5. NIHANJE

V poglavju premo gibanje (str. 14) smo obravnavali nihanje kot primer premega gibanja; obravnavali smo ga s kinematičnega stališča, iskali smo časovne funkcije odmika telesa iz ravnovesne lege, njegove hitrosti in njegovega pospeška. V tem poglavju bomo predstavo o nihanju poglobili in posplošili in se zanimali tudi za energijske spremembe.

Telo lahko niha le okrog stabilne ravnovesne lege (gl. str. 98). Nanj mora učinkovati konservativna sila, ki ga veže na to lego, npr. sila prožnosti pri vzmetnem nihalu, teža pri težnem itd. Med nihanjem opravlja konservativna sila delo, ki ga obravnavamo kot spremembo potencialne energije telesa. Kako telo niha, je odvisno od tega, kako se **potencialna energija telesa** spreminja z odmikom (x) iz ravnovesne lege.

Na sliki (5.1) je skiciran splošen potek potencialne energije $W_p(x)$ telesa v odvisnosti od odmika x iz stabilne ravnovesne lege. V sami ravnovesni legi ($x = 0$) je **minimum** potencialne energije; običajno vzamemo: $W_p(0) = 0$. Kakršenkoli odmik telesa iz te lege pomeni povečanje potencialne energije.

Nihajoče telo (nihalo), ki je prepuščeno samo sebi, se slej ko prej pomiri in obmiruje v stabilni ravnovesni legi, v kateri je njegova potencialna energija najmanjša. Če telo izmaknemo iz te lege (npr. za amplitudo x_0), moramo opraviti delo, potrebno za povečanje potencialne energije telesa od 0 na $W_p(x_0)$ (da premagamo konservativno silo, ki nasprotuje odmiku telesa iz ravnovesne lege). Potrošeno delo $W_p(x_0)$ obdrži telo v obliki povečane potencialne energije in to je zaloga energije, s katero se prične nihanje:

$W = W_p(x_0)$ **začetna energija nihajočega telesa.**

Med približevanjem ravnovesni legi se potencialna energija zmanjšuje, kinetična pa povečuje. Če zanemarimo energijske izgube zaradi nekonservativnih sil (trenje, upor), se kinetična energija poveča za toliko, kolikor se zmanjša potencialna, tako da se vsota kinetične in potencialne energije ne spremeni – je enaka začetni energiji nihala (W). Pri odmiku x se telo giblje s hitrostjo v. Velja:

$$mv^2/2 + W_p(x) = W_p(x_0) = W \qquad (5.1)$$

V ravnovesni legi ($x = 0$) se potencialna energija zmanjša na nič: $W_p(0) = 0$ in tedaj ima telo največjo kinetično energijo $mv_0^2/2$, pri čemer je v_0 hitrost, s katero telo švigne skozi ravnovesno lego:

$$mv_0^2/2 = W_p(x_0) = W \qquad (5.2)$$

V ravnovesni legi je vsa energija nihala naložena v obliki kinetične. S to energijo se telo zažene skozi ravnovesno lego in se začne na drugi strani oddaljevati od nje, pri čemer se njegova potencialna energija povečuje in kinetična zmanjšuje, dokler se nihalo pri $x = -x_0$ ne ustavi in je spet vsa njegova energija v obliki potencialne itd. **Med nihanjem se** torej **potencialna energija spreminja v kinetično** (ko se telo približuje ravnovesni legi), **kinetična pa v potencialno** (ko se telo oddaljuje od nje). To medsebojno prelivanje energije iz ene oblike v drugo se dogaja s točno določeno frekvenco (ω), ki je **lastna frekvenca nihala** in je značilna za nihalo.

Nihanje nihala lahko na sliki **potencialnega lonca** (5.1) predstavimo z vodoravno (črtkano) črto na »višini« W in rečemo, da nihalo niha v potencialnem loncu na »višini« W, s čimer izrazimo njegovo energijo. Čim večja je njegova energija W, tem večja je amplituda nihanja (x_0).

Način nihanja nihala (kako se odmik x spreminja s časom) je odvisen od oblike potencialnega lonca, od tega, kako se potencialna energija W_p spreminja s krajem v soseščini stabilne ravnovesne lege. Na strani 16 smo obravnavali posebno vrsto nihanja, t. i. **harmonično nihanje**, pri katerem je odmik x sinusna ali kosinusna funkcija časa:

$$\boxed{x(t) = x_0 \sin(\omega t)} \qquad \text{(gl. 1.29)}$$

Za takšno nihanje velja:

$$v = dx/dt = x_0\omega\cos(\omega t) = v_0\cos(\omega t), \quad v_0 = x_0\omega$$

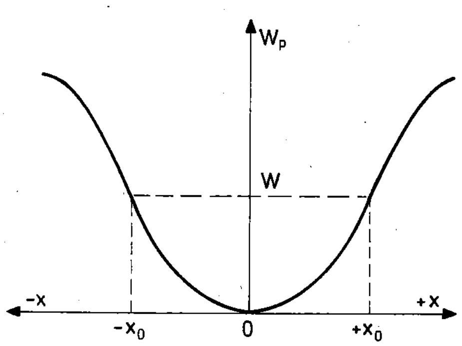
ali

$$v^2 = v_0^2(1 - x^2/x_0^2) = \omega^2(x_0^2 - x^2) \qquad \text{(gl. 1.27)}$$

oziroma:

$$mv^2/2 = (m/2)\omega^2\,(x_0^2 - x^2) \quad \text{ali}$$
$$mv^2/2 + (m\omega^2/2)x^2 = (m\omega^2/2)x_0^2$$

Primerjava te enačbe s splošno energijsko enačbo nihanja (5.1) pokaže, da **imamo harmonično nihanje**, če je **potencialna energija kvadratna funkcija odmika**: $W_p(x) = (m\omega^2/2)x^2$ (5.3)



Slika 5.1

Tedaj je največja hitrost v_0, s katero nihalo zaniha skozi ravnovesno lego, dana z enačbo:

$$mv_0^2/2 = W_p(x_0) = (m\omega^2/2)x_0^2 \quad \text{ali}$$

$$\boxed{v_0 = x_0\omega}$$

Največja hitrost je premo sorazmerna z največjim odmikom, kar je značilno za harmonično nihanje.

Telo v paraboličnem potencialnem loncu niha harmonično. Če se potencialna energija spreminja s kvadratom odmika iz stabilne ravnovesne lege, je nihanje harmonično. Vzmetno nihalo je že te vrste (vsaj v mejah prožnosti deformacije vzmeti).

Nihala

V splošnem je potencialna energija nihala poljubna funkcija odmika. Če je ta odvisnost kolikor toliko pohlevna, da obstajajo prvi in višji odvodi po odmiku, lahko $W_p(x)$ izrazimo s potenčno (Taylorjevo) vrsto:

$$W_p(x) = W_p(0) + \frac{x}{1!}(dW_p/dx)_0 + \frac{x^2}{2!}(d^2W_p/dx^2)_0 + \frac{x^3}{3!}(d^3W_p/dx^3)_0 + \ldots \qquad (5.4)$$

Ker je v ravnovesni legi $W_p(0) = 0$ in $dW_p/dx = 0$ (gl. 4.31), se zgornja vrsta poenostavi v:

$$W_p(x) = \frac{x^2}{2}(d^2W_p/dx^2)_0 + \frac{x^3}{6}(d^3W_p/dx^3)_0 + \ldots$$

Pri majhnih odmikih x telesa iz ravnovesne lege lahko člene z x^3, x^4, ... zanemarimo v primerjavi s prvim členom (z x^2) in v tem približku je potencialna energija kvadratna funkcija odmika:

$$W_p(x) \approx \frac{1}{2}(d^2W_p/dx^2)_0 x^2 \qquad (5.3)$$

Sledi, da **vsako nihalo pri majhnih odmikih** (to je v neposredni okolici stabilne ravnovesne lege) **niha harmonično.**

Drugi odvod potencialne energije po odmiku (ta je pozitiven, ker se nanaša na stabilno ravnovesno lego, gl. 4.32a) **določa lastno frekvenco nihala** (gl. 5.3):

$$\omega^2 = (1/m)(d^2W_p/dx^2)_0 \qquad (5.6)$$

Čim plitvejši je potencialni lonec (manj zakrivljena jama), tem manjša je lastna frekvenca nihala v tem loncu.

Vzmetno nihalo

sestavlja telo (masa m), privezano na lahko prožno vzmet. Obravnavali smo ga na strani 44in v poglavju o prožnostni energiji (str. 97). Če je to nihalo na vodoravni podlagi, tako da niha v vodoravni smeri (slika 2.31), je njegova potencialna energija prožnostna energija vzmeti (gl. 4.29):

$$W_p = kx^2/2$$

kjer je k konstanta prožnosti vzmeti. Torej vzmetno nihalo niha harmonično (ne glede na odmik x) z lastno frekvenco (gl. 5.6):

$$\boxed{\omega = \sqrt{k/m}} \qquad (gl.\ 2.26)$$

Telo, viseče na prožni vzmeti, katere drugi konec je pritrjen na strop (slika 2.29), ravno tako niha harmonično z lastno frekvenco $\omega = \sqrt{k/m}$, le da njegova ravnovesna lega ni pri x = 0 temveč pri $x = x_1 = mg/k$ (gl. str. 43).

Primer:

Telo z maso m = 200 g pritrdimo na visečo prožno vzmet (k = 20 N/m), ki visi s stropa. Spustimo ga z višine, na kateri vzmet ni ne raztegnjena, ne skrčena. S kolikšno amplitudo in frekvenco niha?

$$\omega = \sqrt{k/m} = 10/s$$
$$x_0 = x_1 = mg/k = 10\ cm$$

Ko se telo spusti do ravnovesne lege $x_1 = mg/k$, je njegova kinetična energija največja ($mv_0^2/2$) in enaka:

$$mv_0^2/2 = mgx_1 - kx_1^2/2 = (mg)^2/2k \quad \text{ali}$$
$$v_0 = g\sqrt{m/k} = g/\omega = \omega x_0 \qquad (gl.\ 1.28)$$
$$x_0 = g/\omega^2 = mg/k = x_1$$

Sučno (polžasto) nihalo

je sestavljeno iz telesa z vztrajnostnim momentom J, ki se lahko vrti okrog stalne osi (vpete v ležaje). Na isti osi je pritrjena sučna (polžasta) vzmet (slika 5.2). Da se ta vzmet zasuče za kót φ, je potreben navor:

$$\boxed{M = D\varphi}$$

ki je premo sorazmeren s kotom zasuka. D je **sučna konstanta** vzmeti; odvisna je od debeline in velikosti vzmeti ter od njenih elastičnih lastnosti (gl. 6. 23). Navor M opravlja med sukanjem vzmeti delo (gl. 4.5):

$$A = \int M d\varphi = D\int \varphi d\varphi = D\varphi^2/2$$

ki se nalaga v prožnostno energijo zasukane vzmeti:

$$W_{pr} = D\varphi^2/2 \qquad (5.7)$$

(Primerjaj podoben izraz za prožnostno energijo vijačne vzmeti, gl. 4.29). To je potencialna energija sučnega nihala, in ker se spreminja s kvadratom odmika iz ravnovesne lege (kót φ), je to nihalo harmonično.

Nihanje sučnega nihala sprožimo tako, da telo z vzmetjo vred zasučemo za amplitudo φ_0, s čimer vložimo v vzmet prožnostno energijo $D\varphi_0^2/2$. Ko nihalo spustimo, se začne prožnostna energija sproščati in spreminjati v kinetično (rotacijsko) $J\Omega^2/2$ (kotno hitrost vrtenja smo tu označili z Ω namesto z ω kot navadno, da oznaka ne sovpada z lastno frekvenco nihala). Ko nihalo zaniha skozi ravnovesno lego (φ = 0, v kateri vzmet ni zasukana ne v eni ne v drugi smeri), ima največjo kinetično energijo $J\Omega_0^2/2$. Velja:

$$J\Omega_0^2/2 = D\varphi_0^2/2 \quad \text{ali}$$
$$\Omega_0 = \varphi_0\sqrt{D/J}$$

Kar velja za vzmetno nihalo, velja tudi za sučno: odmik x nadomestimo s φ, hitrost v pa s kotno-hitrostjo Ω. Torej lahko zapišemo:

$$\Omega_0 = \omega\varphi_0$$

kjer je ω lastna frekvenca sučnega nihala:

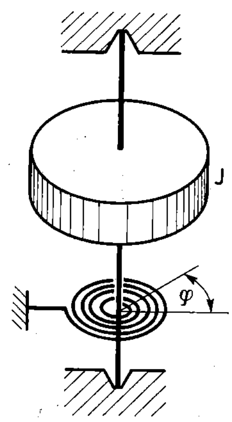
$$\omega = \sqrt{D/J} = 2\pi/t_0 \quad \text{ali}$$

$$\boxed{t_0 = 2\pi\sqrt{J/D}} \qquad (5.8)$$

Sučno nihalo niha tem hitreje (s tem krajšim nihajnim časom), čim manjši je vztrajnostni moment nihajočega telesa in čim večja je sučna konstanta vzmeti (čim močnejša je vzmet).

Sučno nihalo se uporablja pri žepnih in ročnih urah. Nihajni čas tega nihala je namreč precej stalen; spremeni se le, če se spremeni sučna konstanta vzmeti ali vztrajnostni moment nihalke (npr. pri večjih temperaturnih spremembah, zaradi mehanskih udarcev ali v bližini močnih magnetov, ko se spremene geometrija in elastične lastnosti nihalke in vzmeti).

S sučnim nihalom lahko **merimo vztrajnostni moment** togih teles. Nihalo je opremljeno z vodoravno okroglo mizico, ki se vrti skupaj z vzmetjo. Izmerimo nihajni čas nihala s prazno mizico in nato še nihajni čas, ko na mizico položimo telo, katerega vztrajnostni moment želimo določiti.



Slika 5.2

Primer:

Sučno nihalo z mizico ima vztrajnostni moment $J = 0{,}005\ \mathrm{kgm}^2$ in niha z nihajnim časom $t_0 = 0{,}8$ s. Kolik je vztrajnostni moment telesa, ki ga položimo na mizico, če je novi nihajni čas $t_1 = 2{,}5$ s?

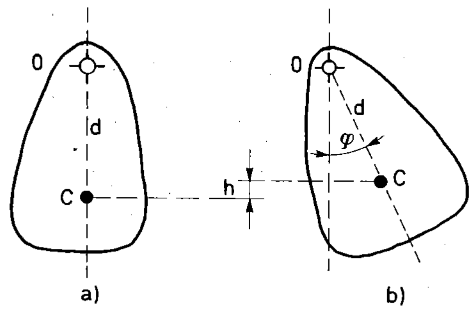
$$t_0 = 2\pi\sqrt{J_0/D}$$
$$t_1 = 2\pi\sqrt{(J_0 + J)/D}$$

Enačbi delimo, da se neznana sučna konstanta vzmeti krajša, in dobimo:

$$t_1^2/t_0^2 = (J + J_0)/J_0 \text{ ali}$$
$$J = J_0(t_1^2/t_0^2 - 1) = 0{,}044\ \mathrm{kgm}^2$$

Težno nihalo

Nihajoče telo je obešeno tako, da se lahko vrti okrog vodoravne osi, težišče telesa (C) je pod pritrdiščem (osjo). Oblika telesa je poljubna, oddaljenost težišča od vrtišča 0 je d, vztrajnostni moment telesa glede na os skozi 0 je J (slika 5.3).



Slika 5.3

Potencialna energija je tu gravitacijska potencialna energija, ki je določena z višino težišča. V stabilni ravnovesni legi je težišče najnižje – tik pod vrtiščem (slika 5.3a). Ko nihalo zasukamo za kót φ_0, se težišče dvigne za $h = d(1 - \cos\varphi_0)$ in potencialna energija nihala se poveča za

$$W_p = mgh = mgd(1 - \cos\varphi_0) \tag{5.9}$$

Vidimo, da se potencialna energija spreminja s kosinusom odmika φ_0, torej ni kvadratna funkcija in zato **težno nihalo v splošnem ne niha harmonično.** Kvadratno odvisnost potencialne energije od kota in harmonično nihanje dobimo le za majhne amplitude φ_0, ko lahko zapišemo: $1 - \cos\varphi_0 = 2\sin^2(\varphi_0/2) \approx \varphi_0^2/2$ ter

$$W_p \approx (mgd/2)\varphi_0^2$$

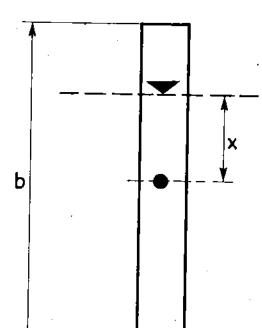
Ko dvignjeno nihalo spustimo, zaniha skozi ravnovesno lego z največjo kotno hitrostjo Ω_0 oziroma z največjo kinetično (rotacijsko) energijo:

$$J\Omega_0^2/2 = (mgd/2)\varphi_0^2 \text{ ali}$$
$$\Omega_0 = \varphi_0\sqrt{mgd/J} = \varphi_0\omega$$

Lastna frekvenca težnega nihala pri majhnih amplitudah nihanja je:

$$\boxed{\omega = \sqrt{mgd/J}} \tag{5.10}$$

Pri večjih amplitudah je izraz bolj zapleten, nihanje ni več harmonično in **nihajni čas je odvisen od amplitude.** Računamo takole:



Slika 5.4

Pri odklonu φ ima nihalo potencialno energijo $mgd(1 - \cos\varphi)$ in kinetično energijo $J\Omega^2/2$; obe skupaj sta enaki začetni potencialni energiji:

$$mgd(1 - \cos\varphi) + J\Omega^2/2 = mgd(1 - \cos\varphi_0) \text{ ali}$$
$$\Omega = \sqrt{2\omega_0}\ \sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}\,, \quad \omega_0 = \sqrt{mgd/J}$$
$$\Omega = d\varphi/dt$$

Izraza za Ω izenačimo, dobljeno enačbo preuredimo in integriramo:

$$\sqrt{2}\ \omega_0\int_0^{t_0/4} dt = \int_0^{\varphi_0}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)^{-1/2}d\varphi$$
$$t_0 = (2\sqrt{2}\ /\omega_0)\int_0^{\varphi_0}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)^{-1/2}d\varphi$$
$$t_0 = (2\pi/\omega_0)\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2(\varphi_0/2) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4(\varphi_0/2) + \ldots\right] \qquad (5.11)$$

V splošnem je nihajni čas težnega nihala odvisen od amplitude; je daljši, če je amplituda večja. Le pri majhnih amplitudah je neodvisen od amplitude.

Primeri:

1. Matematično nihalo je najenostavnejša vrsta težnega nihala: vsa snov je približno enako oddaljena od vrtišča, npr. kroglica na koncu niti, utež na koncu lahke palice ipd. $J = md^2$

$$\omega = \sqrt{g/d} \quad \text{ali}$$
$$\boxed{t_0 = 2\pi\sqrt{d/g}} \qquad (5.12)$$

Nihajni čas matematičnega nihala je odvisen od dolžine in od težnega pospeška. Čim **daljše je nihalo**, tem **večji je nihajni čas**. Seveda velja to le za majhne amplitude nihanja.

Z matematičnim nihalom lahko merimo težni pospešek g; izmerimo nihajni čas danega nihala in izračunamo $g = d(2\pi/t_0)^2$.

Podobno kot matematično nihalo niha vodoravno položena palica (ali plošča), katere konca visita na enako dolgih nitkah, če jo poženemo tako, da niha translatorno sem ter tja.

2. Nihajoča palica. Palica z maso m in dolžino b (z enakomernim prerezom) je vrtljiva okrog enega konca. S kolikšnim nihajnim časom niha, če so amplitude majhne?

$$d = b/2,\ J = mb^2/3 \qquad \text{(gl. 3.38a)}$$
$$t_0 = 2\pi\sqrt{J/mgd} = 2\pi\sqrt{2b/3g} \qquad (5.12a)$$

Palica niha tem počasneje (z daljšim nihajnim časom), čim daljša je.

Poglejmo, kako je nihajni čas t_0 palice odvisen od lege vrtišča. Recimo, da palica niha okrog vrtišča *0*, ki je za x oddaljeno od sredine (težišča) palice. Pri katerem x je nihajni čas najkrajši? (slika 5.4).

$$d = x,\ J = mb^2/12 + mx^2$$
$$t_0 = (2\pi/\sqrt{g}\ )\ \sqrt{x + b^2/12x}$$

Nihajni čas je najkrajši (je minimum) pri tistem x, za katerega je odvod izraza pod korenom po x enak nič to je: $1 - b^2/12x^2 = 0$ ali $x = b/2\sqrt{3}$.
Okrog vrtišča pri tej oddaljenosti od sredine palice niha palica z najkrajšim nihajnim časom: $2\pi\sqrt{b/\sqrt{3}\,g}$. Pomembno je, da je nihajni čas pri tem vrtišču malo odvisen od x in se zato ne spremeni zaznatno, če se vrtišče nekoliko izrabi.

3. Ploščica niha sem ter tja **po dnu kroglaste jamice** (polmer r, slika 5.5). Ko ploščico izmaknemo iz dna in dvignemo za $h = r(1 - \cos\varphi_0)$, pri čemer je φ_0 največji kotni odmik ploščice iz ravnovesne lege na dnu jamice (merjen iz središča krivine jamice), se potencialna energija ploščice poveča za $mgh = mgr(1 - \cos\varphi_0) \approx mgr\varphi_0^2/2$ (za majhne amplitude φ_0). Ko ploščica pridrsi (brez trenja) do dna jamice, ima največjo kinetično energijo $mv_0^2/2 = mgr\varphi_0^2/2$. Sledi:

$$\Omega_0 = v_0/r = \sqrt{g/r}\ \varphi_0 = \omega\varphi_0 = (2\pi/t_0)\varphi_0$$
$$t_0 = 2\pi\sqrt{r/g}$$

(podobno kot nitno nihalo)

S kolikšnim nihajnim časom pa se po kroglasti jamici kotali sam ter tja kroglica s polmerom R?

Razlika v primerjavi z drsečo ploščico je v izrazu za kinetično energijo na dnu jamice. Kotaleča se kroglica ima kinetično energijo: $mv_0^2/2 + J\Omega_0^2/2 = (mv_0^2/2)\ (1 + J/mR^2) = mg(r - R)\varphi_0^2/2$ ali

$$v_0 = \sqrt{g(r - R)/(1 + J/mR^2)}\ \varphi_0 = (r - R)\Omega_0$$
$$\Omega_0 = \sqrt{g/[(1 + J/mR^2)(r - R)]}\ \varphi_0 = \omega\varphi_0 = (2\pi/t_0)\varphi_0$$

Za kroglico je $J = 2mR^2/5$ in zato:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{7(r - R)/5g} \qquad (5.12b)$$

Vprašanje je, kako mora biti oblikovana jamica, da je nihanje ploščice (kroglice) v njej harmonično ne glede na velikost amplitude.

4. Nihanje **tekočinskega stebra v cevi** z obliko črke U (trenje zanemarimo). Steber homogene tekočine ima enak prerez, dolžina je b, masa na enoto dolžine stebra je μ.

V ravnovesju sta gladini tekočine v obeh krakih cevi enako visoko (slika 5.6a). Če se gladina v desnem kraku dvigne za x_0 (in v levem spusti za x_0), se gravitacijska potencialna energija tekočinskega stebra poveča za $\mu x_0 g \cdot x_0$, to je za $W_p = \mu g x_0^2$ (slika 5.6b, del tekočine iz levega kraka z dolžino x_0 prenesemo na vrh desnega). Ker je potencialna energija W_p odvisna od kvadrata odmika, je nihanje harmonično. Steber tekočine zaniha skozi ravnovesno lego s hitrostjo v_0, tako da je:

$$\mu b v_0^2/2 = \mu g x_0^2 \text{ ali}$$
$$v_0 = \sqrt{2g/b}\ x_0 = \omega x_0 = (2\pi/t_0)x_0$$
$$t_0 = 2\pi\sqrt{b/2g} \qquad (5.12c)$$

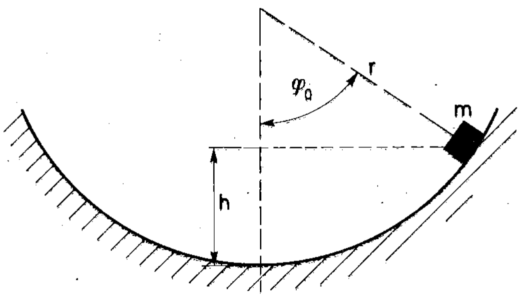
Reducirana dolžina nihala

Izraz za nihajni čas t_0 poljubnega težnega nihala, ki niha harmonično, želimo napisati v obliki, kot velja za nitno (matematično) nihalo. Sprašujemo se, na kolikšno **oddaljenost od vrtišča** (na reducirano dolžino nihala – d_r) bi morali zbrati vso snov nihala, da bi dobili enak nihajni čas:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{J/mgd} = 2\pi\sqrt{d_r/g} \quad \text{ali} \quad d_r = J/md \qquad (5.13)$$

Reducirana dolžina nihajoče palice (gl. 5.12a) je $d_r = 2b/3$, kar pomeni, da palica z dolžino b niha z enakim nihajnim časom kot nitno nihalo z dolžino $2b/3$.

Poišči reducirano dolžino za kroglo, ki niha okrog vodoravne osi skozi njen vrh.

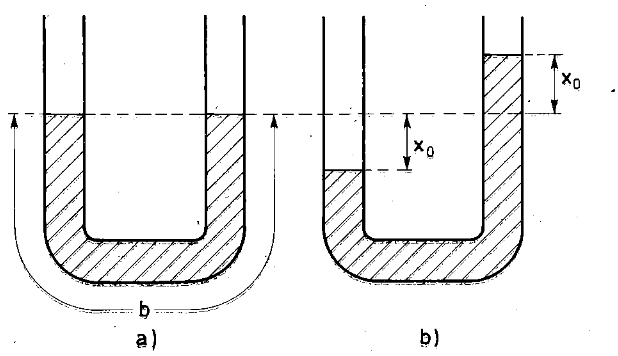


Slika 5.5

Nedušeno nihanje

Ko zunanja sila izmakne nihalo iz ravnovesne lege in ga odkloni za amplitudo x_0, opravi delo, ki ga prejme nihalo v obliki potencialne energije $W_p(x_0)$. Čim več energije prejme nihalo, s tem večjo amplitudo niha, tako da je **amplituda merilo za energijo nihala.** Med nihanjem se potencialna energija spreminja v kinetično in obratno. Ko gre nihalo skozi ravnovesno lego, ima vso energijo v obliki kinetične. Pri največjem odmiku ($x = \pm x_0$, v amplitudi, kjer se nihalo ustavi in spremeni smer gibanja) pa je energija nihala v obliki potencialne. Če **zanemarimo izgubo energije nihanja** zaradi nekonservativnih sil (trenje, upor), je **vsota kinetične in potencialne energije stalna** (se ne spreminja s časom) in enaka začetni potencialni energiji:

$$W_p(x) + W_k = \textbf{konst.} = W_p(x_0) = W_k(x=0) \qquad (5.14)$$



Slika 5.6

Nihanje nihala pomeni medsebojno spreminjanje in prelivanje potencialne in kinetične energije (ob stalni vsoti). Ko je potencialna energija največja, je kinetična nič in ko je potencialna nič (v ravnovesni legi), je kinetična največja. Nihalo se po vsakem nihaju odkloni za enako amplitudo x_0 in švigne skozi ravnovesno lego z enako največ hitrostjo $v_0 = \omega_0 x_0$, kjer je ω_0 lastna frekvenca nihala. To se stalno ponavlja. Takšno nihanje je **nedušeno. Amplituda nedušenega nihala je stalna.**

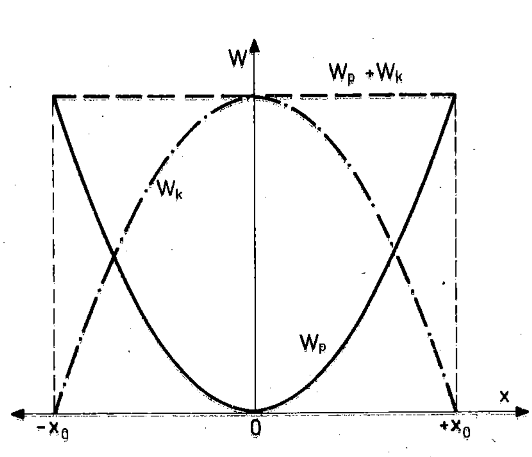
Na sliki (5.7) je skicirana odvisnost potencialne energije W_p in kinetične W_k od odmika x. Vodoravna črtkana črta predstavlja celotno energijo nihala: $W = W_k + W_p$, ki je stalna.

Poseben primer nedušenega nihanja je **harmonično nihanje**, pri katerem se odmik spreminja s časom po sinusni ali kosinusni funkciji (gl. str. 16):

$x = x_0 \sin(\omega_0 t)$
ω_0 = lastna frekvenca nedušenega nihala
$v = dx/dt = x_0\omega_0\cos(\omega_0 t) = v_0\cos(\omega_0 t)$

Potencialna energija harmonično nihajočega nihala je kvadratna funkcija odmika (gl. 5.5):

$$W_p = \frac{1}{2}(d^2W_p/dx^2)_0 x^2 = (m\omega_0^2/2)x^2 = (m\omega_0^2 x_0^2/2)\sin^2(\omega_0 t)$$



Slika 5.7

Kinetična energija se spreminja s časom po enačbi:

$$W_k = mv^2/2 = (mx_0^2\omega_0^2/2)\cos^2(\omega_0 t)$$

Vsota obeh je zares neodvisna od časa:

$$W_p + W_k = (mx_0^2\omega_0^2/2)\,[\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)] = \\ = mx_0^2\omega_0^2/2 = mv_0^2/2 = W_p(x_0)$$

kar je značilno za nedušeno nihanje.

Diferencialna enačba nedušenega nihanja podaja zvezo med odmikom x in njegovimi časovnimi odvodi, kakršna obstaja pri nedušenem nihanju. Dobimo je tako, da izračunamo pospešek:

$$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -\,x_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t) = -\,\omega_0^2 x$$

Ker je $a = \mathrm{d}(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ (drugi odvod odmika po času), dobimo:

$$\boxed{\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + \omega_0^2 x = 0} \quad \textbf{diferencialna enačba nedušenega nihanja} \quad (5.15)$$

Rešitev te enačbe je sinusna ali kosinusna funkcija časa z lastno frekvenco ω_0, to je: $x = x_0\sin(\omega_0 t)$ ali $x = x_0\cos(\omega_0 t)$, pri čemer je amplituda x_0 poljubna.

Diferencialno enačbo nedušenega nihanja običajno izpeljemo s pomočjo Newtonovega zakona dinamike $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Za vzmetno nihalo postopamo takole:

Ko je telo z maso m, ki je privezano na prožno vzmet s konstanto k, odmaknjeno od ravnovesne lege za x, deluje naj konservativna sila raztegnjene prožne vzmeti $-\,kx$, ki ga vleče nazaj k ravnovesni legi. Pod vplivom te sile dobi telo pospešek a:

$$ma = -\,kx = m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 \text{ ali}$$

$$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + (k/m)x = 0,\quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Dušeno nihanje

Nedušeno nihanje je idealen primer, saj v resnici nikoli ne moremo odpraviti energijskih izgub zaradi nekonservativnih sil. Dejansko nihalo po vsakem nihaju izgubi nekaj svoje energije, npr. zaradi trenja ali upora, in amplituda nihanja se s časom zmanjšuje. Pravimo, da je **nihanje dušeno**. Zaradi dušenja se amplituda nihanja slej ko prej zmanjša na tako majhno vrednost, da nihanje komajda še zaznamo.

Recimo, da nihanje nihala duši **upor tekočine**, v kateri nihalo niha. Pogosto je sila upora (F_u) tekočine premo sorazmerna s hitrostjo gibanja telesa skoznjo, npr.:

$$\mathbf{F}_u = -\gamma\,\mathbf{v} \qquad \text{(gl. str. 173)} \qquad (5.16)$$

S predznakom minus izrazimo dejstvo, da sila upora nasprotuje gibanju. Parameter γ je odvisen od velikosti in oblike telesa ter od vrste in stanja tekočine (npr. viskoznosti, temperature). V kratkem času dt, ko se telo premakne za $\mathbf{dx}$, opravi sila upora negativno delo $\mathrm{d}A = \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx} = -\gamma\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{dx}$, ki zmanjša celotno energijo W nihala (vsoto kinetične in potencialne energije, gl. 5.14):

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}A = -\gamma\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{dx}$$

Delimo s časovnim intervalom $\mathrm{d}t$, da dobimo spremembo v časovni enoti.

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}t = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t = -\gamma\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{dx}/\mathrm{d}t = -\gamma\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = -\gamma v^2 = \\ = -(2\gamma/m)W_k \qquad (5.17)$$

»Hitrost« manjšanja celotne energije nihala je premo sorazmerna s kinetično energijo. Torej nihalo najhitreje izgublja svojo energijo v ravnovesni legi in najmanj v amplitudi.

Na dušeno nihalo učinkuje poleg konservativne sile, ki omogoča nihanje (npr. $-kx$ pri vzmetnem nihalu), še nekonservativna sila $-\gamma v$, ki nihanje ovira in duši. Pod vplivom teh dveh sil telo niha s pospeškom a, tako da je:

$$ma = -kx - \gamma v \quad \text{ali}$$

$$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + (\gamma/m)\mathrm{d}x/\mathrm{d}t + (k/m)x = 0$$

Pišimo: $k/m = \omega_0^2$ (lastna frekvenca nedušenega nihala) in $\gamma/m = 2\beta$ (faktor 2 zaradi kasnejše enostavnosti).

$$\boxed{\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + 2\beta\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t + \omega_0^2 x = 0} \quad \textbf{diferencialna enačba dušenega nihanja} \quad (5.18)$$

Parameter β se imenuje **koeficient dušenja** in je merilo za stopnjo dušenja (ima dimenzijo /s).

Zanima nas rešitev zgornje diferencialne enačbe, torej kako se odmik x spreminja s časom, če je nihanje dušeno. Enačba se razlikuje od enačbe nedušenega nihanja (5.15) po členu s prvim odvodom odmika po času, ki je posledica dušenja. Če je ta člen zanemarljivo majhen (šibko dušenje), se x spreminja s časom kot pri nedušenem nihanju, to je sinusno s stalno amplitudo x_0 in z lastno frekvenco ω_0. Dušenje pa povzroča, da se amplituda nihanja s časom zmanjšuje (videli bomo, da eksponentno) in da se tudi frekvenca nihanja zmanjša (od ω_0 na ω_d).

Diferencialna enačba (5.18) za funkcijo $x(t)$ se poenostavi, če vpeljemo novo funkcijo $y(t)$, ki je povezana z $x(t)$ po enačbi:

$$x(t) = \exp(-\beta t)y(t) \qquad (5.19)$$

Tako izraženi $x(t)$ dvakrat odvajamo po t in oba odvoda vstavimo v enačbo (5.18). Člen s prvim odvodom funkcije izpade in dobimo enostavno diferencialno enačbo:

$$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 + (\omega_0^2 - \beta^2)y = 0$$

kakršna velja za nedušeno nihanje s frekvenco:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad (5.20)$$

Torej se y spreminja s časom sinusno ali kosinusno s frekvenco ω_d.

Končna rešitev diferencialne enačbe (5.18) za dušeno nihanje ima tako obliko:

$$\boxed{x(t) = x_0\exp(-\,\beta t)\sin(\omega_d t)} \qquad (5.21)$$

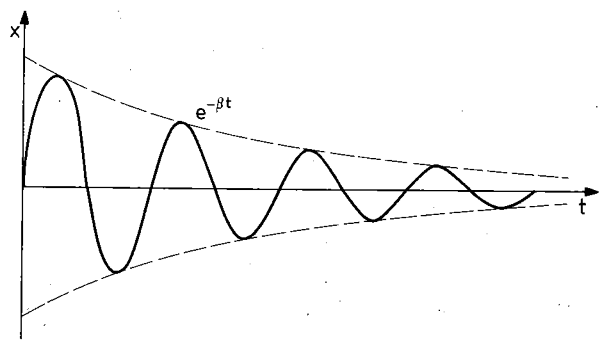
Graf te funkcije je na sliki (5.8); črtkani krivulji predstavljata $\pm\,x_0\exp(-\,\beta t)$, to je časovno spreminjanje amplitude nihanja.

Amplituda dušenega nihala se zmanjšuje s časom eksponentno, in to tem hitreje, čim močnejše je dušenje, čim večji je faktor dušenja (β). Pri šibkem dušenju je β majhen in je zato amplituda nihanja praktično stalna.

Obratna vrednost koeficienta dušenja ($1/\beta$) je čas, v katerem se amplituda nihanja zmanjša za faktor e = = 2,718. Zmanjševanje amplitude nihanja zaradi dušenja včasih izrazimo s t. i. **logaritemskim dekrementom** (Λ), ki ga definiramo kot naravni logaritem količnika amplitud nihanja po preteku nihajnega časa $t_d = 2\pi/\omega_d$:

$$\Lambda = \ln \frac{\exp(-\beta t)}{\exp[-\beta(t+t_d)]} = \ln \exp(\beta t_d) = \beta t_d = 2\pi\beta/\omega_d$$

$$\Lambda = 2\pi\beta(\omega_0^2 - \beta^2)^{-1/2} \qquad (5.22)$$

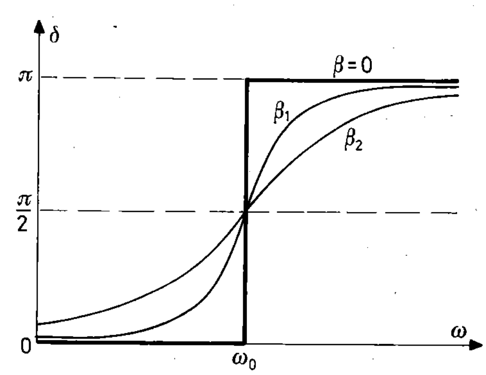


Slika 5.8

Dušenje najbolj opazno vpliva na amplitudo nihanja, ki se zmanjšuje eksponentno s časom, tako da nihalo slej ko prej preneha nihati. Nekoliko manj vpliva na frekvenco – zmanjša jo od ω_0 na $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, tem bolj, čim močnejše je. Močno dušeno nihalo niha zelo počasi, z dolgim nihajnim časom. Če je dušenje dovolj močno, lahko nihanje celo povsem prepreči. Pri $\beta = \omega_0$ je $\omega_d = 0$, kar pomeni, da **za $\beta > \omega_0$ nihanje ni več možno.**

Ko nihalo odmaknemo za amplitudo x_0 in nato izpustimo, se začne približevati ravnovesni legi, pri čemer se njegova potencialna energija sprošča. Če ni dušenja, se spreminja v kinetično energijo in nihalo pride do ravnovesne lege z dovolj veliko kinetično energijo, da švigne skoznjo in se na drugi strani »dvigne« do enake amplitude x_0, s katere smo ga spustili. Pri močno dušenem nihalu pa se sproščena potencialna energija pretežno porablja za premagovanje dušilne sile in se le malo nalaga v kinetično energijo: nihalo doseže ravnovesno lego s premajhno kinetično energijo. Pri $\beta > \omega_0$ porabi dušenje praktično vso sproščeno energijo in nihalo se počasi približuje ravnovesni legi, v kateri obstane; nihanja ni.

V splošnem vsako nihalo niha bolj ali manj dušeno, le da smemo obravnavati nihanje kot nedušeno, če je dušenje dovolj šibko, da se v času opazovanja amplituda praktično ne spremeni, (če je čas opazovanja majhen v primerjavi z $1/\beta$).



Slika 5.9

Vsiljeno nihanje

Lastno nihanje nihala je bolj ali manj dušeno in se slej ko prej uduši. Če želimo kljub dušenju vzdrževati nihanje s stalno amplitudo (to je nedušeno nihanje), moramo izgubljeno energijo sproti nadomeščati. Kolikor energije izgubi nihalo v nihajnem času zaradi dušenja, toliko mu je moramo dovesti. Energijo moramo dovajati v pravih trenutkih, tako da nihanje pospešujemo. Zaradi dušenja doseže nihalo ravnovesno lego s premajhno kinetično energijo. Zato moramo nihalo pospešiti, ko gre skozi ravnovesno lego, in mu dovesti manjkajočo kinetično energijo. Pravilen in pravočasen dotok energije regulira samo nihalo (t. i. **samokrmiljeno nihalo**). Nihalo ima zalogo energije v obliki gravitacijske potencialne energije dvignjene uteži (npr. pri starih stenskih urah) ali v obliki prožnostne energije navite polžaste vzmeti (pri žepnih in ročnih urah ter budilkah). Pri električnih urah pa potrebno delo opravlja vir električne napetosti, ki poganja nihalko. Nihalo sámo v pravem trenutku »odpre« zalogo energije, da se ta sprosti za toliko, kolikor je potrebno za nedušeno nihanje z dano amplitudo.

Druga možnost, kako dobiti nihanje s stalno amplitudo, je da **nihalo stalno poganjamo z zunanjo (vsiljeno) silo.**

Recimo, da poganjamo nihalo, ki samo zase niha z lastno frekvenco ω_0, z zunanjo silo $F(t)$, ki se spreminja s časom sinusno z amplitudo F_0 in frekvenco ω:

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \tag{5.23}$$

Pravimo, da **nihalu vsiljujemo nihanje z vsiljeno frekvenco ω.**

Na nihalo torej učinkujejo tri sile: konservativna sila, ki vleče nihalo k ravnovesni legi ($-kx$ pri vzmetnem nihalu), nekonservativna sila, ki duši nihanje ($-\gamma v$), ter zunanja, vsiljena sila $F(t)$. Vse tri skupaj določajo pospešek nihajočega telesa:

$$ma = -kx - \gamma v + F(t)$$
$$d^2x/dt^2 + (\gamma/m)dx/dt + (k/m)x = (F_0/m)\sin(\omega t)$$
$$d^2x/dt^2 + 2\beta dx/dt + \omega_0^2 x = (F_0/m)\sin(\omega t) \tag{5.24}$$

Dobili smo nehomogeno **diferencialno enačbo vsiljenega nihanja** za odmik $x(t)$. Nehomogeni člen te enačbe (to je člen, ki ne vsebuje iskane funkcije x ali njenih odvodov) na desni strani enačbe vsebuje gonilno silo $F(t)$. Matematika nas uči, da je splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe, to je funkcija $x(t)$, sestavljena iz splošne rešitve ustrezne homogene enačbe (če namesto nehomogenega člena na desni strani enačbe postavimo nič) in iz t. i. partikularne rešitve, ki je povezana neposredno z nehomogenim členom:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{5.25}$$

Rešitev homogenega dela enačbe, $x_h(t)$, že poznamo, to je namreč rešitev za dušeno nihanje (5.21):

$$x_h(t) = x_0 \exp(-\beta t)\sin(\omega_d t)$$

Ta rešitev predstavlja lastno nihanje nihala, ki je dušeno. Po času $\gg 1/\beta$ ko lastno nihanje izzveni, ostane le partikularna rešitev $x_p(t)$, ki je neposredno posledica vsiljene sile $F(t)$. To rešitev poiščemo z nastavkom:

$$x_p(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \tag{5.26}$$

v katerem izberemo neznani konstanti A_1 in A_2 tako, da zadošča nehomogeni diferencialni enačbi (5.24) za vsak čas t. Nastavek (5.26) vzamemo kot rešitev $x(t)$, izračunamo prvi in drugi odvod po času ter vse skupaj vstavimo v enačbo (5.24). Dobimo:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\,(A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t) + 2\beta\omega(A_1 \cos\omega t - A_2 \sin\omega t) = (F_0/m)\sin\omega t$$

Leva stran te enačbe je za vsak t enaka desni strani le, če se posebej ujemajo faktorji členov, ki vsebujejo $\sin\omega t$, in posebej členov, ki vsebujejo $\cos\omega t$, to je če velja:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - 2\beta\omega A_2 = F_0/m$$
$$(\omega_0^2 - \omega^2)A_2 + 2\beta\omega A_1 = 0$$

Odtod izračunamo:

$$A_1/A_2 = -(\omega_0^2 - \omega^2)/2\beta\omega \text{ ter}$$
$$A_1^2 + A_2^2 = (F_0/m)^2/[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]$$

Nastavek (5.26) za vsiljeno nihanje običajno napišemo v obliki: $A\sin(\omega t - \delta)$, to je kot sinusno nihanje z amplitudo A, ki pa v fazi zaostaja za nihanjem vsiljene sile $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ za kót δ. Namesto konstant A_1 in A_2 torej raje uporabimo konstanti A in δ, ki imata fizikalni pomen. Zveza med njimi je:

$$A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) = A\sin(\omega t - \delta) =$$
$$= A\sin(\omega t)\cos\delta - A\cos(\omega t)\sin\delta \text{ ali}$$
$$A_1 = A\cos\delta$$
$$A_2 = -A\sin\delta$$

Drugo enačbo delimo s prvo in dobimo:

$$\mathrm{tg}\delta = -A_2/A_1 = 2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Prvo in drugo enačbo kvadriramo ter nato seštejemo:

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2 = (F_0/m)^2/[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]$$

Zaključek: Če poganjamo nihalo s periodično zunanjo silo $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, če mu vsiljujemo nihanje s frekvenco ω, je nihanje nihala takoj po vzbujanju še sestavljeno iz lastnega in vsiljenega nihanja. Ko lastno nihanje zaradi dušenja izzveni ($x_h \to 0$), ostane le nihanje s frekvenco ω vsiljene sile ($x = x_p$):

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t - \delta)} \tag{5.27}$$

ki ima amplitudo:

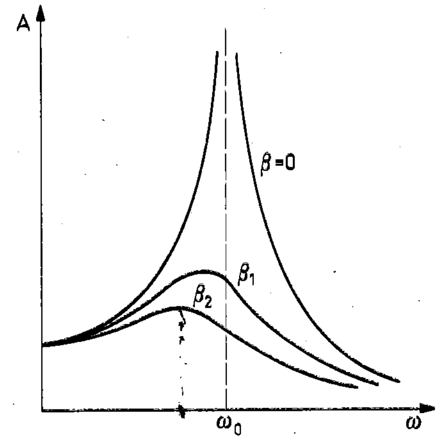
$$A = (F_0/m)[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{-1/2} \tag{5.28}$$

in zaostaja za vsiljeno silo $F(t)$ za kót δ:

$$\mathrm{tg}\delta = 2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2) \tag{5.28a}$$

Nihalo sicer niha s frekvenco vsiljene sile, vendar v splošnem ne niha sočasno z njo ($\delta \neq 0$). Če je $\omega < \omega_0$ **(vsiljena frekvenca manjša od lastne)**, je $\delta > 0$ in **nihalo zaostaja za vsiljeno silo.** Pri $\omega > \omega_0$ je $\delta > 90°$ (nihalo prehiteva vsiljeno silo). Graf odvisnosti faznega zaostanka δ od vsiljene frekvence ω je na sliki (5.9). Narisane so krivulje za različne stopnje dušenja (β). Izstopa nedušeno nihalo ($\beta = 0$): če mu vsiljujemo nihanje z $\omega < \omega_0$, je $\delta = 0$ (nihalo niha sočasno – v fazi s silo). Pri $\omega > \omega_0$ pa je $\delta = \pi$ (nihalo udarja v nasprotno smer, kot suva sila; niha v protifazi s silo). Pri $\omega = \omega_0$ je $\delta = \pi/2$, ne glede na stopnjo dušenja (za vse β). Tedaj se odmik spreminja s časom kosinusno: $x = A\cos(\omega t)$, kar pomeni, da je vsiljena sila $F = F_0 \sin(\omega t)$ enaka nič tedaj, ko je odmik največji (ko se nihalo ustavi v amplitudi in spremeni smer hitrosti), ter največja v ravnovesni legi ($x = 0$), ko je hitrost nihala največja. Vidimo, da se **pri $\omega = \omega_0$** hitrost nihala spreminja s časom enako kot **vsiljena sila**, tako da sila **v vsakem trenutku pospešuje nihanje**. Pravimo, da **je vsiljena sila** tedaj **v resonanci z nihalom.**

Amplituda A vsiljenega nihanja je seveda premo sorazmerna z amplitudo F_0 vsiljene sile, toda odvisna je tudi od koeficienta dušenja (β) in predvsem od razmerja vsiljene frekvence ω glede na lastno frekvenco ω_0 nihala. Slika (5.10) prikazuje odvisnost amplitude A od vsiljene frekvence ω za različne stopnje dušenja (β), to je prikazuje graf $A(\omega)$ po enačbi (5.28).



Slika 5.10

Pri zelo počasnem vsiljevanju ($\omega \ll \omega_0$) je $A \approx F_0/(m\omega_0^2) = F_0/k$ (za vzmetno nihalo) neodvisno od stopnje dušenja. V tem območju frekvenc nihalo zvesto sledi (sočasno in s stalno amplitudo) vsiljeni sili. Ko se ω približa ω_0, se amplituda A vsiljenega nihanja poveča, in to tem močneje, čim šibkejše je dušenje (manjši β). Če nedušenemu nihalu ($\beta = 0$) vsiljujemo nihanje z njegovo lastno frekvenco ($\omega = \omega_0$), se amplituda nihanja zelo (skoraj neskončno) poveča. To razumemo: ker ni energijskih izgub, se delo vsiljene sile (ki je v resonanci največje) nalaga v nihalo, katerega energija (in amplituda) se zato po vsakem nihaju povečuje. Dušenje zmanjšuje izrazitost resonance: čim večji je β, tem manj amplituda naraste, ko se ω približa ω_0. Poleg tega se maksimum amplitude pomika h krajšim frekvencam, če β narašča:

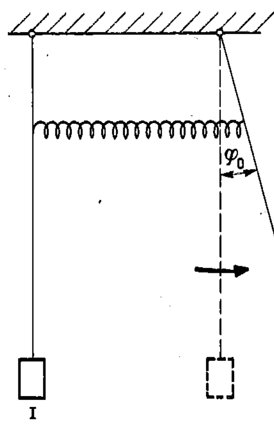
$$dA/d\omega = 0 \text{ pri } \omega = \omega_{max}$$

(odvajamo le izraz pod korenom v enačbi 5.28)

$$2(\omega_0^2 - \omega^2_{max})(-2\omega_{max}) + 4\beta^2 \cdot 2\omega_{max} = 0$$

$$\omega_{max}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \qquad (5.29)$$

Vidimo, da maksimuma amplitude A ni (ω_{max} ne obstaja, ni realen), če je $2\beta^2 > \omega_0^2$. **Premočno dušenje onemogoči resonanco.**



Slika 5.11

Kako reagira nihalo, če mu vsiljujemo zelo hitro nihanje? Za $\beta \gg \omega_0$ je $A \approx F_0/(m\omega^2)$ in $\mathrm{tg}\delta \approx -2\beta/\omega$. Amplituda nihanja gre torej k nič, če ω narašča prek vseh meja, fazna zakasnitev δ pa se približuje π. **Nihalo ne more slediti zelo hitremu vsiljenemu nihanju,** zato sploh ne niha. Kolikor že niha, pa niha v protifazi s silo: nihalo udarja ravno v nasprotno smer kot sila.

Poglejmo še, kolikšna je moč vsiljene sile med vsiljenim nihanjem.

$$P(t) = F(t)v = F_0\sin(\omega t) \cdot A\omega\cos(\omega t - \delta)$$
$$= F_0 A\omega[\sin(\omega t)\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin^2(\omega t)\sin(\delta)]$$

Ker se moč spreminja s časom, poiščemo njeno povprečno vrednost $\bar{P}$ v teku nihajnega časa $t_0 = 2\pi/\omega$ vsiljenega nihanja (gl. 4.8):

$$\bar{P} = (1/t_0)\int_0^{t_0} P(t)dt = (F_0/2)\omega A\sin(\delta)$$

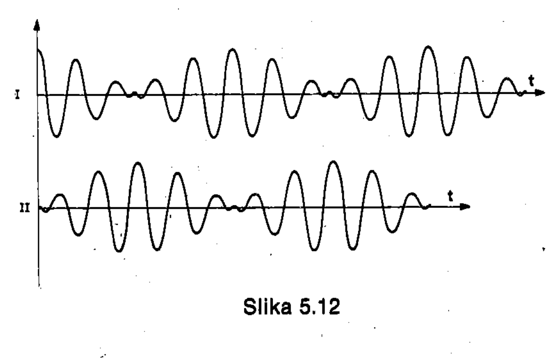
Uporabimo še enačbi (5.28 in 29) za A in $\mathrm{tg}\delta$ ter dobimo:

$$\bar{P} = (F_0^2\beta/m)\omega^2/[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] \qquad (5.30)$$

Z enačbo $d\bar{P}/d\omega = 0$ se prepričamo, da je povprečna moč največja pri $\omega = \omega_0$, to je v resonanci (ne glede na stopnjo dušenja):

$$\bar{P}_{max} = \bar{P}(\omega = \omega_0) = F_0^2/(4m\beta) \qquad (5.30a)$$

Če ni dušenja ($\beta = 0$), je povprečna moč gonilne sile v resonanci ($\omega = \omega_0$) zaras neskončno velika.



Slika 5.12

Vsaka konstrukcija ali zgradba, npr. strop, stena, drog, steber itd., je nihajoči sistem z dano lastno frekvenco. V splošnem je lastna frekvenca sistema tem manjša, čim masivnejši in večji je sistem (odvisna je tudi od njegovih elastičnih lastnosti). Pogosto se zgodi, da je tak sistem podvržen zunanjemu nihanju, da nanj učinkuje periodična zunanja sila. Paziti moramo, da je vsiljena frekvenca ali velika ali majhna v primerjavi z lastno frekvenco sistema, da se izognemo resonanci. V resonanci namreč lahko že razmeroma šibko vsiljeno nihanje povzroči zaznatno nihanje sistema (posebno če je dušenje šibko), ki lahko sistem poškoduje ali celo uniči. Ritmični vetrovni sunki lahko zbudijo resonančno nihanje visokih in vitkih stolpov, stebrov ali visečih mostov.

Sklopljeno nihanje – utripanje

Zgodi se, da so nihala medsebojno povezana, npr. z elastičnimi vezmi, prek katerih učinkujejo drugo na drugo. Pravimo, da so nihala **sklopljena**.

Na sliki (5.11) sta narisani enaki težni nihali I in II, ki sta pritrjeni na skupni strop. Čeprav sta nihali že sklopljeni prek stropa, njuno sklopitev dodatno ojačimo s prožno vzmetjo, ki jo pritrdimo na nihali (npr. na oddaljenosti b od vrtišč). Med nihanjem nihal se vzmet razteza in krči ter tako vpliva na njuno nihanje. Čim bolj je pritrdišče vzmeti na nihali oddaljeno od vrtišč (čim večji je b), tem močneje vzmet učinkuje na nihali, tem močneje sta nihali sklopljeni.

Recimo, da izmaknemo nihalo II iz ravnovesne lege (za amplitudo φ_0), nihalo I pa obdržimo na mestu (sklopitvena vzmet se pri tem raztegne). Ko nihali spustimo, začneta nihati. Takoj v začetku ima energijo le izmaknjeno nihalo II, ki začne nihati z največjo amplitudo φ_0. Toda s svojim nihanjem nateguje vzmet in prek nje sili prvotno mirujoče nihalo I v nihanje. Posledica tega je, da se energija izmaknjenega nihala prek vzmeti prenaša na nihalo I, katerega amplituda nihanja zato narašča, medtem ko se amplituda nihala II zmanjšuje. Čez nekaj časa se nihalo II ustavi in tedaj nihalo I niha z največjo amplitudo (s φ_0, če zanemarimo energijske izgube). Tedaj je celotna energija nihanja naložena v nihalu I. Nato se pojav ponovi v nasprotni smeri itd. Sklopitvena vzmet torej povzroča, da se energija nihanja preliva iz enega nihala v drugo in obratno. Videli bomo, da je frekvenca takšnega prelivanja tem večja, čim močneje sta nihali sklopljeni. Seveda se med prelivanjem nekaj energije tudi izgublja (zaradi nekonservativnih sil – trenja in upora zraka), zato nihali nihata dušeno in se slej ko prej ustavita.

Poglejmo, kako nihata sklopljeni nihali I in II. V nekem trenutku je npr. nihalo II odmaknjeno v desno za kót φ_2, nihalo I pa za kót φ_1 v enako smer. Vzmet je tedaj raztegnjena za $x = b(\varphi_2 - \varphi_1)$. Na nihalo II deluje navor njegove teže ($- mgd\varphi_2$, pri majhnih kotih) ter navor $-Fb = -kb^2(\varphi_2 - \varphi_1)$ sile prožnosti raztegnjene vzmeti. Pospešek α_2 tega nihala zato zadošča enačbi (3.27):

$$J\alpha_2 = -mgd\varphi_2 - b^2k(\varphi_2 - \varphi_1) = J\mathrm{d}^2\varphi_2/\mathrm{d}t^2$$

Podobna enačba za nihalo I ima obliko:

$$J\alpha_1 = b^2k(\varphi_2 - \varphi_1) - mgd\varphi_1 = J\mathrm{d}^2\varphi_1/\mathrm{d}t^2$$

ali:

$$\mathrm{d}^2\varphi_1/\mathrm{d}t^2 = -\omega_0^2\varphi_1 + D(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (5.31a)$$
$$\mathrm{d}^2\varphi_2/\mathrm{d}t^2 = -\omega_0^2\varphi_2 - D(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (5.31b)$$

kjer je $\omega_0 = \sqrt{mgd/J}$ lastna frekvenca posameznega težnega nihala (gl. 5.10), D pa parameter sklopitve:

$$D = b^2k/J \qquad (5.32)$$

Dobljeni enačbi (5.31a, b) seštejemo in dobimo za vsoto kotov $\varphi_1 + \varphi_2$ diferencialno enačbo:

$$\mathrm{d}^2(\varphi_2 + \varphi_1)/\mathrm{d}t^2 = -\omega_0^2(\varphi_2 + \varphi_1)$$

ki je podobna diferencialni enačbi nedušenega nihanja z lastno frekvenco ω_0 (gl. 5.15). Torej vsota kotov $\varphi_2 + \varphi_1$ niha sinusno ali kosinusno (odvisno do začetnega pogoja) s frekvenco ω_0, npr.:

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \varphi_0\cos(\omega_0 t) \qquad (5.33a)$$

Razlika enačb (5.31b in a) ravno tako dá diferencialno enačbo nedušenega nihanja, le da za razliko kotov $\varphi_2 - \varphi_1$ in z lastno frekvenco $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2D}$:

$$\mathrm{d}^2(\varphi_2 - \varphi_1)/\mathrm{d}t^2 = -(\omega_0^2 + 2D)(\varphi_2 - \varphi_1) = -\omega^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

in

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0\cos(\omega t) \qquad (5.33b)$$

V obeh primerih smo vzeli enako amplitudo φ_0, da dobimo pravilen začetni pogoj (za $t = 0$). Dobljeni enačbi seštejemo in odštejemo in dobimo rezultat:

$$\varphi_2 = (\varphi_0/2)\cos(\omega_0 t) + (\varphi_0/2)\cos(\omega t)$$
$$\varphi_1 = (\varphi_0/2)\cos(\omega_0 t) - (\varphi_0/2)\cos(\omega t)$$

ali

$$\varphi_2 = \varphi_0\cos\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right) \qquad (5.34a)$$
$$\varphi_1 = \varphi_0\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right) \qquad (5.34b)$$

V začetku ($t = 0$) je zares: $\varphi_2 = \varphi_0$ in $\varphi_1 = 0$, kakor smo bili sprožili nihali.

Običajno je sklopitev nihal šibka, tako da je $D \ll \omega_0^2$ in frekvenca ω le malo večja od lastne frekvence ω_0 prostih nihal. Dobljeni rezultat (5.34) za φ_1 in φ_2 lahko potem interpretiramo kot harmonično nihanje s frekvenco $(\omega + \omega_0)/2$, katerega amplituda se spreminja izmenično s frekvenco $(\omega - \omega_0)/2$:

$$\varphi_2(t) = \varphi_{20}(t)\cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right)$$
$$\varphi_1(t) = \varphi_{10}(t)\sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right) \qquad (5.35)$$

kjer je:

$$\varphi_{20}(t) = \varphi_0\cos\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right)$$
$$\varphi_{10}(t) = \varphi_0\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right) \qquad (5.35a)$$

Sklopljeni nihali sta v fazi premaknjeni za 90°, eno niha sinusno, drugo kosinusno. Podobno se s časom spreminjata amplitudi obeh nihal: ko ima eno nihalo največjo amplitudo (= φ_0), je amplituda drugega nič, in obratno (slika 5.12).

Zanimivo je, da sklopljeni nihali nihata z nekoliko večjo frekvenco $(\omega + \omega_0)/2$, kot nihata prosti nihali (ω_0). Sklopitev torej pospeši nihanje, nihajni čas se zaradi sklopitve zmanjša.

Nihanje, katerega amplituda se izmenično spreminja od največje vrednosti do nič, se imenuje **utripanje** (bibanje, zujanje). Frekvenca utripanja $\omega_u = (\omega - \omega_0)/2$ pove, kako hitro se amplituda nihanja spreminja s časom; navadno je precej manjša od frekvence samega nihanja.

Obravnavajoč vzmetno nihalo, vzamemo, da je telo m pripeto s prožno vzmetjo na zid ali strop (gl. str. 44). Toda zid se lahko premika (res je pritrjen na Zemljo, ki pa je vendarle prosta). V splošnem je torej nihajoče telo pritrjeno na drugo telo, ki tudi samo lahko niha.

Recimo, da sta telesi m_1 in m_2 speti s prožno vzmetjo (konstanta k) in položeni na gladko, vodoravno podlago, po kateri se lahko premikata brez trenja. Telesi mirujeta v ravnovesnih legah, vzmet ni ne skrčena ne stisnjena (slika 5.13a). Nihanje začnemo npr. tako, da telo m_2 pomaknemo v desno za amplitudo x_0, telo m_1 pa obdržimo v prvotni legi. Ko telesi spustimo, začneta nihati v vodoravni smeri. V trenutku t je npr. telo m_2 pomaknjeno v desno za x_2, telo m_1 pa za x_1 (slika 5.13b). Vzmet je tedaj raztegnjena za $x_2 - x_1$ in vleče telo m_2 v levo s prožno silo $k(x_2 - x_1)$, telo m_1 pa z enako veliko silo v desno. Newtonov zakon dinamike za ti telesi dá enačbi:

$$m_2a_2 = -k(x_2 - x_1)$$
$$m_1a_1 = k(x_2 - x_1)$$

ali

$$d^2x_2/dt^2 + \omega_2^2(x_2 - x_1) = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{k/m_2} \tag{5.36a}$$
$$d^2x_1/dt^2 - \omega_1^2(x_2 - x_1) = 0 \qquad \omega_1 = \sqrt{k/m_1} \tag{5.36b}$$

Drugo enačbo (5.36b) odštejemo od prve in dobimo diferencialno enačbo nedušenega nihanja za razliko $x_2 - x_1$:

$$d^2(x_2 - x_1)/dt^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)(x_2 - x_1) = 0$$

Relativni premik enega telesa glede na drugo telo označimo z:

$$u = x_2 - x_1$$

Ta zadošča diferencialni enačbi:

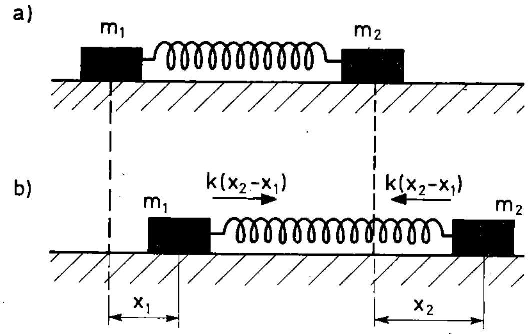
$$d^2u/dt^2 + \omega^2u = 0 \tag{5.37}$$

Vidimo, da **telesi nihata drugo glede na drugo harmonično z lastno frekvenco**:

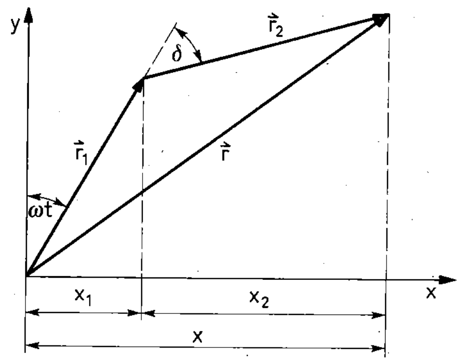
$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1m_2} = \sqrt{k/\mu} \tag{5.37}$$

kjer je μ t. i. **reducirana masa** nihajočih teles; dana je z enačbo:

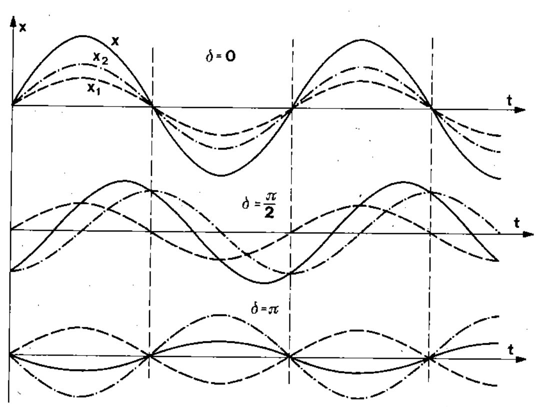
$$\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2) \quad \text{ali} \quad 1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2 \tag{5.38}$$



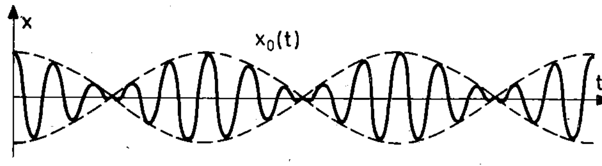
Slika 5.13



Slika 5.14



Slika 5.15



Slika 5.16

Reducirana masa je manjša od mase posamičnih nihajočih teles (od tod ime reducirana), zato je **lastna frekvenca sklopljenih teles večja od ustreznih frekvenc prostih teles.** S pomočjo reducirane mase lahko nihanje dveh sklopljenih teles obravnavamo kot nihanje enega samega telesa (glede na drugo). Če je npr. telo m_1 zid, je $m_1 \gg m_2$ in $\mu \approx m_2$; dobimo navadno nihanje telesa m_2 glede na nepomično okolico.

Da pomika x_1 in x_2 sklopljenih nihajočih teles ustrezata našemu začetnemu pogoju $x_1 = 0$ $x_2 = x_0$ (za $t = 0$), izberemo rešitev diferencialne enačbe (5.37) v obliki:

$$u = x_2 - x_1 = x_0\cos(\omega t) \tag{5.39}$$

To rešitev vstavimo v (5.36b):

$$d^2x_1/dt^2 = \omega_1^2 x_0\cos(\omega t)$$

in dvakrat integriramo, upoštevaje začetni pogoj $x_1 = 0$ in $dx_1/dt = 0$ za $t = 0$. Dobimo rezultat:

$$x_1 = \omega_1^2 x_0/\omega^2 - (\omega_1/\omega)^2 x_0 \cos(\omega t) = (\mu/m_1)x_0 - (\mu/m_1)x_0\cos(\omega t) \tag{5.40a}$$

x_2 izpeljemo neposredno iz enačbe (5.39):

$$x_2 = \omega_1^2 x_0/\omega^2 + (\omega_2/\omega)^2 x_0 \cos(\omega t) = (\mu/m_1)x_0 + (\mu/m_2)x_0\cos(\omega t) \tag{5.40b}$$

Telesi nihata okrog novih ravnovesnih leg, ki sta premaknjeni za $x_0\mu/m_1$ v smeri začetnega premika; nihata sicer sočasno, vendar udarjata v nasprotno smer (ko eno telo zaniha v levo, zaniha drugo v desno, in obratno). Težje telo niha z manjšo amplitudo kot lažje; vsota obeh amplitud je enaka začetni amplitudi x_0.

Premisli, kako je z energijo nihajočih teles.

Podobno kot telesi m_1 in m_2 z vzmetjo (slika 5.13) npr. nihata atoma v dvoatomni molekuli.

Sklopimo lahko tudi različne vrste nihal, npr. vzmetno in polžasto (sučno). Ko se vzdolžna vijačna vzmet raztegne, se pri tem tudi nekoliko zasuče okrog vzdolžne osi. Vzdolžno nihanje vzmeti je tako sklopljeno s sučnim nihanjem, ki vpliva nazaj na vzdolžno nihanje itd. **Sklopitev nihanj se izrazi, če sta lastni frekvenci posamičnih nihanj enaki.** Frekvenco sučnega nihanja reguliramo tako, da ima telo na koncu vzmeti prečko, po kateri drsita uteži. Premikajoč uteži (in spreminjajoč vztrajnostni moment, gl. 5.8), izenačimo lastni frekvenci vzdolžnega (linearnega) nihanja vzmeti in sučnega nihanja in tako dosežemo najbolj učinkovito sklopitev.

Žepna ura lahko niha kot težno nihalo, če jo obesimo na verižico. Njeno nihanje je sklopljeno s sučnim nihanjem polžaste vzmeti v njej. Ta sklopitev je pomembna, če sta lastni frekvenci obeh nihanj izenačeni. Tedaj težno nihanje ure učinkuje na njen tek. (Kako? Ali ura zaradi tega prehiteva ali zaostaja?)

Sestavljanje nihanj

Pogosto se zgodi, da na nihalo hkrati učinkujejo različna nihanja, ki imajo različne frekvence, amplitude in faze ter so v različnih smereh. Zanima nas, kakšno je rezultirajoče nihanje, kako se posamezna nihanja sestavljajo v skupno nihanje.

Najprej vzmemimo, da imajo posamezna nihanja enako frekvenco in da učinkujejo v enaki smeri.

Sestavljanje enakosmernih nihanj

Recimo, da sestavljamo enakosmerni nihanji $x_1 = r_1\sin(\omega t)$ in $x_2 = r_2\sin(\omega t + \delta)$, ki imata enako frekvenco ω, razlikujeta pa se v amplitudi in fazi; drugo nihanje prehiteva prvo za fazno razliko δ. **Odmik** x ki je posledica **rezultirajočega nihanja, je algebraična vsota odmikov** x_1 in x_2 **posameznih nihanj**:

$$x = x_1 + x_2 = r_1\sin(\omega t) + r_2\sin(\omega t + \delta) \tag{5.41}$$

To zapišemo kot sinusno nihanje s frekvenco ω in amplitudo r, ki prehiteva prvo nihanje za fazno razliko φ:

$$x = r\sin(\omega t + \varphi) \tag{5.41a}$$

Primerjajoč oba izraza za x (izenačimo člene s faktorjem $\sin\omega t$ in posebej člene s faktorjem $\cos\omega t$), dobimo amplitudo r in fazno razliko rezultirajočega nihanja:

$$\mathrm{tg}\varphi = r_2\sin\delta/(r_1 + r_2\cos\delta) \quad \text{ter} \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\delta \tag{5.41b}$$

Za $\delta = 0$ je $\varphi = 0$ in $r = r_1 + r_2$ (če sta enakosmerni nihanji sočasni, brez fazne razlike, se njuni amplitudi enostavno seštejeta). Pri fazni razliki $\delta = \pi$ (nihali udarjata v nasprotnih smereh, nihata v protifazi) je $\varphi = \pi$ in $r = r_1 - r_2$.

Tovrstno sestavljanje nihanj predstavimo grafično z vektorskim seštevanjem amplitudnih vektorjev $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$ (slika 5.14). Iz srednje šole se spomnimo (gl. tudi str. 22), da lahko nihanje predstavimo kot projekcijo (npr. na os x) amplitudnega vektorja $\mathbf{r}$, ki kroži v ravnini x-y s stalno kotno hitrostjo ω. Smer prvega vektorja $\mathbf{r}_1$ oklepa v trenutku t z osjo y kót ωt, smer drugega $\mathbf{r}_2$ pa kót $(\omega t + \delta)$. Vektorska vsota $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ da amplitudni vektor $\mathbf{r}$ nastalega nihanja; ta oklepa z osjo y kót $(\omega t + \varphi)$ (gl. sliko 5.14).

Na sliki (5.15) so skicirani časovni grafi posameznih odmikov x_1 in x_2 ter sestavljenega nihanja x za tri fazne razlike $\delta = 0$, $\pi/2$ in π. Za vsak trenutek t seštejemo (oziroma odštejemo, odvisno od predznaka) odmika x_1 in x_2, ki ju zahtevata posamezni nihanji, v rezultirajoči odmik x.

S sestavljanjem enakosmernih nihanj z enakimi frekvencami vedno dobimo (ne glede na fazno razliko med njimi) sinusno nihanje z enako frekvenco. Povsem drugačno nihanje pa nastane, če sestavljamo nihanja z različnimi frekvencami.

Najprej proučimo primer, da se frekvenci ω_1 in ω_2 posameznih nihanj le malo razlikujeta ($\omega_1 \approx \omega_2$), njuni amplitudi in fazi pa sta enaki. Rezultat je nihanje:

$$x = r_1\sin(\omega_1 t) + r_1\sin(\omega_2 t) = = 2r_1\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \tag{5.42}$$

ki ga lahko predstavimo (ker sta frekvenci ω_1 in ω_2 skoraj enaki) kot sinusno nihanje s frekvenco $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$:

$$x = x_0(t)\sin(\omega t) \tag{5.42a}$$

Amplituda nastalega nihanja $x_0(t)$ ni stalna, marveč se spreminja s časom kosinusno s frekvenco $\omega_u = (\omega_1 - \omega_2)/2$:

$$x_0(t) = 2r_1\cos(\omega_u t) \tag{5.42b}$$

Podobno nihanje smo spoznali pri sklopitvi enakih nihal (str. 119); imenujemo ga **utripanje**. Značilno zanj je, da amplituda izmenično narašča in pada (slika 5.16). To se dogaja tem počasneje (frekvenca utripanja ω_u je tem manjša), čim bliže sta si frekvenci ω_1 in ω_2, ki ju sestavljamo.

Utripanje izkoriščamo, ko uglašujemo glasbeni instrument, npr. kitaro. Istočasno zabrenkamo struno ter sprožimo kontrolni ton (npr. glasbene vilice ali tonski generator). Ko je frekvenca tona, ki ga oddaja struna, blizu frekvenci kontrolnega tona, slišimo počasno utripanje (zujanje).

Kadar se frekvence enakosmernih nihanj, ki jih sestavljamo, opazno razlikujejo, v splošnem ne dobimo več nihanja (periodičnega, ponavljajočega se gibanja). Edinole, če so **frekvence posameznih sestavnih nihanj celoštevilčni mnogokratniki najmanjše frekvence,** nastane sicer nihanje, ki pa ni sinusno (harmonično).

Na sliki (5.17) sestavljamo nihanji $x_1 = A_1\sin(\omega_1 t)$ in $x_2 = A_2\sin(\omega_2 t)$, pri čemer je $\omega_2 = 2\omega_1$. Rezultat je periodično gibanje x, ki se ponavlja s frekvenco ω_1 oziroma z nihajnim časom $t_0 = 2\pi/\omega_1$, vendar po obliki ni sinusno (čeprav smo ga bili sestavili iz sinusnih nihanj). Če še dodajamo sinusna nihanja s frekvencami, ki so mnogokratniki najmanjše frekvence ω_1, npr. s frekvenco $\omega_3 = 3\omega_1$, $\omega_4 = 4\omega_1$ itd., se spreminja le oblika sestavljenega nihanja, njegova perioda t_0 (nihajni čas) pa je enaka. Poleg sinusnih (ali namesto njih) lahko uporabimo tudi kosinusna. Pogoj je le, da so posamezne frekvence celoštevilčni mnogokratniki najmanjše frekvence ω_1.

Pokaže se, da lahko **s sestavljanjem sinusnih in/ali kosinusnih nihanj, katerih frekvence so celoštevilčni mnogokratniki najmanjše frekvence ω_1, sestavimo poljubno oblikovano periodično gibanje (nihanje), ki se ponavlja s periodo $t_0 = 2\pi/\omega_1$.**

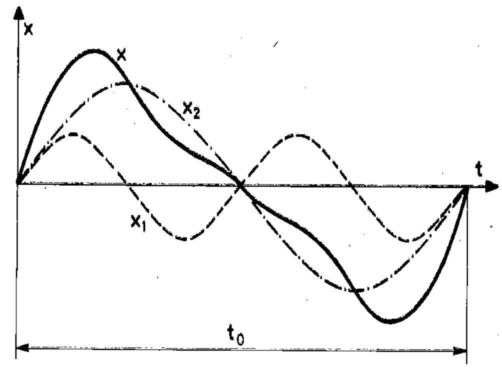
Najmanjša frekvenca ω_1, ki podaja nihajni čas nihanja (t_0), se imenuje **osnovna frekvenca nihanja.** Njeni celoštevilčni mnogokratniki:

$$\omega_n = n\omega_1, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{5.43}$$

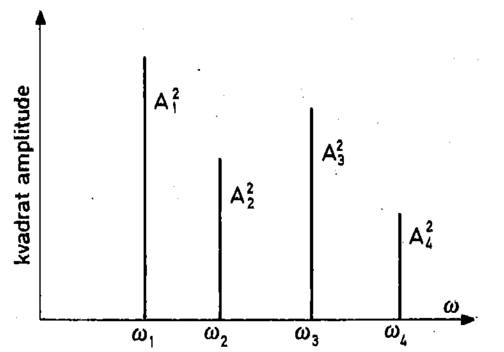
so **višje harmonične frekvence.** Čim več višjeharmoničnih frekvenc je prisotnih, tem bolj se nihanje razlikuje od harmoničnega (sinusnega ali kosinusnega).

Velja tudi obratno:

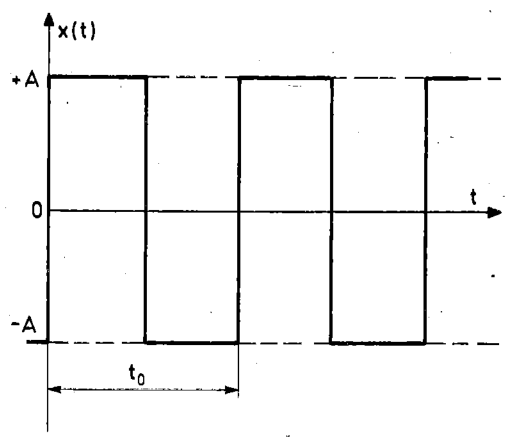
Poljubno periodično funkcijo $x(t)$, ki se npr. ponavlja s periodo t_0, lahko **predstavimo kot vsoto harmoničnih (sinusnih in/ali kosinusnih) nihanj** z osnovno frekvenco $\omega_1 = 2\pi/t_0$ in z višje harmoničnimi frekvencami $\omega_n = n\omega_1$ (n = 2, 3, 4, ...). Čim bolj se funkcija $x(t)$ razlikuje od harmonične (sinusne ali kosinusne), tem več višje harmoničnih dodatkov je potrebnih za njen popis. Pravimo, da je splošno nihanje $x(t)$ sestavljeno iz osnovnega nihanja in iz višje harmoničnih nihanj.



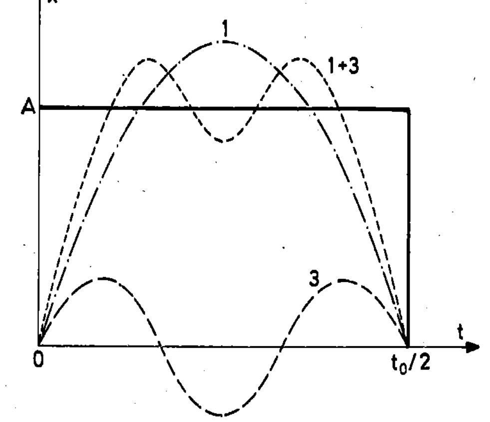
Slika 5.17



Slika 5.18



Slika 5.19



Slika 5.20

Različna nihanja z enako periodo t_0 se razlikujejo v tem, katera in kako močna višjeharmonična nihanja jih sestavljajo. Včasih nastopajo le sinusna nihanja ali le kosinusna, lahko so prisotne vse višje harmonične frekvence ali npr. le sodi (oziroma lihi) mnogokratniki osnovne frekvence itd. Ko raziskujemo neko nihanje, raziskujemo njegovo frekvenčno sestavo, t. i. **spekter nihanja**. Zanimajo nas frekvence in amplitude posameznih višjeharmoničnih nihanj, ki sestavljajo obravnavano nihanje. Navadno podamo kvadrate amplitud posameznih harmoničnih nihanj (osnovno in višje harmonična), ki to nihanje sestavljajo (kvadrate zato, ker je energija nihanja sorazmerna s kvadratom amplitude).

Recimo, da je nihanje s periodo t_0 sestavljeno iz osnovnega nihanja z amplitudo A_1 ter iz višjehramoničnih nihanj z amplitudami A_2, A_3 in A_4. Spekter tega nihanja je skiciran na sliki (5.18). Na absciso nanašamo frekvenco, na ordinato pa kvadrat amplitude posameznih harmoničnih nihanj. Spekter našega nihanja sestavljajo štiri **spektralne črte**, ki so na frekvenčni osi enako razmaknjene med seboj. Višina posamezne črte je merilo za utež, s katero je posamezno harmonično nihanje zastopano v celotnem nihanju.

Razstavljanje periodične funkcije (nihanja) na harmonična nihanja se imenuje **harmonična** ali **Fourierova analiza nihanja**. Vrsta harmoničnih nihanj, ki predstavlja neharmonično nihanje, je **Fourierova vrsta**. V splošnem jo sestavljajo tako sinusni kot kosinusni členi.

Fourierova vrsta za periodično funkcijo $x(t)$ s periodo t_0 ima v splošnem obliko:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1\sin(\omega_1 t) + A_2\sin(2\omega_1 t) + A_3\sin(3\omega_1 t) + \ldots \\ &+ B_1\cos(\omega_1 t) + B_2\cos(2\omega_1 t) + B_3\cos(3\omega_1 t) + \ldots \end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos(n\omega_1 t) \qquad (5.44)$$

kjer je $\omega_1 = 2\pi/t_0$. Neznani parametri A_n in B_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) so odvisni od oblike funkcije $x(t)$. Če je npr. $x(t)$ čisto harmonično nihanje s frekvenco ω_1 in amplitudo x_0, je $A_1 = x_0$, $A_2 = A_3 = \ldots = 0$ in $B_n = 0$ za vse n.

Pri znani funkciji $x(t)$ določimo parameter A_m ($m = 1, 2, \ldots$) oz. B_m tako, da levo in desno stran enačbe (5.44) pomnožimo z ustreznim sinusnim (oz. kosinusnim) faktorjem $\sin(m\omega_1 t)$ in integriramo od 0 do t_0. Dobimo:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} x(t)\sin(m\omega_1 t)dt &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{t_0} \sin(n\omega_1 t)\sin(m\omega_1 t)dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^{t_0} \cos(n\omega_1 t)\sin(m\omega_1 t)dt \end{aligned}$$

V tabelah integralov najdemo, da velja:

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\varphi)\sin(m\varphi)d\varphi \begin{cases} = 0 \text{ za } n \neq m \\ = \pi \text{ za } n = m \end{cases}$$

ter

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi)\sin(m\varphi)d\varphi = 0 \text{ za vse } n \text{ in } m$$

V zgornjih vsotah so torej členi z $n \neq m$ nič in ostane le člen z $n = m$. Dobimo:

$$A_m = (2/t_0) \int_0^{t_0} x(t)\sin(2\pi mt/t_0)dt \qquad (5.45a)$$

Podobno izračunamo (da enačbo 5.44 množimo s $\cos(m\omega_1 t)$):

$$B_m = (2/t_0) \int_0^{t_0} x(t)\cos(2\pi mt/t_0)dt \qquad (5.45b)$$

Primer:

Poišči Fourierovo vrsto za stopničasto nihanje s slike (5.19).

$$x(t) = \begin{cases} +A \text{ za } 0 < t < t_0/2 \\ -A \text{ za } t_0/2 < t < t_0 \end{cases}$$

Ker ima funkcija $x(t)$ v intervalu $(0, t_0/2)$ drugačno obliko kot v intervalu $(t_0/2, t_0)$, razbijemo integral (5.45) na dva dela:

$$\begin{aligned} A_m &= (2A/t_0) \left[\int_0^{t_0/2} \sin(2\pi mt/t_0)dt - \int_{t_0/2}^{t_0} \sin(2\pi mt/t_0)dt \right] = \\ &= (4A/t_0) \int_0^{t_0/2} \sin(2\pi mt/t_0)dt = (2A/\pi m)[1 - (-1)^m] \end{aligned}$$

Torej je A_m za sode m enak nič, za lihe pa $4A/\pi m$. S podobnim računom ugotovimo, da je $B_m = 0$ za vse m. Fourierova vrsta za stopničasto nihanje ima potemtakem obliko:

$$\begin{aligned} x(t) &= (4A/\pi)\,[\sin(\omega_1 t) + (1/3)\sin(3\omega_1 t) \\ &+ (1/5)\sin(5\omega_1 t) + \ldots] \\ \omega_1 &= 2\pi/t_0 \end{aligned}$$

Na sliki (5.20) so za prvo polovico periode t_0 označeni prispevki osnovnega nihanja s frekvenco ω_1 in amplitudo $4A/\pi$ (krivulja 1), prvega višjeharmoničnega nihanja s frekvenco $3\omega_1$ in amplitudo $4A/3\pi$ (krivulja 3) in njuna vsota (krivulja 1+3) v primerjavi s končnim stopničastim nihanjem (zvlečena krivulja), ki nastane, če upoštevamo še vse dodatne višjeharmonične prispevke.

Naloga:

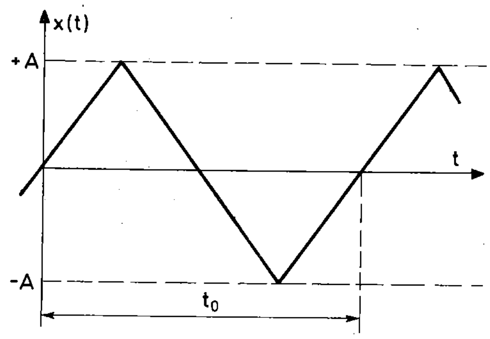
Poišči Fourierovo vrsto za žagasto nihanje s slike (5.21).

Rezultat: $x(t) = (8A/\pi^2)[\sin(\omega_1 t) - (1/3^2)\sin(3\omega_1 t) + (1/5^2)\sin(5\omega_1 t) - \ldots]$

Sestavljanje pravokotnih nihanj

Zanima nas, kakšno gibanje nastane, če sestavimo harmonični nihanji v pravokotnih smereh. Recimo, da opazujemo gibanje svetle sledi elektronskega žarka na zaslonu katodne cevi – osciloskopa (slika 5.22). Na poti do zaslona potuje elektronski žarek skozi prostor med navpičnima odklonskima ploščama (ki ga odklanjata v vodoravni smeri) in med vodoravnima ploščama (ki ga odklanjata v navpični smeri). Na plošče priključimo izmenični napetosti z različnima amplitudama in frekvencama. Zaradi napetosti na navpičnih ploščah niha lisa na ekranu v vodoravni smeri (x) izmenično s frekvenco ω_x, zaradi napetosti na vodoravnih ploščah pa v navpični smeri (y) s frekvenco ω_y. Kako lisa potuje po ekranu, če sta priključeni obe napetosti hkrati?

Drug primer: Težni nihali nihata v navpičnih ravninah, ki sta pravokotni druga na drugo. Vsako nihalo je opremljeno z refleksnim zrcalcem. Svetlobni žarek vpada na prvo zrcalce, se od njega odbija do drugega in od tega na oddaljen navpični zaslon. Če niha le prvo nihalo, niha sled žarka na zaslonu v vodoravni smeri s frekvenco tega nihala. Zaradi nihanja drugega nihala pa niha žarek po zaslonu v navpični smeri. Ko nihata obe nihali hkrati, pleše žarek po zaslonu sem ter tja po krivulji, ki se v splošnem spreminja s časom. Frekvenci posameznih nihal npr. spreminjamo tako, da premikamo uteži, ki sestavljata nihali.

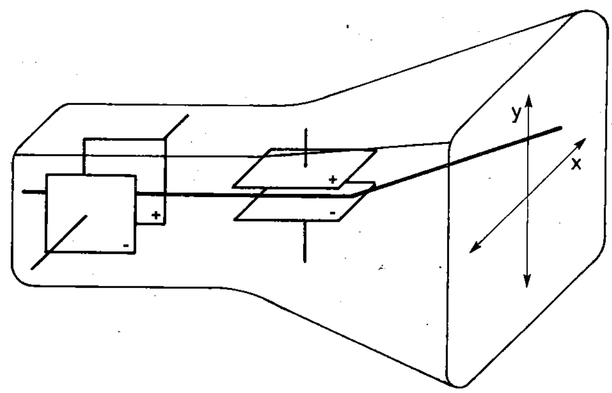


Slika 5.21

Naša naloga je, da ugotovimo, kakšno gibanje v ravnini *x-y* dobimo, če sestavimo harmonično nihanje v smeri osi x z amplitudo x_0 in frekvenco ω_x ter harmonično nihanje v smeri osi y z amplitudo y_0 in frekvenco ω_y. V splošnem se ti nihanji razlikujeta v fazi, npr.:

$$x = x_0 \sin(\omega_x t)$$
$$y = y_0 \sin(\omega_y t - \delta) \qquad (5.46)$$

Podoben primer smo obravnavali v poglavju ploskovno gibanje (str. 21), kjer smo sestavljali harmonični nihanji z enako frekvenco ($\omega_x = \omega_y = \omega$) in amplitudo ($x_0 = y_0 = r$); eno nihanje je bilo sinusno, drugo kosinusno ($\delta = \pi/2$). Videli smo, da je rezultat takšnega sestavljanja kroženje s polmerom r. Ta primer rešimo še enkrat, vendar v bolj splošni obliki: frekvenci sta enaki, $\omega_x = \omega_y = \omega$, amplitudi in fazi pa različni.



Slika 5.22

Da dobimo povezavo med koordinatama x in y, torej da dobimo enačbo tirnice $y(x)$ za nastalo gibanje, izločimo čast t. Iz prve enačbe (5.46) izračunamo: $\sin(\omega t) = x/x_0$ in vstavimo v drugo:

$$y = y_0 \sin(\omega t)\cos(\delta) - y_0 \cos(\omega t)\sin(\delta) =$$
$$= (y_0/x_0)x\cos(\delta) - y_0 \sin(\delta)\sqrt{1 - x^2/x_0^2} \quad \text{ali}$$
$$(y/y_0)^2 + (x/x_0)^2 - 2(x/x_0)(y/y_0)\cos(\delta) = \sin^2(\delta) \qquad (5.47)$$

kar je enačba splošne elipse (slika 5.23). **Pod vplivom dveh pravokotnih harmoničnih nihanj z enakima frekvencama se telo v splošnem giblje po elipsni tirnici;** gibanje je periodično z obhodnim časom $t_0 = 2\pi/\omega$.

V posebnih primerih dobimo (gl. sliko 5.24):

$\delta = 0$ nihanje po premici $y = (y_0/x_0)x$ (slika 5.24a)

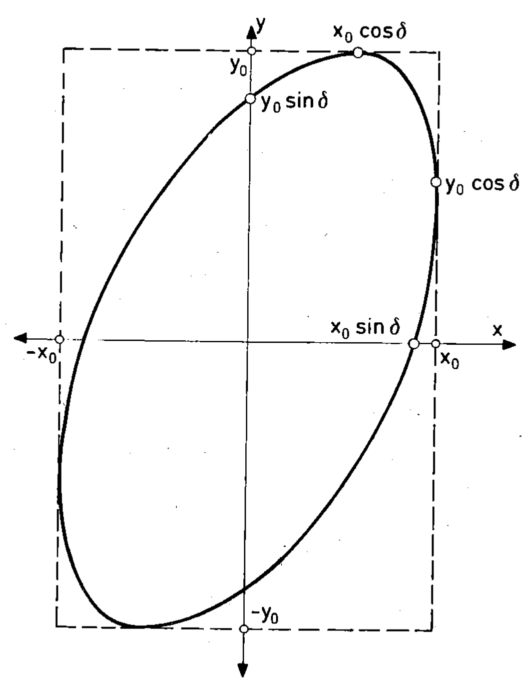
$\delta = \pi/2$ kroženje po elipsi $(y/y_0)^2 + (x/x_0)^2 = 1$, katere glavni osi sovpadata s koordinatnima osema (slika 5.24b)

$\delta = \pi$ nihanje po premici $y = -(y_0/x_0)x$ (slika 5.24c)

Če sestavljamo **harmonična nihanja z različnima frekvencama** (gl. 5.46), v splošnem **ne dobimo** več **periodičnega gibanja**. Gibanje je sicer omejeno na notranjost pravokotnika s stranicama $2x_0$ in $2y_0$, vendar se **tirnica gibanja spreminja s časom (ni stacionarna)**. To pomeni, da v splošnem ne moremo eliminirati časa in dobiti eksplicitno enačbo tirnice $y(x)$. Pokaže se, da **dobimo periodično** gibanje edinole, če sta **frekvenci pravokotnih nihanj v razmerju celih števil**, $\omega_x : \omega_y = 1:2$, 2:3, 7:5 itd. ali v splošnem:

$$\omega_x = n\omega, \omega_y = m\omega \qquad (5.47)$$

kjer sta n in m celi števili, ki nimata skupnega faktorja.



Slika 5.23

Sestavljanje takšnih nihanj dá periodično gibanje, ki se ponavlja z obhodnim časom $t_0 = 2\pi/\omega$ (ω je največji skupni faktor frekvenc ω_x in ω_y).

Primera:

1. Poišči enačbo krivulje, po kateri se periodično giblje telo pod vplivom dveh pravokotnih nihanj: $x = x_0\sin(\omega t)$ in $y = y_0\sin(2\omega t)$. Kolikšen je obhodni čas?

$$y = 2y_0\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 2y_0(x/x_0)\sqrt{1 - x^2/x_0^2} \text{ ali}$$
$$y^2 = 4y_0^2(x^2/x_0^2)(1 - x^2/x_0^2)$$
$$t_0 = 2\pi/\omega$$

Graf te krivulje je na sliki (5.25a). Koordinata y doseže ekstremno vrednost $\pm y_0$ za $x = \pm x_0/\sqrt{2}$.

Naloga: Reši ta primer, če je $\delta = \pi/4$. Graf rešitve je na sliki (5.25b).

2. Sestavimo nihanji $x = x_0\cos(2\omega t)$ in $y = y_0\sin(3\omega t)$. Kakšno gibanje dobimo? Kolikšen je obhodni čas?

$$x/x_0 = \cos(2\omega t) = \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \sqrt{(1 + x/x_0)/2}\ , \sin(\omega t) = \sqrt{(1 - x/x_0)/2}$$

$$y/y_0 = \sin(2\omega t + \omega t) = \sin(2\omega t)\cos(\omega t) + \cos(2\omega t)\sin(\omega t) =$$

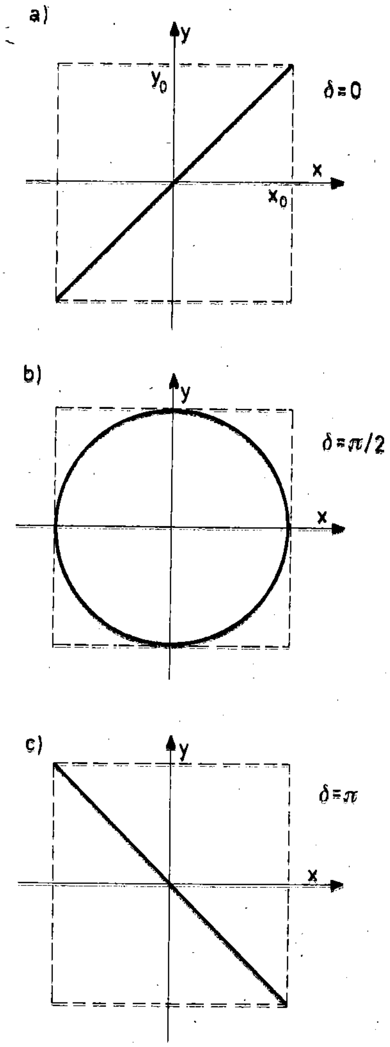
$$\sqrt{1 - x^2/x_0^2}\sqrt{(1 + x/x_0)/2} + (x/x_0)\sqrt{(1 - x/x_0)/2}$$

Po kvadriranju dobimo:

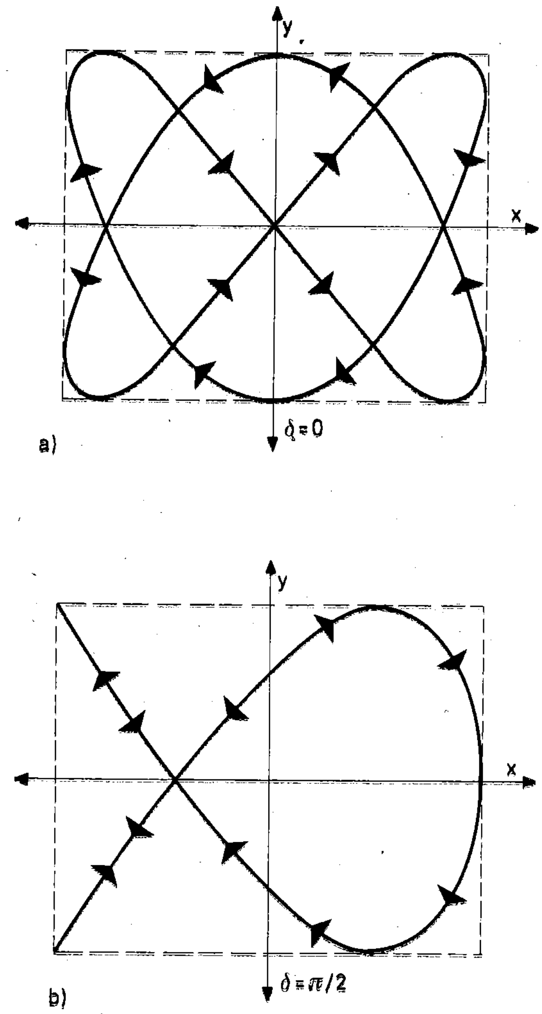
$$y^2/y_0^2 = 0{,}5(1 - x/x_0)(1 + 2x/x_0)^2$$

Graf te funkcije je na sliki (5.26b). Obhodni čas je $t_0 = 2\pi/\omega$

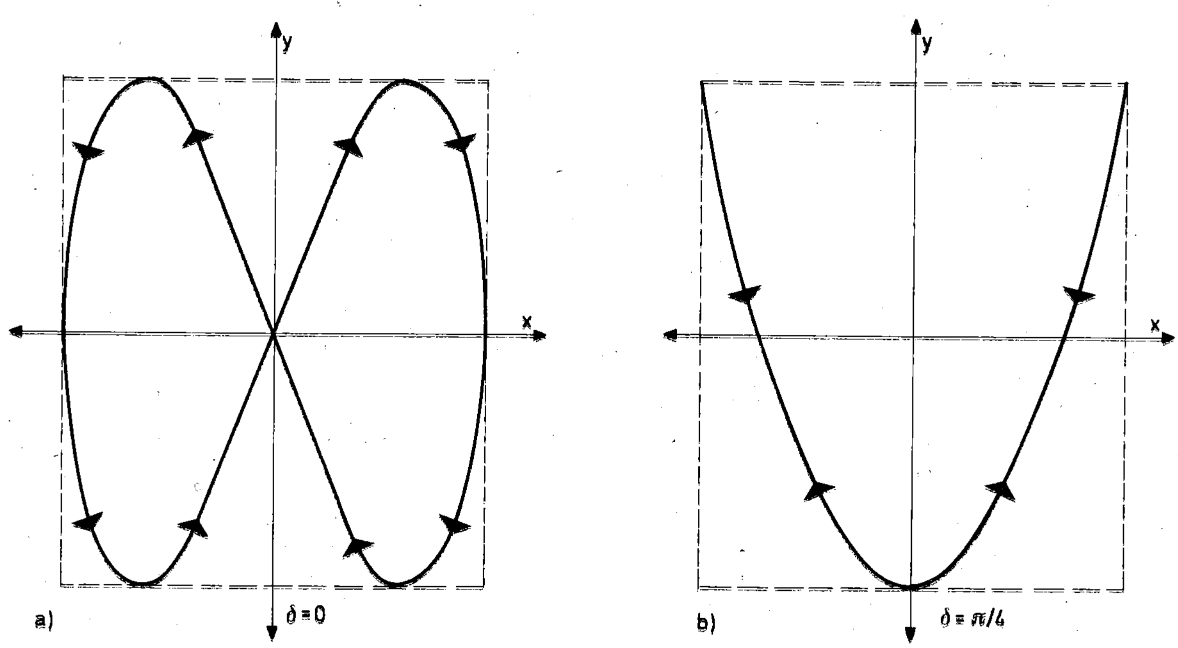
Naloga: Poišči enačbo krivulje za primer, da sta zgornji nihanji sočasni, to je za $x = x_0\sin(2\omega t)$ in $y = y_0\sin(3\omega t)$ (slika 5.26a).



Slika 5.24



Slika 5.26



Slika 5.25