,1 Pa · s); odvisna je od vrste tekočine in od temperature. Močno viskozne kapljevine (npr. glicerin, med, tekoča maščoba itd.) imajo veliko viskoznost, razredčeni plini pa majhno. Splošno velja, da se **viskoznost kapljevin s segrevanjem zmanjšuje** (voda ima npr. pri temperaturi 10 °C viskoznost 0,013 kg/ms, pri 100 °C pa le 0,0030 kg/ms), **viskoznost plinov pa s temperaturo narašča** (zrak ima pri 10 °C viskoznost $1{,}73 \cdot 10^{-5}$ kg/ms, pri 100 °C pa $2{,}18 \cdot 10^{-5}$ kg/ms). Razlika je zato, ker pri kapljevinah (zaradi njihove velike gostote) prevladuje vpliv medmolekularnih sil, pri plinih pa vpliv preskakovanja molekul.

Viskozna sila F leži v ploskvi, torej je **strižna sila**; kvocient F/S je **strižna napetost** (τ). Odvisna je od količnika spremembe hitrosti (dv) in razdalje (dz) v smeri prečno glede na hitrost tekočine.

Primer:

Na gladki vodoravni podlagi je razlita plast olja. Nanjo položimo stekleno ploščo (površina S = 1,2 dm^2), tako da je med ploščo in podlago plast olja z debelino h = 0,2 mm. S kolikšno strižno silo (F) moramo vleči ploščo vzdolž podlage, da se plošča pomika s hitrostjo v_0 = 0,5 m/s (glede na podlago)? Viskoznost olja je η = 0,2 kg/ms. (Slika 7.48)

$$F = \eta S\, dv/dz = \eta S v_0/h = 6{,}0 \text{ kgm/s}^2 = 6{,}0 \text{ N}$$

Zgornja plast olja se pripoji k plošči in se skupaj z njo giblje s hitrostjo v_0, spodnja miruje na podlagi, hitrost vmesnih plasti pa narašča linearno z višino; plast na sredini se npr. giblje s hitrostjo $v_0/2$.

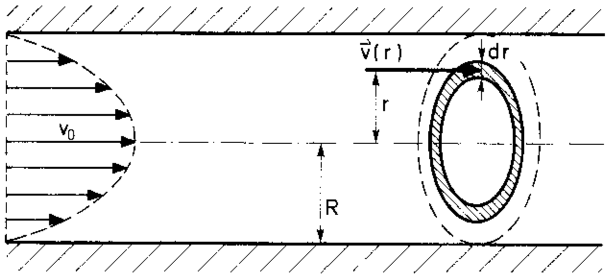
Mejna plast

Tekočina se z viskoznimi (medmolekularnimi) silami prilepi ob ploskev trdnine, na katero meji. Tenka plast tekočine ob mejni ploskvi se giblje (oziroma miruje) skupaj s ploskvijo ter z medmolekularnimi silami veže sosednjo plast, ta vleče nadaljnjo plast itd. Tako se vpliv gibanja telesa v tekočini prek viskoznih sil sosednjih tekočinskih plasti razširi po okolišni tekočini.

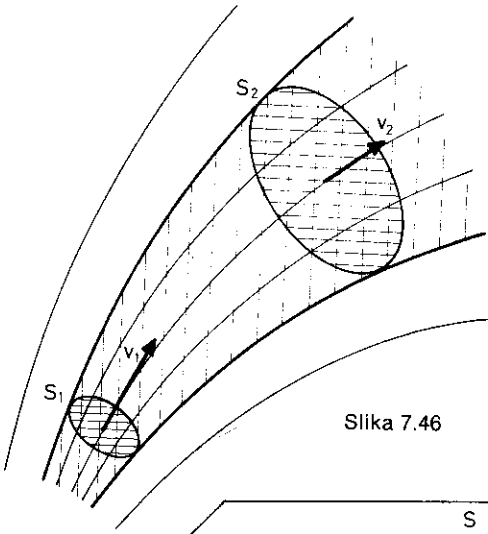
Ladja, ki pluje po mirni gladini jezera, vleče s seboj neposredno sosednjo plast vode. Sosednje plasti vode se gibljejo tem počasneje, čim bolj so oddaljene od ladje. Daleč od ladje je gladina vode še naprej mirna, kot da ladja ne bi plula. Voda v globini leno tekoče reke se giblje približno takole (slika 7.49): plast ob dnu miruje in zadržuje sosednjo plast, zato se ta giblje le počasi. Naslednja višja plast se giblje hitreje itd. Na višini δ nad dnom je hitrost vode praktično enaka hitrosti (v_0) nemotenega toka reke.
Plast tekočine ob mejni ploskvi telesa, v kateri se hitrost tekočine zaradi viskoznih sil opazno spreminja s krajem (velik gradient hitrosti!), se imenuje **mejna plast**. Viskozni vpliv mejne ploskve na gibanje tekočine sega le skozi mejno plast.

Na območju mejne plasti moramo zaradi precejšnjih gradientov hitrosti upoštevati viskozne sile, izven mejne plasti pa jih lahko zanemarimo in obravnavamo tekočino kot idealno.

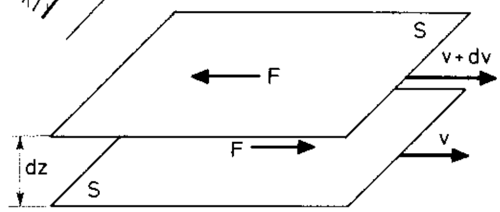
Ocenimo debelino (δ) mejne plasti za enakomeren, laminaren tok mimo ravne ploskve. Ker ploskev zadržuje tekočino, mora tlak v tekočini padati v smeri toka,



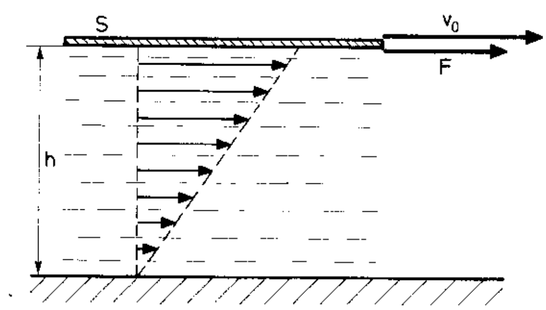
Slika 7.45



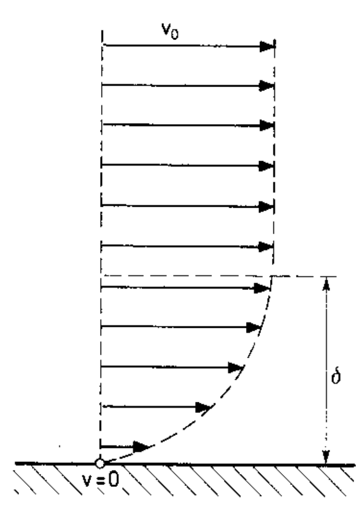
Slika 7.46



Slika 7.47



Slika 7.48



Slika 7.49

da nastane tlačna razlika (npr. Δp na razdalji L vzdolž toka), ki poganja tekočino vzdolž ploskve (premaguje viskozne sile). Tekočina v zgornjem delu mejne plasti (nad koordinato z, z dolžino L v smeri toka in s prečno širino a, slika 7.50) se giblje enakomerno (s stalno hitrostjo), zato je vsota vseh sil, ki učinkujejo nanjo v smeri toka, enaka nič. Poganja jo tlačna sila $(p + \Delta p - p)a(\delta - z)$, zadržuje pa viskozna sila, s katero tla prek spodnjega dela mejne plasti zavirajo njeno gibanje. Ta je odvisna od gradienta hitrosti (dv/dz) na spodnji ploskvi (gl. 7.31): $\eta aL \cdot dv/dz$. Sledi:

$$\Delta p \cdot a(\delta - z) - \eta aL \cdot dv/dz = 0 \quad \text{ali}$$
$$dv = (\Delta p/L\eta)\,(\delta - z)dz$$

Enačbo integriramo, na levi od 0 do v, na desni od 0 do z. Dobimo:

$$v = (\Delta p/L\eta)\,(\delta z - z^2/2)$$

Na zgornji strani mejne plasti ($z = \delta$) je $v = v_0$ (hitrost nemotenega toka reke), zato je $v_0 = (\Delta p/L\eta)\delta^2/2$ ali

$$\delta = \sqrt{2v_0L\eta/\Delta p} \tag{7.33}$$

Vidimo, da je mejna plast tem debelejša (kar pomeni, da viskozni vpliv mejne ploskve sega globlje v tekočino), čim večja je viskoznost tekočine. Pri skoraj idealnih tekočinah je $\delta \approx 0$. Mejna plast se v smeri toka debeli, približno s korenom razdalje (slika 7.51). Te ugotovitve veljajo za laminaren tok, pri turbulentnem so hitrostne razmere drugačne.

Laminarno pretakanje viskozne tekočine po cevi

Poglejmo, kako teče tekočina po dolgi, vodoravni cevi s stalnim polmerom R. Tekočino potiskamo skozi cev s stalno tlačno razliko Δp med koncema cevi (to je na dolžini L). Ob vstopu v cev je hitrost tekočine enaka ($\bar{v}$) po celotnem prerezu (slika 7.52a). Ta je dovolj majhna, da tekočina teče po cevi laminarno in stacionarno. Plast tekočine ob notranji steni cevi se ustavi in zadržuje sosednje (notranje) plasti. Bolj kot tekočina prodira v cev, bolj se širi mejna plast od stene cevi k osi, v kateri se čuti zaviralni viskozni učinek stene. Ker se tekočinske plasti ob steni upočasnijo, se osrednje plasti (na katere viskozne sile še ne učinkujejo) zaradi stalne tlačne razlike in stalnega volumenskega toka gibljejo hitreje kot ob vstopu v cev (slika 7.52b). Na neki razdalji od začetka cevi se mejna plast razširi po celotnem prerezu cevi, tako da viskozne sile učinkujejo na vsako plast tekočine. Od tam naprej je prečni profil hitrosti paraboličen (slika 7.52c) in se vzdolž cevi več ne spreminja (razen pred koncem cevi).

Dokažimo, da je profil hitrosti tekočine pri laminarnem toku tekočine skozi dolgo valjasto cev zares paraboličen. V cevi si mislimo element tekočine v obliki valja s polmerom r in dolžino L (slika 7.53). Njega potiska v smeri toka tlačna sila $(p + \Delta p - p)\pi r^2$, vzdolž njegovega plašča ($S = 2\pi rL$) pa učinkuje viskozna sila ηS $(-dv/dr)$, s katero stena cevi prek zunanjih plasti zavira njegovo gibanje (predznak minus zato, ker **v** pada z naraščanjem r in je zato dv negativen). Ker se valjast element giblje enakomerno, mora biti potisna sila enako velika kot zaviralna.

$$\Delta p \pi r^2 = -\eta \cdot 2\pi rL \cdot dv/dr \quad \text{ali}$$
$$dv = -(\Delta p/2\eta L)rdr$$

Na desni strani enačbi integriramo od R do r, na levi od 0 do v. Dobimo, kar smo morali dokazati:

$$v = (\Delta p/4\eta L)(R^2 - r^2) = v_0(1 - r^2/R^2) \tag{7.34}$$

Tu je v_0 največja hitrost tekočine na osi ($r = 0$):

$$v_0 = R^2\Delta p/4\eta L \tag{7.34a}$$

Pri pretakanju tekočine po cevi nas predvsem zanima **volumenski** (oz. masni) **tok**, to je koliko tekočine steče v enoti časa skozi cev. Za paraboličen profil hitrosti (7.34) smo pretok izračunali na strani 165 (primer 2) in dobili:

$$\Phi_V = \pi R^2\bar{v} = \pi R^2 v_0/2 = \pi R^4\Delta p/8\eta L \tag{7.35}$$

Dobljeni rezultat lahko napišemo v obliki, ki je znana pod imenom **Ohmov zakon** (v elektrotehniki): tok je količnik napetosti in upora ($I = U/R$). Tu je tok volumenski ($I \to \Phi_V$), napetost pa tlačna razlika Δp, ki tok poganja:

$$\boxed{\Phi_V = \Delta p/R_p} \tag{7.36}$$

Novo vpeljana količina R_p, t. i. **pretočni upor**, zajema viskoznost tekočine ter dolžino in polmer cevi:

$$\boxed{R_p = 8\eta L/\pi R^4} \tag{7.37}$$

Čim večji je pretočni upor (čim bolj je tekočina viskozna, čim daljša in tanjša je cev), tem večja tlačna razlika med koncema cevi je potrebna za dan tok tekočine skozi cev, oziroma tem manj tekočine preteče skozi cev v enoti časa pri dani tlačni razliki.

Primer:

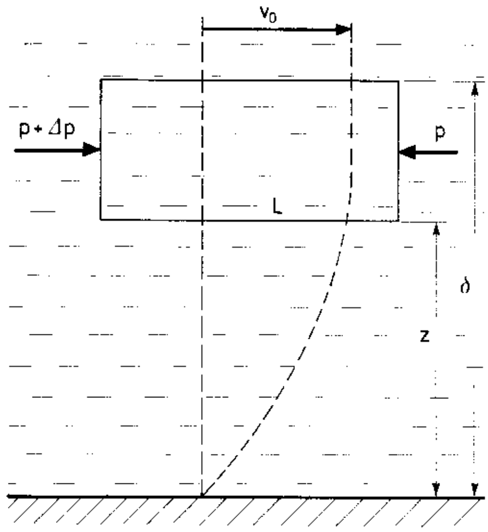
Črpalka poganja olje skozi $L = 10$ m dolgo cev z notranjim polmerom $R = 1$ cm. Kolikšna mora biti moč (P) črpalke, da teče skozi cev $\Phi_V = 25$ litrov olja v minuti. Viskoznost olja je $\eta = 1$ kg/ms.

$$P = A/t = F\bar{v} = \pi R^2\Delta p \cdot \bar{v} = \Delta p \cdot \Phi_V = \Phi_V^2 R_p$$

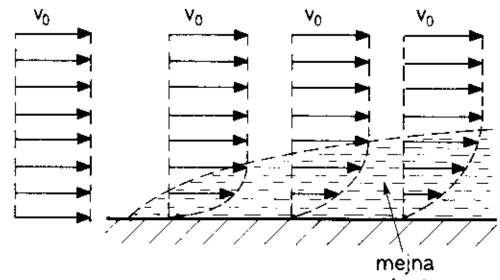
kjer je $R_p = 8\eta L/\pi R^4 = 2{,}5 \cdot 10^9 \text{kg/m}^4\text{s}$

$$P = 1{,}7 \cdot 10^{-7}\text{m}^6\text{s}^{-2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^9\text{kgm}^{-4}\text{s}^{-1} = 440\ \text{kgm}^2\text{s}^{-3}$$
$$P = 440\ \text{W} = 0{,}44\ \text{kW}$$

Čeprav teče tekočina po vodoravni cevi enakomerno (s stalno hitrostjo), je potrebna gonilna sila – tlačna razlika. Kajti premagovati je treba viskozne sile, s katerimi stena cevi zavira gibanje tekočine vzdolž cevi. Zaradi viskoznega upora torej **tlak v gibajoči se tekočini pada v smeri toka**. Spomnimo se (str. 154), da se tlak v mirujoči tekočini ne spreminja v vodoravni smeri. Brž ko se tekočina giblje, pa zaradi viskoznosti tlak v smeri toka pojema. To velja za gibanje tekočine po vodoravni cevi, katere prerez se ne spreminja. Videli bomo (str. 170), da se tlak dodatno spreminja v smeri toka, če se spreminja prerez tokovne cevi. **Viskozni padec tlaka v smeri toka** je tem večji, čim bolj je tekočina viskozna, čim ožja in daljša je cev ter čim hitreje tekočina teče po cevi (večji volumenski tok). **V idealni tekočini** lahko **padec tlaka v smeri toka zanemarimo**.



Slika 7.50



Slika 7.51

Bernoullijeva enačba

Zgoraj smo ugotovili, da se hitrost v idealni tekočini, ki se giblje stacionarno po vodoravni cevi z enakomernim prerezom, ne spreminja v smeri toka (kot če bi tekočina mirovala). Ker je hitrost tekočine na vsakem prerezu enaka, je enak tudi tlak. Kaj pa, če se prerez cevi spreminja v smeri toka, če se cev oži ali širi? Iz kontinuitetne enačbe (7.29) sledi, da se hitrost tekočine poveča, kjer se prerez cevi zmanjša, oziroma zmanjša, kjer se prerez poveča. Torej se tekočina ob povečanju prereza upočasni. Upočasnitev povzroči razlika tlaka v tekočini, zato je ta na širšem delu cevi večji kot na ožjem. **Manjši hitrosti tekočine na širšem delu cevi ustreza večji tlak.** Obratno je pri prehodu tekočine v zoženi del cevi: hitrost se poveča, tekočino pospeši razlika tlakov med širšim in ožjim delom cevi.

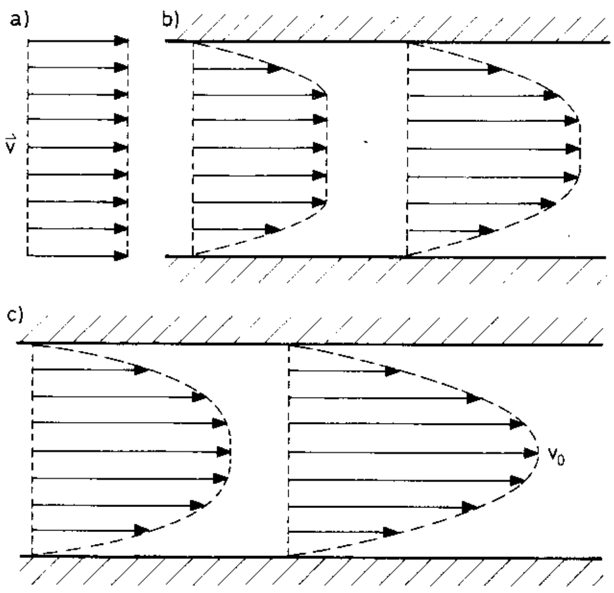
Spremembo tlaka zaradi spremembe prereza cevi (oz. zaradi spremembe hitrosti) določimo s t. i. **Bernoullijevo enačbo**, ki predstavlja **izrek o delu in spremembi energije, prirejen za gibanje tekočine**.

V tokovni cevi, ki vodi poševno navzgor, izberemo element tekočine med prerezom S_1 in S_2 (slika 7.54). Tekočina vstopa v ta element na višini z_1 s povprečno hitrostjo v_1 in pod tlakom p_1, iz elementa pa izstopa na višini z_2 s povprečno hitrostjo v_2 in s tlakom p_2. V kratkem časovnem intervalu dt se celoten element tekočine premakne poševno navzgor; spodnja mejna ploskev S_1 se premakne za $ds_1 = v_1 dt$, zgornja S_2 pa za $ds_2 = v_2 dt$. Pri tem tlak p_1 (s katerim spodnja tekočina pritiska element navzgor) opravi delo $dA_1 = p_1 S_1 ds_1$, sam tekočinski element pa z delom $dA_2 = p_2 S_2 \cdot ds_2$ odriva tekočino nad seboj. Tekočinski element potemtakem prejema neto delo:

$$dA = dA_1 - dA_2 = p_1 S_1 ds_1 - p_2 S_2 ds_2$$

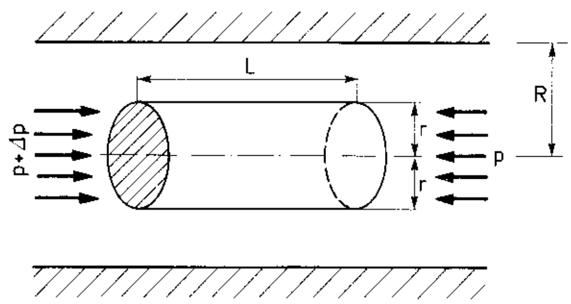
Ta izraz lahko za nestiljivo tekočino poenostavimo. Ker velja kontinuitetna enačba (7.29): $v_1 S_1 = v_2 S_2$, je $S_1 ds_1 = S_1 v_1 dt = S_2 v_2 dt = S_2 ds_2 = dV$, kjer je dV volumenski premik tekočinskega elementa v časovnem intervalu dt.

$$dA = (p_1 - p_2)dV$$



Slika 7.52

Prejeto delo poveča kinetično in potencialno energijo tekočinskega elementa. Pri stacionarnem gibanju se hitrost tekočine na danem mestu ne spreminja s časom. Kinetična energija osrednjega dela tekočinskega elementa (med črtkanima prerezoma na sliki 7.54) se zato ne spremeni. Sprememba celotne energije tekočinskega elementa je tolikšna, kot da bi tekočinski element na spodnjem prerezu S_1 izgubil del tekočine z maso $dm = \rho dV$ in hitrostjo v_1 ter obenem pridobil na zgornjem prerezu S_2 enako veliko tekočine, a s hitrostjo v_2. Torej se kinetična energija tekočinskega elementa v intervalu dt spremeni za $dW_k = dm(v_2^2 - v_1^2)/2$, potencialna pa za



Slika 7.53

$dW_p = dmg\,(z_2 - z_1)$. Ker je tekočina idealna, lahko izgubo energije zaradi nekonservativnih viskoznih sil zanemarimo in zapišemo:

$$dA = dW_k + dW_p$$
$$(p_1 - p_2)dV = \varrho dV(v_2^2 - v_1^2)/2 + \varrho dVg(z_2 - z_1) \quad \text{ali}$$

$$\boxed{p_1 + \varrho g z_1 + \varrho v_1^2/2 = p_2 + \varrho g z_2 + \varrho v_2^2/2} \quad \textbf{Bernoullijeva enačba} \quad (7.38)$$

Prvi člen na obeh straneh enačbe je tlak p v tekočini, drugi člen predstavlja **gostoto potencialne energije** (to je potencialno energijo v enoti prostornine tekočine, dW_p/dV), tretji pa **gostoto kinetične energije** (dW_k/dV). Torej je **vsota tlaka ter gostote potencialne in kinetične energije enaka za vsak prerez dane tokovne cevi**. Kar velja za tokovno cev, velja tudi za tokovno nit oziroma za samo tokovnico.

Vsota tlaka (p), gostote potencialne energije (ϱgz) in gostote kinetične energije ($\varrho v^2/2$) se vzdolž dane tokovnice ne spreminja, je enaka za vsako točko dane tokovnice:

$$\boxed{p + \varrho g z + \varrho v^2/2 = konst.} \quad (7.38a)$$

Vrednost konstante je v splošnem za različne tokovnice različna.

Da smo dobili enostavno Bernoullijevo enačbo, smo morali predpostaviti stacionarno gibanje idealne (neviskozne) in nestisljive tekočine. Realna tekočina je seveda nekoliko viskozna, pa tudi njeno gibanje je bolj ali manj turbulentno. Kljub temu to enačbo na široko uporabljamo in dobimo z njo presenetljivo dobre rezultate. Paziti moramo le, da sta referenčni točki 1 in 2 na dani tokovnici tem bliže druga drugi, čim bolj je tekočina viskozna.

Primeri:

1. Iztekanje tekočine iz posode

Zanima nas hitrost v, s katero tekočina izteka iz velike posode skozi majhno odprtinico v steni. Odprtinica ima površino S in je na globini h pod gladino tekočine v posodi (slika 7.55). Prerez S_1 gladine tekočine v posodi je dovolj velik v primerjavi s prerezom S odprtinice, da se gladina tekočine dovolj počasi znižuje zaradi iztekanja in je iztekanje praktično stacionarno.

Referenčna točka 1 je na gladini, 2 pa ob izstopu tekočine iz posode, kjer je tlak v curku enak zunanjemu zračnemu tlaku p_0. Prerez S_2 curka iztekajoče tekočine je zaradi kontrakcije curka vedno manjši od odprtinice (slika 7.56). Če je stena tanka ali če so notranji robovi ostri, velja za okroglo odprtino tale empirično dobljena odvisnost: $S_2 = 0{,}62\ S$. Prerez S_2 curka povečamo (kontrakcijo zmanjšamo) z izstopno šobo (pri šobi, ki moli ven iz stene za približno štirikratni premer odprtine, je $S_2 = 0{,}82\ S$) ali če notranji rob zaoblimo (dosežemo celo $S_2 = 0{,}98\ S$). Če šoba moli v notranjost posode, se kontrakcija poveča celo do $S_2 = 0{,}51\ S$. Z zunanjo šobo zmanjšamo kontrakcijo curka in s tem povečamo hitrost ter volumenski tok iztekanja.

V točki 1 na gladini je $p_1 = p_0$, $z_1 = h$, v točki 2 pa $p_2 = v_0$, $z_2 = 0$ in $v_2 = v$. Iz Bernoullijeve enačbe potem dobimo:

$$p_0 + \varrho g h + \varrho v_1^2/2 = p_0 + 0 + \varrho v^2/2 \quad \text{ali}$$
$$v^2 = v_1^2 + 2gh$$

Vidimo, da **tekočina izstopi iz posode s takšno hitrostjo, kot da bi prosto padala z višine gladine do odprtine** (gl. 1.21).

Upoštevamo še kontinuitetno enačbo: $v_1S_1 = vS_2$ in dobimo:

$$v = S_1\sqrt{2gh/(S_1^2 - S_2^2)} \approx \sqrt{2gh} \quad \text{za} \quad S_2 \ll S_1 \qquad (7.39)$$

Odprta valjasta posoda s polmerom $R = 20$ cm in višino $h = 80$ cm je napolnjena z vodo. V dnu posode napravimo luknjico s površino $S = 1\ \text{mm}^2$. V kolikšnem času se gladina vode v posodi zniža na polovico? Predpostavljamo dovolj počasno iztekanje vode, da je njeno gibanje praktično stacionarno. Kontrakcijo curka ob izstopu zanemarimo.

Po času t od začetka iztekanja je gladina vode na višini z. V naslednjem kratkem časovnem intervalu dt izteče tekočina s prostornino $dV = \Phi_v dt = vSdt = Sdt\sqrt{2gz}$, zaradi česar se gladina zniža za $-dz$ (minus zato, ker se z zmanjšuje in je dz negativen). Velja:

$$\pi R^2(-dz) = Sdt\sqrt{2gz} \quad \text{ali}$$
$$dz/\sqrt{z} = -(\sqrt{2g}\ S/\pi R^2)dt = -\alpha dt$$

kjer je $\alpha = \sqrt{2g}\ S/\pi R^2 = 3{,}56 \cdot 10^{-5}\sqrt{\text{m}}/\text{s}$. Po integraciji ($z$ gre od h do $h/2$) dobimo:

$$t = (2 - \sqrt{2})\sqrt{h}/\alpha = 1{,}47 \cdot 10^4\text{s} = 4{,}1\ \text{h}$$

V zvezi z iztekanjem tekočine iz posode razrešimo še tale primer: visoka pokončna posoda ima vzdolž višine v steni razporejene luknjice, skozi katere izteka tekočina, ki pada na vodoravna tla (slika 7.57). Iz katere luknjice pada curek na tla v največji oddaljenosti od posode? Gladina tekočine v posodi je ves čas enaka h.

Tekočina izteka iz luknjice na višini z nad tlemi z začetno hitrostjo $v_0 = \sqrt{2g(h-z)}$ v vodoravni smeri in pada na tla na oddaljenosti $x = v_0t$ (gl. vodoravni met, str. 20). Čas padanja (t) je odvisen od višine: $z = gt^2/2$ ali $t = \sqrt{2z/g}$. Dobimo:

$$x = 2\sqrt{z(h-z)}$$

Največji x ($= x_0$) dobimo pri $z = z_0$, za katerega je $dx/dz = 0$. Dovolj je, če odvajamo kar izraz pod korenom (kar je enostavneje). Dobimo enačbo: $h - 2z_0 = 0$ ali $z_0 = h/2$ ter $x_0 = h$. Največji doseg (enak višini gladine tekočine v posodi) ima potemtakem curek, ki izteka iz odprtinice na polovični višini gladine tekočine v posodi.

2. Venturijeva cev

je steklena cev z zoženim prerezom v sredini; uporablja se za merjenje volumenskega pretoka tekočine, ki teče skoznjo. Priključeni manometer (npr. živosrebrni) meri razliko tlakov med širokim in ozkim delom cevi (slika 7.58). Ker je cev vodoravna, lahko spremembo težnostne energije tekočine zanemarimo ($z_1 \approx z_2$) in Bernoullijevo enačbo (7.38) poenostavimo v:

$$p_1 + \varrho v_1^2/2 = p_2 + \varrho v_2^2/2 \quad \text{ali} \qquad (7.40)$$
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \varrho(v_2^2 - v_1^2)/2$$

Upoštevamo še kontinuitetno enačbo: $v_1 S_1 = v_2 S_2$ in izračunamo:

$$\Phi_v = v_1 S_1 = S_2 S_1 \sqrt{2\Delta p/\varrho(S_1^2 - S_2^2)} \quad \text{ali}$$
$$\Delta p = konst. \Phi_v^2$$

Izmerjena tlačna razlika (Δp) je premo sorazmerna s kvadratom volumenskega pretoka. Sorazmernostna konstanta je odvisna od gostote tekočine ter od obeh prerezov cevi. Mereč tlačno razliko Δp potemtakem določimo volumenski pretok skozi cev.

3. Dinamični (zastojni) tlak tekočine

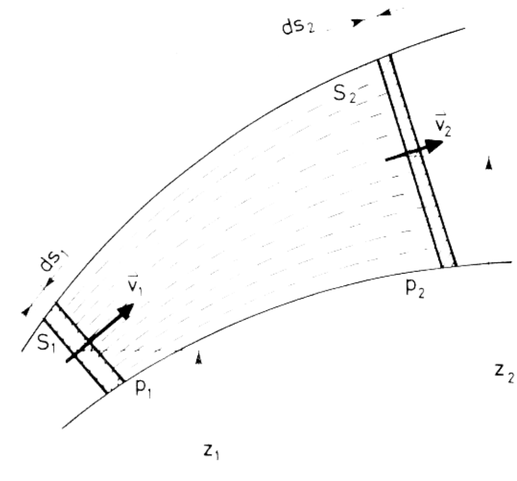
Recimo, da tekočina, ki teče s hitrostjo v v vodoravni smeri, zadene ob oviro, ob kateri se ustavi (slika 7.59). Zaradi ustavitve se tlak v tekočini ob oviri poveča, npr. za Δp, to je t. i. dinamični ali zastojni tlak. Tekočina se razleze ob oviri, tokovnice se razdelijo. Izberemo osrednjo tokovnico, ki se ob oviri »ustavi«. Referenčna točka 1 na tej tokovnici je daleč proč od ovire, kjer tekočina še nemoteno teče ($v_1 = v$, $p_1 = p_0$). Točko 2 pa izberemo tik ob oviri, kjer se tekočina ustavi ($v_2 = 0$) in kjer tlak naraste za dinamični tlak ($p_2 = p_0 + \Delta p$); ta točka je t. i. **zastojna točka**. Ker zanemarimo spremembo težnostne energije, uporabimo Bernoullijevo enačbo v poenostavljeni obliki (7.40). V našem primeru imamo:

$$p_0 + \varrho v^2/2 = p_0 + \Delta p + 0 \quad \text{ali}$$

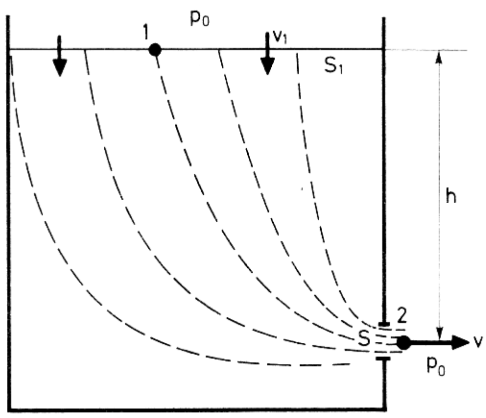
$$\boxed{\Delta p = \varrho v^2/2} \qquad (7.41)$$

Dinamični (zastojni) tlak tekočine (Δp) je enak gostoti kinetične energije nemotenega gibanja tekočine. Člen $\varrho v^2/2$ v Bernoullijevi enačbi (7.39) potemtakem predstavlja tudi povečanje tlaka zaradi ustavitve tekočine. S tem tlakom zaustavljena tekočina pritiska ob oviro in jo odriva. Velja tudi obratno: da **ovira zaustavi tok tekočine**, ki teče s hitrostjo v, **mora pritiskati obnjo z dinamičnim tlakom** $\varrho v^2/2$.

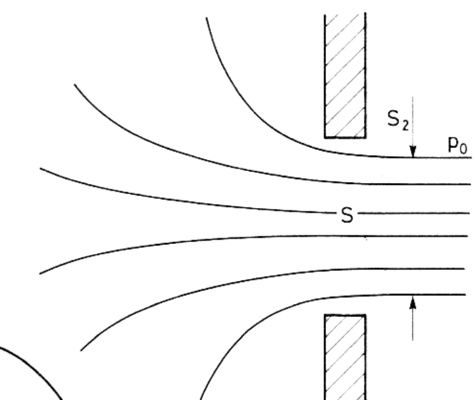
Mereč dinamični tlak, določimo hitrost nemotenega gibanja tekočine. Merimo s t. i. **Pitot-Prandtlovo cevjo** (slika 7.60), ki je pravzaprav manometer, prirejen za merjenje tlaka v tekočini. En krak manometra je v zvezi z zastojno točko (2), drugi pa s točko 1 v steni cevi, mimo katere tekočina teče čimbolj nemoteno, tako da je tam tlak p_0 nemotene tekočine. Višinska razlika (h) gladin živega srebra v manometru je merilo za dinamični tlak $\Delta p = \varrho v^2/2$. Manometer je običajno umerjen tako, da neposredno pokaže hitrost tekočine (npr. zraka). S Pitot-Prandtlovo cevjo merijo npr. hitrost letal.



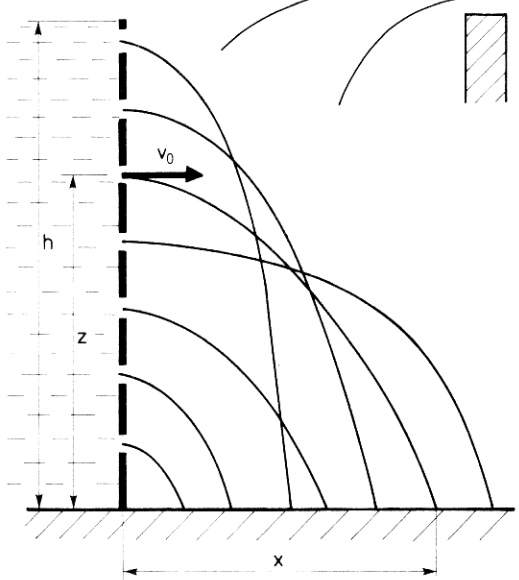
Slika 7.54



Slika 7.55



Slika 7.56



Slika 7.57

Pri merjenju tlaka p v tekočini moramo paziti, da ustje manometra ne zmoti tokovnic mimotekoče tekočine. Če je ustje obrnjeno proti toku (slika 7.60'a), izmerimo prevelik tlak (zakaj?), če je v smeri toka (slika 7.60'c), pa premajhen tlak. Pravi tlak p izmerimo v primeru b.

V zvezi z Bernoullijevo enačbo omenimo še nekaj praktično pomembnih primerov. Iz enačbe (7.40), ki velja za vodoravno pretakanje oziroma za pretakanje lahke tekočine (zanemarimo spremembo potencialne energije) sledi, da se **tlak tekočine zmanjša na mestih, kjer se hitrost poveča,** torej kjer **se prerez tokovne cevi zmanjša (tokovnice zgostijo).**

Postavimo lijak na glavo, vtaknimo vanj papirnat stožec in obenem močno pihnimo skozi tulec lijaka navzdol (slika 7.61a). Pričakovali bi, da stožec zaradi lastne teže in zaradi pihanja pade iz lijaka. Toda vpliv pihanja je ravno nasproten: stožec se dvigne in se skoraj prilepi ob notranjo steno lijaka (t. i. **hidrodinamični paradoks**). S pihanjem potiskamo zračni tok skozi ozko špranjo med lijakom in stožcem, kjer se tokovnice zgostijo. Tlak zraka od zgoraj na stožec se zato zmanjša, mirujoči zrak na spodnji strani stožca pa pritiska navzgor na stožec s praktično nespremenjenim tlakom. Rezultanta obeh zračnih pritiskov je usmerjena navzgor in je lahko (če pihamo dovolj močno) večja od teže stožca.

Zakrivljeni loputi, ki se lahko vrtita okrog vzporednih vodoravnih osi, nekoliko zbližamo in nato pihnemo navzdol skozi prostor med njima (slika 7.61b). Loputi se primakneta, čeprav se nam zdi, da bi se morali razmakniti. Tlak zraka na zoženem prostoru med loputama se zaradi pihanja zmanjša (ker se hitrost poveča) in zračni tlak z zunanjih strani potisne loputi skupaj.

Zmanjšanje tlaka zaradi povečane hitrosti pretoka na zoženem delu cevi izkoristimo za črpanje oziroma srkanje tekočine iz posode, npr. pri **vodni črpalki** (slika 7.62). Vodni curek teče skozi ozko šobo, ki se v sredini črpalke zoži, zaradi česar se tam tlak zmanjša. V bližini šobe nastane podtlak in okolišni plin (npr. zrak) se pomakne k šobi, kjer ga curek zagrabi in odnese s seboj. Z vodno črpalko lahko zmanjšamo tlak v posodi, ki je priključena nanjo, do nekaj mbar. Vodni črpalki podoben je **plinski (Bunsenov) gorilnik** (slika 7.63); pospešen tok gorilnega plina ob zoženem ustju šobe posrka okolišni zrak, ki je potreben za gorenje. Podobno delujejo različni **razpršilci** (»spray«, slika 7.64). Zaradi zmanjšanega tlaka v zoženem delu cevi (skozi katero pihamo) se tekočina v navpični cevi dvigne do ustja (dvigne jo zunanji zračni tlak p_0, ki pritiska na gladino tekočine v posodi), kjer jo zračni tok zagrabi in razprši.

Upor tekočine in dinamični vzgon

Zanima nas celotna sila, s katero tekočina z vseh strani pritiska na potopljeno telo. Če tekočina in telo v njej mirujeta, je ta sila **statični vzgon** (enak je teži izpodrinjene tekočine in ima smer navzgor, gl. str. 158). Brž ko se telo giblje skozi tekočino ali če tekočina teče mimo telesa, se porazdelitev tekočinskih tlakov vzdolž površine telesa spremeni. Celotno silo tekočine razstavimo na statični vzgon (ki je neodvisen od tega, ali tekočina oz. telo miruje ali ne) ter na **dinamično silo**, ki je neposredno odvisna od hitrosti telesa oziroma tekočine. V tem poglavju bomo obravnavali le zadnjo, to je zanima nas rezultanta tekočinskih pritiskov zaradi gibanja telesa oziroma tekočine.

Recimo, da tekočina teče stacionarno s stalno hitrostjo v. Ko zadene ob oviro (potopljeno telo), se tokovnice razdelijo in obidejo oviro. V idealni tekočini tokovnice povsem oblijejo oviro in se za njo zopet združijo, tako da tekočina z vseh strani pritiska na oviro (slika 7.65). Daleč naprej od ovire je potek tokovnic enak kot daleč pred oviro, tako da je **rezultanta dinamičnih pritiskov idealne tekočine na telo,** ki ga tekočina obliva, **nič**. To velja ne glede na obliko telesa. Pravimo, da **je upor idealne tekočine nič**. Telo med gibanjem skozi idealno tekočino ne čuti nobenega upora (t. i. **Eulerjev paradoks**).

Navadno nimamo opravka z idealnimi tekočinami, zato se nam ta pojav zdi nenavaden. Pač pa nekatere tekočine izgube viskoznost in postanejo idealne (t. i. suprafluidne), če jih ohladimo do ekstremno nizkih temperatur, nekaj K nad absolutno ničlo (npr. helij). Takšne tekočine tečejo skozi cevi praktično brez izgub (za njihov pretok ni potrebna tlačna razlika). Če s curkom suprafluidnega helija brizgamo stoječ kovanec, se ta zaradi curka ne prevrne.

Drugače je v realni (viskozni) tekočini. Vzdolž površine ovire se prilepi mejna plast tekočine, ki skupaj z oviro miruje. Zaustavljena plast zavira gibanje sosednjih plasti, oddaljene (hitro tekoče) plasti pa z viskoznimi silami vlečejo plasti ob oviri s seboj in tako zmanjšujejo pritisk tekočine na zadnji (nizvodni) strani ovire. Razen tega nastajajo za oviro vrtinci, ki se odlepljajo od nje in potujejo v smeri toka, tako da za oviro nastaja sled motenega toka tekočine tudi do velikih oddaljenosti (slika 7.66). Kinetična energija vrtincev se spotoma izgublja, zato je hitrost tekočine za oviro manjša kot pred njo. Zmanjšanje hitrosti tekočine povzroča sila, s katero se ovira upira mimo tekoči tekočini, ta pa je nasprotno enaka sili, s katero tekočina pritiska na oviro v smeri toka in ga vleče s seboj. Tej sili pravimo **upor tekočine** (**R**). Rezultanta pritiskov gibajoče se realne tekočine na telo ima vedno komponento (**R**) v smeri toka.

Če je telo simetrično in ga tokovnice simetrično obtekajo (kot na sliki 7.65), je upor **R** kar celotna rezultanta pritiskov gibajoče se tekočine na telo, ki ima tedaj smer toka tekočine. Kakršnakoli nesimetrija tokovnic v prečni smeri glede na tok, npr. da je telo nesimetrične oblike ali če leži nesimetrično glede na tok, tako da se tokovnice na eni strani (v prečni smeri) bolj zgostijo (in je zato dinamični tlak manjši) kot na drugi strani, pa povzroči še komponento sile v prečni smeri, t. i. **prečno silo** (**P**) ali **dinamični vzgon** (slika 7.67). Ta je pravokotna na smer toka in kaže v smer zgostitve tokovnic.

Celotna rezultanta pritiskov gibajoče se tekočine na potopljeno telo je potemtakem sestavljena iz upora **R** in iz prečne sile **P**. Prva je usmerjena vzdolž toka tekočine, druga pa je prečna glede na tok na eno ali drugo stran telesa, pač odvisno od poteka tokovnic mimo telesa. Če tekočina teče mimo telesa vodoravno in so tokovnice na zgornji strani telesa bolj zgoščene kot na spodnji, je prečna sila usmerjena navzgor in torej učinkuje kot dinamični vzgon (v isti smeri kot statični vzgon, le da je lahko precej večja od njega).

Viskozni upor

Pri počasnem gibanju teles v viskozni tekočini oziroma pri počasnem toku viskozne tekočine mimo teles je upor tekočine odvisen predvsem od viskoznosti tekočine, zato se tudi imenuje **viskozni upor** (R_v). Mejna plast tekočine ob površini telesa skupaj s telesom miruje in z viskoznimi silami zadržuje sosednje plasti. Te tečejo tem hitreje, čim bolj so oddaljene od telesa. Hitro tekoče oddaljene plasti prek vmesnih učinkujejo na telo ter ga vlečejo s seboj. Rezultanta teh sil v smeri tekočine je odvisna od tega, kako se hitrost spreminja s krajem v neposredni bližini telesa (gl. enačbo viskoznosti, 7.31). Izračunamo gradient hitrosti na vsakem mestu telesa ter ustrezno viskozno silo. Rezultanta projekcij teh sil v smeri toka tekočne je celoten viskozni upor R_v. Račun je kolikor toliko enostaven le za kroglasta telesa in če tekočina teče laminarno. Ker ta račun presega naš okvir, navajamo le rezultat (t. i. **Stokesov zakon**):

$$\boxed{R_v = 6\pi r\eta v} \tag{7.42}$$

Viskozna tekočina, ki teče s hitrostjo v, vleče kroglasto telo (polmer r) z viskoznim uporom $R_v = 6\pi r\eta v$. Ali drugače: da se kroglasto telo giblje skozi tekočino s hitrostjo v, mora premagovati viskozni upor $6\pi r\eta v$.

Primer:

Pokončna valjasta posoda s polmerom R = 5 cm je napolnjena z glicerinom. V posodo spustimo jekleno kroglico (polmer r = 5 mm) in opazujemo njeno padanje. Kako se hitrost kroglice spreminja s časom, če predpostavimo viskozni upor? Čez nekaj časa kroglica pada s stalno hitrostjo v_0 = 20 cm/s. Kolikšna je viskoznost glicerina? Gostota jekla je ϱ = 7,8 g/cm^3, glicerina pa ϱ_0 = 1,3 g/cm^3.

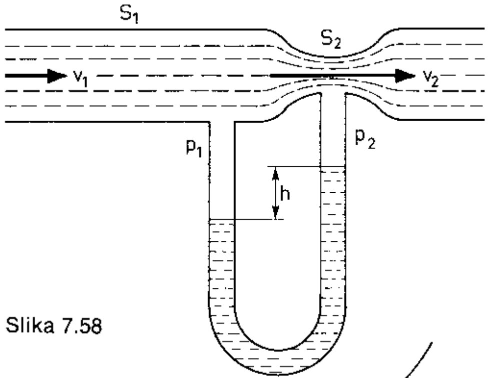
Na kroglico v glicerinu učinkujeta teža kroglice ($mg = \varrho g \cdot 4\pi r^3/3$) navzdol in statični vzgon ($F_{vz} = \varrho_0 g \cdot 4\pi r^3/3$) navzgor. Ker kroglica pada, upoštevamo tudi viskozni upor $R_v = 6\pi r\eta v$, ki nasprotuje padanju. V začetku, ko je hitrost kroglice še dovolj majhna, da lahko viskozni upor zanemarimo (v primerjavi s težo kroglice), pada kroglica enakomerno pospešeno s pospeškom $a_0 = g(1 - \varrho_0/\varrho)$. Ker narašča hitrost, narašča tudi viskozni upor, zato se pospešek padanja zmanjšuje. Čez nekaj časa se upor praktično izenači z razliko teže in vzgona in kroglica pada naprej enakomerno s stalno hitrostjo v_0, za katero velja:

$$6\pi r\eta v_0 = (4\pi r^3/3)\,(\varrho - \varrho_0)g \quad \text{ali}$$
$$v_0 = 2r^2(\varrho - \varrho_0)g/9\eta$$

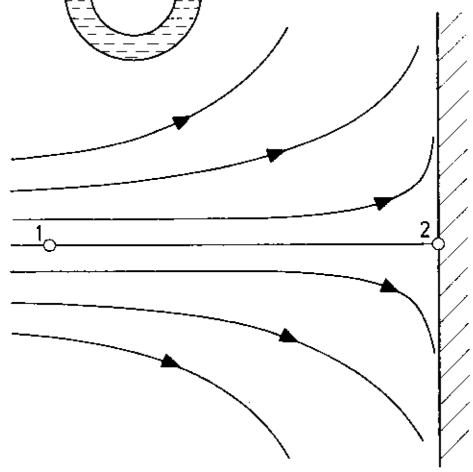
Mereč hitrost v_0 enakomernega padanja kroglice v glicerinu, določimo viskoznost glicerina: $\eta = 2r^2(\varrho - \varrho_0)g/9v_0$ = 1,77 kg/ms.

Poglejmo, kako se hitrost (v) padanja kroglice spreminja s časom. Po času t od začetka pada kroglica s hitrostjo v; nanjo deluje rezultanta teže, vzgona in viskoznega upora, ki določa njen pospešek a:

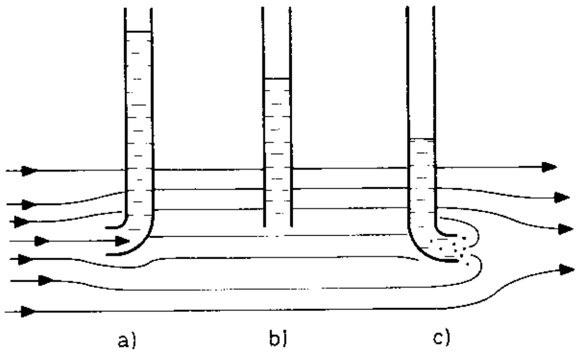
$$mg - F_{vz} - R_v = ma \text{ ali}$$
$$(4\pi r^3/3)\,(\varrho - \varrho_0)g - 6\pi r\eta v = m \cdot dv/dt \text{ ali}$$
$$\alpha dt = dv/(v_0 - v)$$

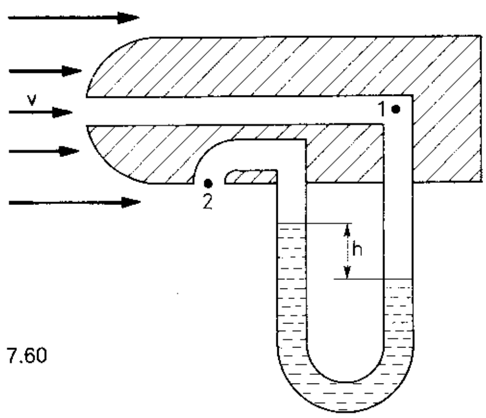


Slika 7.58

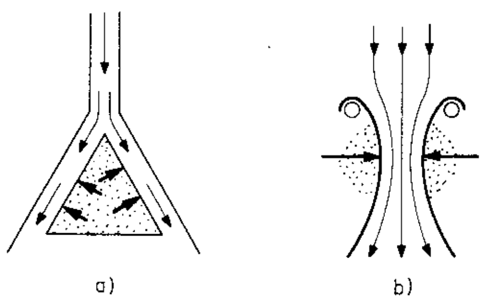


Slika 7.59





Slika 7.60



Slika 7.61

kjer je $\alpha = 9\eta/2r^2\varrho = g(\varrho - \varrho_0)/\varrho v_0 = 42/s$. Dobljeno diferencialno enačbo integriramo od začetka $t = 0$, ko je $v = 0$, do poljubnega trenutka t. Dobimo:

$$\ln(v_0) - \ln(v_0 - v) = \alpha t \text{ ali}$$
$$v = v_0[1 - \exp(-\alpha t)] \qquad (7.43)$$

Graf te funkcije je na sliki (7.68); podoben je grafu na sliki (1.20). Za $t \ll 1/\alpha$ lahko zapišemo $\exp(-\alpha t) \approx 1 - \alpha t$ in $v \approx v_0(1 - 1 + \alpha t) = v_0\alpha t = gt(\varrho - \varrho_0)/\varrho$, kar že poznamo. Hitrost v se eksponentno približuje končni hitrosti v_0; za 1‰ se ji približa po času t_1: $v(t_1) = 0{,}999\, v_0 = v_0[1 - \exp(-\alpha t_1)]$ ali $t_1 = (\ln 1000)/\alpha = 0{,}2$ s. Torej kroglica pada praktično enakomerno že po času 0,2 s od začetka.

Pri zgornjem računu smo zanemarili vpliv stene posode. Stena namreč prek mejne plasti zadržuje padanje kroglice in tako navidezno povečuje viskozni upor. Dobljena viskoznost je zato previsoko ocenjena. Empirično so ugotovili, da je prava (korigirana) viskoznost manjša od zgoraj dobljene za korekturni faktor $(1 - r/R)^{9/4}$, kjer je R polmer posode. V našem primeru je prava viskoznost enaka: $1{,}77\ \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1} \cdot (1 - 0{,}1)^{2{,}25} = 1{,}4$ kg/ms.

Dinamični upor

Pri velikih hitrostih in malo viskoznih tekočinah je za upor tekočine bolj kot vpliv viskoznosti odločilen dinamični učinek, da telo moti potek tokovnic, da tokovnice zakrivlja in da spreminja hitrost tekočine. Če bi se tekočina pred ploščatim telesom ustavila, mimo njega pa tekla nemoteno naprej (slika 7.69a), bi se tlak tekočine ob telesu povečal za dinamični tlak $\varrho v^2/2$ (gl. 7.41) in tekočina bi odrivala telo s silo $S\varrho v^2/2$, pri čemer je S prečni prerez telesa. Telo dejansko ni ploščato in tekočina se ob njem ne ustavi povsem, pač pa ga tokovnice obidejo in na zadnji strani nastajajo vrtinci (slika 7.69b). Izkušnje kažejo, da lahko za dinamični upor kljub temu uporabljamo približen izraz $S\varrho v^2/2$, le da moramo dodati korekturni faktor c_u (t.i. koeficient upora):

$$\boxed{R_d = c_u S\varrho v^2/2} \qquad (7.44)$$

Koeficient upora c_u (brezdimenzijsko število) je odvisen od oblike in velikosti telesa, v splošnem pa tudi od hitrosti in viskoznosti tekočine (gl. str. 176). Kar se oblike telesa tiče, je odločilna predvsem zadnja stran, kjer nastajajo vrtinci. Čim močnejši vrtinci nastajajo, tem večji je koeficient upora. Telo z aerodinamično obliko ima majhen koeficient upora, ribji profil npr. 0,02, letalsko krilo pa od 0,05 do 0,10. Na sliki (7.70) so označeni koeficienti upora za nekatera tipična telesa. Površina S je prečni prerez telesa, to je senca telesa (v smeri toka) na ravnino, ki je pravokotna na tok. Hitrost v v enačbi (7.44) je relativna hitrost telesa glede na tekočino, to je razlika hitrosti telesa in tekočine, npr. hitrost telesa, ki se giblje skozi mirujočo tekočino, ali hitrost tekočine, ki teče mimo mirujočega telesa.

Dinamični upor vetra (zračni upor) je lahko zelo velik, posebno pri velikih hitrostih (orkan). Zmanjšamo ga, če se postavimo bočno proti vetru, da je prečni prerez S čim manjši in da čim manj zmotimo potek tokovnic; predvsem moramo oslabiti vrtince na zadnji strani telesa. Boljše je, da nastaja več manjših vrtincev po celotni površini telesa kot nekaj večjih na zadnji strani. Zaradi tega je teniška žoga hrapava, žogica za golf pa ima polno vdolbinic. Pri smučarskih skakalcih in kolesarjih sta v zvezi z zračnim uporom pomembni tudi vrsta in kvaliteta oblačila. Ptice ujede jadrajo z razprtimi perutmi, tako da so peresa na koncu kril razmaknjena; namesto enega močnega vrtinca nastajajo z vsakega peresa manjši.

Primera:

1. S kolikšno stalno hitrostjo pada padalec z maso $m = 70$ kg, ki visi na kupolastem padalu s polmerom $R = 2$ m? Koeficient upora padala je $c_u = 1{,}4$, gostota zraka je $\varrho = 1{,}3\ \text{kg/m}^3$.

Na začetku pada padalec pospešeno toliko časa, dokler se zračni upor (ki raste s kvadratom hitrosti) ne izravna s težo padalca (statični vzgon v zraku zanemarimo), nakar pada s stalno hitrostjo v, ki jo izračunamo iz enačbe:

$$mg = R_d = c_u \cdot \pi R^2 \cdot \varrho v^2/2 \quad \text{ali}$$

$$v = \sqrt{2\,mg/(c_u\varrho\pi R^2)} = 7{,}8\ \text{m/s} = 28\ \text{km/h}$$

2. Avtomobil vozi po vodoravni cesti s stalno hitrostjo $v = 72$ km/h, pri čemer njegov motor dela z mehansko močjo $P = 4$ kW. Kolikšen je koeficient upora avtomobila, če je prečni prerez $S = 2{,}2\ \text{m}^2$? Trenje zanemarimo.

$$P = Fv = R_d v = c_u S\varrho v^3/2 \quad \text{ali}$$
$$c_u = 2P/(S\varrho v^3) = 0{,}35$$

Prečna sila – dinamični vzgon

Dinamični vzgon (**P**) je projekcija rezultante tekočinskih pritiskov na telo v smeri pravokotno na tok tekočine. Nastane zaradi nesimetričnega poteka tokovnic mimo telesa (gl. sliko 7.67), ker se tokovnice na eni strani (glede na tok) bolj zgostijo (in tlak zmanjša) kot na drugi. Dinamični vzgon potiska telo prečno glede na tok tekočine, v smeri zgostitve tokovnic (slika 7.71).

Podobno kot dinamični upor R_d tudi dinamični vzgon P računamo z enačbo (7.44):

$$\boxed{P = c_v S\varrho v^2/2} \qquad (7.45)$$

le sorazmernostni faktor je tu **koeficient dinamičnega vzgona** (c_v), ki je odvisen od oblike telesa in od njegove lege glede na tok tekočine. Čimbolj je telo nesimetrično oziroma čimbolj nesimetrično ga obteka tekočina, tako da se tokovnice na eni strani čimbolj zgostijo, na drugi strani pa čimbolj razredčijo, tem večji je koeficient c_v dinamičnega vzgona. Pri letalskem krilu je c_v odvisen od oblike krila in od njegovega naklona glede na smer leta, običajno znaša od 0,5 do 1,0. Če se krilo nagne glede na smer leta, se c_v poveča, toda obenem se poveča tudi c_u. Razmerje c_v/c_u je enako razmerju P/R_d (gl. enačbi 7.44,45), ki podaja strmino rezultante F glede na smer gibanja (gl. sliko 7.71).

Najboljši je tak naklon krila, pri katerem je razmerje c_v/c_u največje (pri katerem je rezultanta F dinamičnih pritiskov tekočine na krilo najbolj strma).

Primer:

Letalo ima maso $m = 15.000$ kg, prečni prerez letalskih kril je $S = 6\ \mathrm{m}^2$, koeficient dinamičnega vzgona je $c_v = 0{,}6$. Približno pri kateri hitrosti na vodoravni vzletni stezi se letalo odlepi od tal? Gostota zraka je $\varrho = 1{,}3\ \mathrm{kg/m}^3$.

Dinamični vzgon mora biti vsaj enak teži letala: $P = mg$ ali

$$c_v S \cdot \varrho v^2/2 = mg$$

$$v^2 = 2\,mg/c_v \varrho S = 6{,}4.10^4\ \mathrm{m^2/s^2}, \qquad v = 250\ \mathrm{m/s}$$

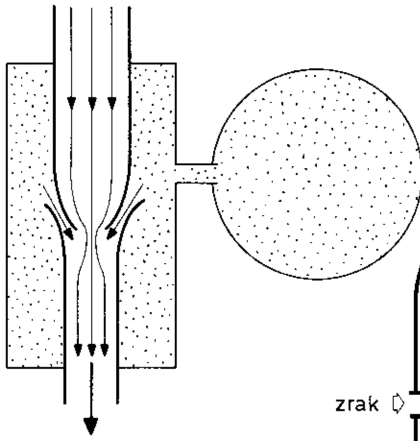
Dinamični vzgon omogoča, da se letala na propeler dvignejo v zrak (čeprav so specifično težja od zraka), učinkuje pa tudi neprijetno. V planinah ter v krajih z močno burjo lahko veter dvigne strehe s hiš. Hiša moti potek tokovnic. Te se nad slemenom zgostijo, tlak zraka od zgoraj na streho se zmanjša, tlak mirujočega zraka v podstrešju pa se praktično ne spremeni; nastane rezultanta zračnih pritiskov v smeri navzgor, ki je lahko večja (če je veter dovolj močan) od teže strehe.

V bližini tira, po katerem drvi brzi vlak, ne smemo stati. Vlak vleče s seboj zračne plasti, tokovnice se ob naši oviri zgostijo, zračni tlak se zmanjša in zračni tlak z zunanje strani nas potisne k vlaku, kjer nas nato zagrabi zračni tok.

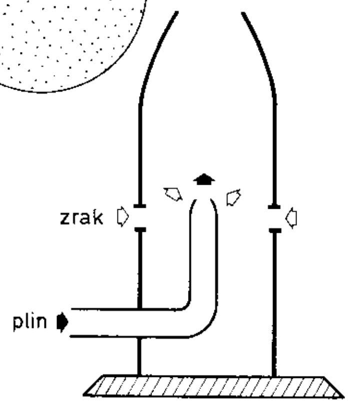
Lahka žoga »visi« na spodnji strani močnega zračnega curka, ki teče poševno navzgor (slika 7.72). Hitrost zraka je največja na sredini curka (kjer so tokovnice najgostejše), proti robu pa pada. Spodnji in zunanji (počasnejši) zrak pritiska od spodaj navzgor na žogo z večjim tlakom kot zgornji in notranji (hitrejši) pritiska nanjo od zgoraj navzdol.

Nesimetričnost obtekanja tokovnic ojačimo, če se telo med gibanjem skozi tekočino vrti okrog osi, pravokotno na smer gibanja. Recimo, da se težišče telesa giblje v desno, telo pa se obenem vrti okrog osi pravokotno na ravnino lista (slika 7.73a). Kar se tekočinskih pritiskov tiče, je enako, kot če težišče telesa miruje, tekočina pa teče enako hitro mimo njega v nasprotni smeri (v levo). Vrteče se telo vrti (zaradi viskoznih sil) okolišne tekočinske plasti. Hitrost tekočinskih plasti v okolici telesa je zato sestavljena iz hitrosti zaradi gibanja težišča in iz hitrosti zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče. Vidimo, da se ti hitrosti na zgornji strani telesa (gl. sliko 7.73b) seštevata, na spodnji strani pa odštevata. Tlak na zgornji strani se torej zmanjša, na spodnji pa poveča. Nastane prečna sila, ki zavija tirnico gibanja navzgor. Smer prečne sile se obrne, če se spremeni smisel vrtenja telesa. Ta pojav (t. i. **Magnusov efekt**) izkoriščajo igralci z žogo, predvsem pri namiznem tenisu (top spin). Vrteča se žoga se giblje skozi zrak povsem drugače, kot če se ne vrti; tudi odbije se drugače (slika 7.74).

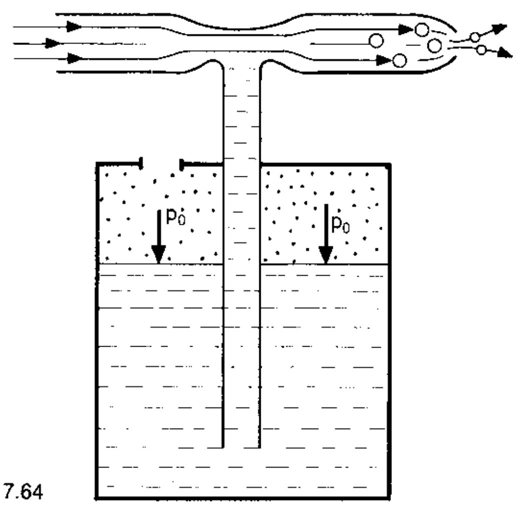
Zavrtimo kroglo z veliko kotno hitrostjo okrog vodoravne osi in jo spustimo, da pade v vodo. V kateri smeri se giblje skozi vodo?



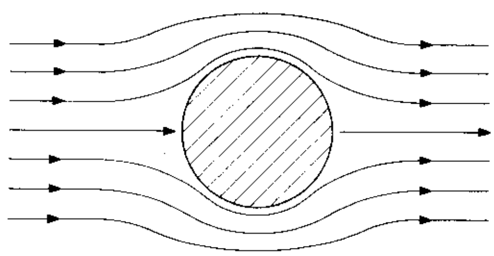
Slika 7.62



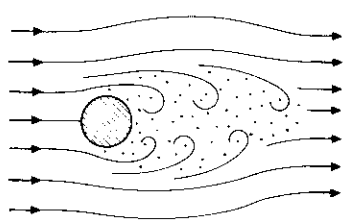
Slika 7.63



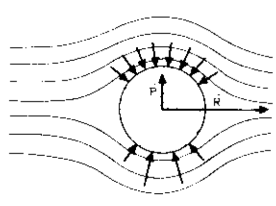
Slika 7.64



Slika 7.65



Slika 7.66



Slika 7.67

Dodatna cirkulacija zraka se pri letalskem krilu ustvari na tankem delu krila, kjer so pomične lopute, ki so ob vzletu zakrivljene navzdol. Ob ostrem robu loput nastane vrtinec, to je dodatna cirkulacija zraka v narisani smeri (slika 7.75). To vrtinčenje zraka zapušča letalo s konice krila in zaostaja za njim (slika 7.76). Na zunanji strani obeh vrtinčnih cest, ki jih letalo pušča za seboj, se zrak dviguje, na zunanji pa spušča (vrtinci na vzletni stezi po vzletu letala). Divje race in gosi na svojem vsakoletnem poletu proti jugu lete v značilni V-formaciji. Najmočnejša je na čelu in ustvarja vrtinčni cesti, ki jih naslednje izkoriščajo, da laže lete.

Kakšno ugodnost ima kolesar, ki vozi za tovornjakom?

Reynoldsovo število (Re)

Re je brezdimenzijsko (čisto) število, definirano z enačbo:

$$\boxed{Re = d\varrho v/\eta} \tag{7.46}$$

pri čemer je v hitrost tekočine (oz. telesa), η in ϱ viskoznost in gostota, d pa je karakteristična dolžina telesa (npr. premer krogle). Vedeti moramo, na katero dolžino se izračunano Reynoldsovo število nanaša. Količnik viskoznosti (η) in gostote tekočine (ϱ) se pogosto označi z ν in se imenuje **kinematična viskoznost:**

$$\boxed{\nu = \eta/\varrho}$$

Z njeno pomočjo izrazimo Reynoldsovo število tudi takole:

$$\boxed{Re = vd/\nu} \tag{7.46a}$$

Reynoldsovo število se izkaže kot zelo koristen pripomoček, ki pomaga presoditi, ali je pri danem gibanju tekočine odločilen viskozni ali dinamični učinek. Pri počasnem gibanju majhnih teles v močno viskozni tekočini je *Re* majhen (npr. manjši od 1). Velik Re pa dobimo pri hitrem gibanju velikih teles v malo viskozni tekočini. **Velik Re** (npr. več 1000) torej pomeni, da lahko **viskozni učinek zanemarimo, pomembni so dinamični učinki.** Nasprotno: **pri majhnih Reynoldsovih številih** (npr. < 1), dinamični učinek zanemarimo in upoštevamo le viskoznost. Ko merimo upor tekočine na modelu telesa v vetrovniku, moramo paziti, da je Re za model enak kot pri pravem telesu. Le tedaj se merski podatki, dobljeni na modelu, nanašajo tudi na pravo telo.

Merjenje upora zraka (na modelu telesa v vetrovniku) pokaže, da je koeficient upora odvisen neposredno od Reynoldsovega števila. Eksperimentalni podatki za kroglasto telo so prikazani na sliki (7.77); c_u in *Re* sta nanesena v logaritemski skali. Za $Re < 0{,}5$ je koeficient upora dan z enačbo:

$$c_u = 24/Re \quad \text{za} \quad Re < 0{,}5$$

kar pomeni, da je upor tekočine v tem območju dan z enačbo:

$$R = c_u \cdot \pi r^2 \cdot \varrho v^2/2 = (24\eta/2r\varrho v) \cdot \pi r^2 \cdot \varrho v^2/2 = 6\pi r\eta v = R_v$$

in je torej viskozni upor (7.42). Sledi, da je **upor tekočine dan z viskoznim uporom, če je Re $< 0{,}5$.** S slike tudi razberemo, da je pri $Re > 1000$ koeficient upora praktično konstanten ($= 0{,}4$ za kroglo) in torej lahko uporabimo dinamični upor s konstantnim koeficientom upora.

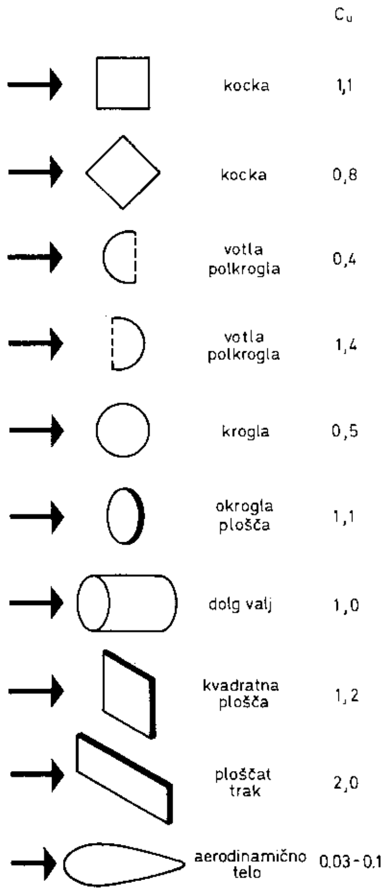
Reynoldsovo število nastopa pri vseh pretakanjih viskozne tekočine, npr. tudi pri pretakanju po valjasti cevi. Zaradi viskoznosti je za pretok tekočine po cevi potrebna tlačna razlika Δp. Za počasno (laminarno) pretakanje tekočine smo izpeljali izraz (7.35): $\Delta p = 32\eta L v/d^2$, kjer je v povprečna hitrost tekočine, d pa premer cevi ($= 2R$). Pri večjih hitrostih pretakanje ni več laminarno in prečni profil hitrosti ni več paraboličen, ampak postane turbulentno s približno enakomernim profilom hitrosti prek prereza. Tlačno razliko Δp za turbulentno pretakanje tekočine po cevi določimo eksperimentalno. Navadno jo pišemo v obliki:

$$\Delta p = \lambda(L/d)(\varrho v^2/2) \tag{7.47}$$

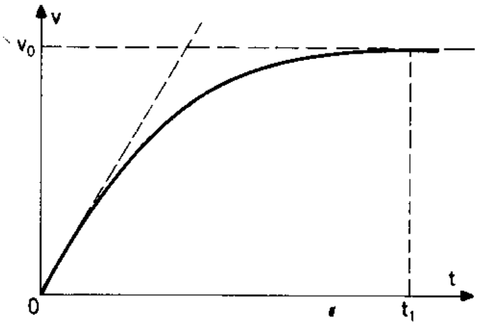
kjer je λ brezdimenzijski parameter, ki je odvisen od Reynoldsovega števila. Za $Re > 2300$ lahko merske rezultate združimo v enačbo: $\lambda = 0{,}32/\sqrt[4]{Re}$ (za cevi z gladko notranjo steno), za $Re < 2300$ pa lahko uporabimo (ne glede na hrapavost sten) odvisnost $\lambda = 64/Re$, kar pomeni, da velja rezultat (7.35), dobljen za laminarni pretok:

$$\Delta p = (64/Re)(L/d)(\varrho v^2/2) = 32\eta L v/d^2$$

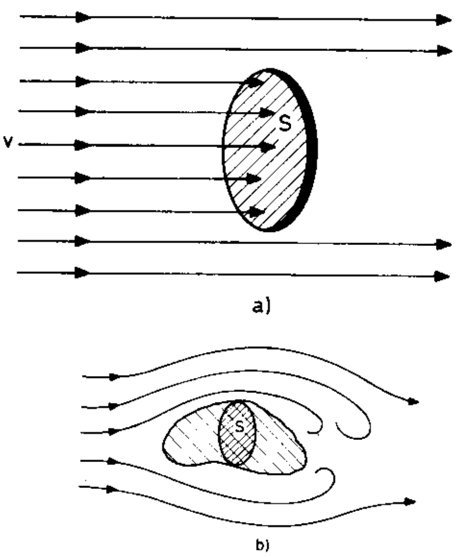
Pretakanje viskozne tekočine po valjasti cevi potemtakem lahko obravnavamo kot laminarno, če je $Re < 2300$.



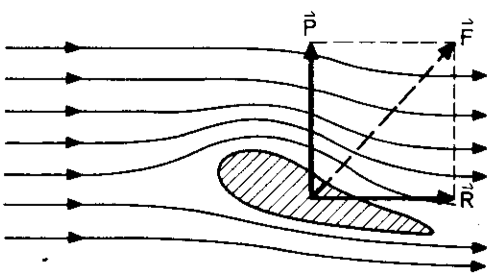
Slika 7.70



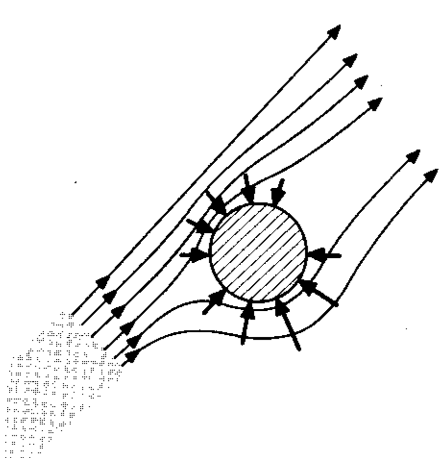
Slika 7.68



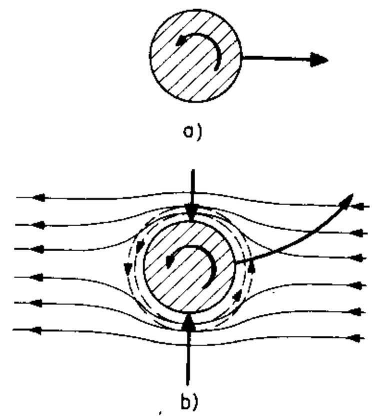
Slika 7.69



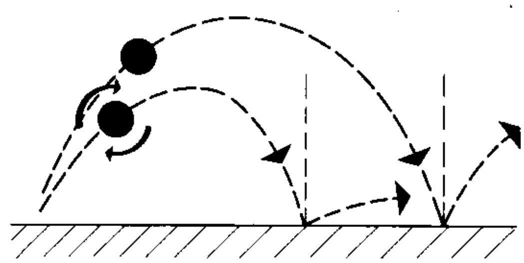
Slika 7.71



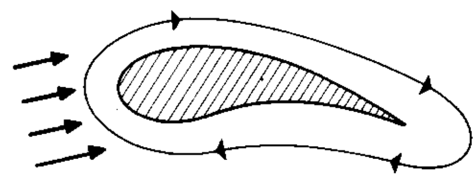
Slika 7.72



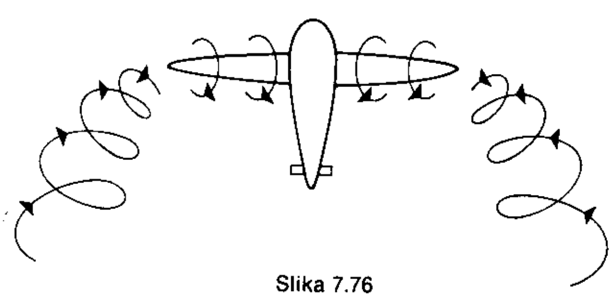
Slika 7.73



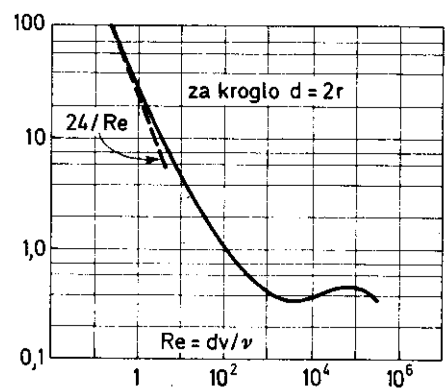
Slika 7.74



Slika 7.75



Slika 7.76



Slika 7.77