Doslej smo obravnavali premikanje telesa v prostoru. O samem telesu – kako veliko je in iz česa je sestavljeno – pa se nismo spraševali. Imeli smo v mislih ali izredno majhno telo **(točkasto telo)** ali pa translatorno gibanje, pri katerem se vsak del telesa enako giblje, tako da razsežnosti telesa pri opisu gibanja ni treba poznati.

Vsako telo je slej ko prej sestavljeno iz velikega števila točkastih teles (npr. molekul ali večjih molekulskih skupkov), ki so bolj ali manj močno povezana med seboj. V splošnem se posamezna točkasta telesa gibljejo različno in je zato gibanje telesa kot celote dokaj zapleteno, saj se med gibanjem lahko spreminjata tudi oblika in velikost telesa. Kaj lahko o takšnem gibanju povemo, si bomo najprej ogledali pri sistemu točkastih teles.

Sistem točkastih teles – zunanje in notranje sile

Na svetu je neprešteVno mnogo točkastih teles. Razširjena so po celotnem vesolju, vendar neenakomerno, ponekod so bolj zgoščena kot drugod. Ker sile med njimi upadajo najmanj s kvadratom oddaljenosti, zelo oddaljena telesa ne vplivajo na gibanje teles iz naše bližnje okolice, zato se zanje ne zanimamo. V **sistem točkastih teles** združimo vsa tista točkasta telesa iz naše okolice, katerih gibanje nas zanima. Vsakokrat posebej se dogovorimo, katera telesa spadajo v izbrani sistem, torej katera telesa obravnavamo. Vsa druga telesa pripadajo okolici našega sistema in nas njihovo gibanje ne zanima. Dogovor o tem, katera telesa so v izbranem sistemu in katera v okolici, je seveda poljuben in ga po potrebi spreminjamo.

Telesa iz okolice učinkujejo na izbrana točkasta telesa sistema s silami; to se **zunanje sile sistema.** Če so okolišna telesa zelo oddaljena, lahko vpliv zunanjih sil na gibanje sistema zanemarimo; tedaj pravimo, da je **sistem izoliran od okolice.** V splošnem to ni, pa se sprašujemo, kako zunanje sile pospešujejo sistem.

Sile, s katerimi posamezna točkasta telesa izbranega sistema učinkujejo drugo na drugo, se imenujejo **notranje sile sistema.** Značilno zanje je, da se pojavljajo v parih nasprotno enakih sil. Če namreč eno telo učinkuje na drugo s silo, istočasno tudi drugo telo učinkuje na prvo z nasprotno enako silo (glej zakon o medsebojnem učinkovanju teles, stran 31), tako da je vektorska vsota vsakega para sil nič. Sledi, da je **vektorska vsota vseh notranjih sil,** s katerimi vsa telesa sistema medsebojno učinkujejo, **enaka nič.**

Recimo, da je izbrani sistem sestavljen iz N točkastih teles. Eno od njih ima maso m_i, njegovo trenutno lego in hitrost podajata vektorja $\mathbf{r}_i$ in $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ (slika 3.1). Če teče indeks i prek vseh celih števil od 1 do N, zajamemo vsa točkasta telesa našega sistema.

Gibalna količina telesa m_i ($\mathbf{G}_i = m_i\mathbf{v}_i$, gl. 2.2) se spreminja s časom, ker na telo delujejo notranje in zunanje sile. Z $\mathbf{F}_i$ označimo rezultanto vseh zunanjih sil, s katerimi vsa telesa iz okolice učinkujejo na točkasto telo m_i, z $\mathbf{f}_{ji}$ pa notranjo silo, s katero točkasto telo m_j učinkuje na m_i (slika 3.2). Točkasto telo m_i torej v celoti čuti silo:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{1i} + \mathbf{f}_{2i} + \mathbf{f}_{3i} + \ldots + \mathbf{f}_{Ni} = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{ji}$$

3. TELO

ki podaja časovni odvod gibalne količine $\mathbf{G}_i$ (gl. 2.3):

$$d\mathbf{G}_i/dt = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{ji} \tag{3.1}$$

Podobno enačbo napišemo za vsako točkasto telo našega sistema, to je za

$$i = 1,2,\ldots, N$$

Dobimo N enačb, pri čemer je običajno N zelo veliko število. Ako bi poznali sile (notranje in zunanje), bi lahko iz zgornjih enačb izračunali, kako se gibalna količina (to je hitrost) vsakega točkastega telesa sistema spreminja s časom. Toda sile (predvsem notranje) so odvisne od razdalje med telesi, te pa se zaradi gibanja spreminjajo s časom (vsaka po svoje), in problem je v splošnem težko rešljiv (vsaj brez pomoči velikega računalnika). Zatorej ne moremo pričakovati, da bi lahko v splošnem ugotovili, kako se posamezna točkasta telesa sistema gibljejo, kako se njihove hitrosti spreminjajo s časom.

Kljub temu lahko vsaj nekaj povemo o gibanju celotnega sistema. Napišimo enačbo (3.1) za vsako telo posebej, to je za $i = 1,2,\ldots,N$ in nato dobljene enačbe seštejmo. Dobimo:

$$\sum_{i=1}^{N} d\mathbf{G}_i/dt = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{ji} \tag{3.2}$$

Na levi strani imamo vsoto časovnih odvodov gibalnih količin posameznih teles. Ker je vsota odvodov enaka odvodu vsote, lahko zapišemo:

$$\sum d\mathbf{G}_i/dt = d(\sum \mathbf{G}_i)/dt = d\mathbf{G}/dt$$

kjer je $\mathbf{G}$ vektorska vsota gibalnih količin vseh teles sistema, to je **gibalna količina celotnega sistema:**

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \ldots + \mathbf{G}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \tag{3.3}$$

Prvi člen na desni strani sumarne enačbe (3.2) predstavlja **rezultanto vseh zunanjih sil,** ki učinkujejo na vsa točkasta telesa sistema:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i$$

Drugi člen pa zajema celotno vektorsko vsoto vseh notranjih sil. Ker se te paroma medsebojno kompenzirajo, je njihova rezultanta nič:

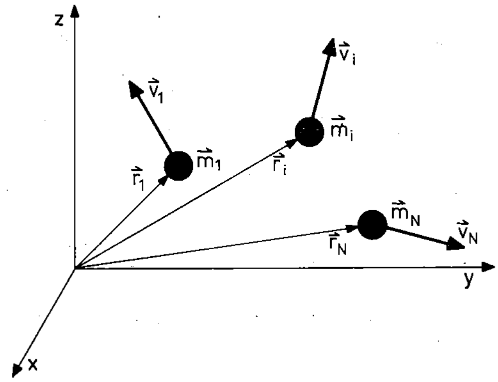
$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{ji} = 0$$

Po vsem tem se sumarna enačba (3.2) poenostavi v enačbo:

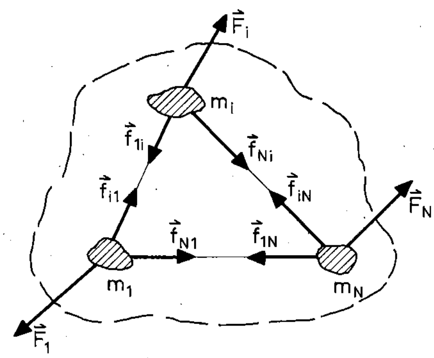
$$\boxed{d\mathbf{G}/dt = \mathbf{F}} \tag{3.4}$$

iz katere sledi, da je **gibalna količina sistema odvisna** le **od zunanjih sil;** notranje sile izpadejo. **Gibalna količina sistema se spreminja s časom tako, kot predpisujejo zunanje sile; notranje sile ne morejo vplivati nanjo.** Te sicer spreminjajo gibalne količine posameznih teles sistema, ne morejo pa spremeniti njihove vsote, to je celotne gibalne količine sistema.

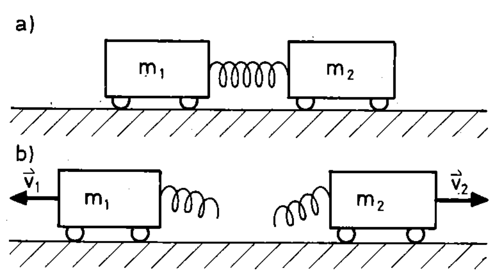
Za $\mathbf{F} = 0$ dobimo $d\mathbf{G}/dt = 0$ ali
$\mathbf{G}$ **= konst.** (3.5)



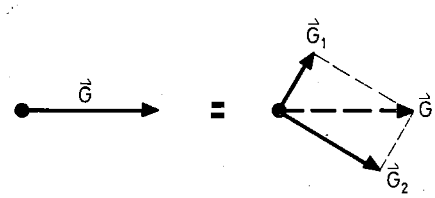
Slika 3.1



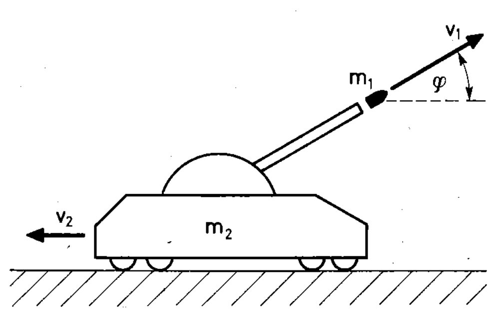
Slika 3.2



Slika 3.3



Slika 3.4



Slika 3.5

Če na sistem ne delujejo zunanje sile, oziroma če je njihova rezultanta nič, je gibalna količina sistema stalna (se ne spreminja s časom, četudi učinkujejo in se spreminjajo notranje sile).

Primeri:

1. Voziček z maso m_1 je prek prožne vzmeti spet z vozičkom m_2 (slika 3.3a). V začetku vozička mirujeta, vzmet med njima je stisnjena. Ko vzmet sprožimo, da se raztrga, vozička odletita s hitrostma $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ v nasprotnih smereh (slika 3.3b). V kakšnem razmerju sta si hitrosti vozičkov? Trenje zanemarimo.

Naš sistem sestavljata vozička m_1 in m_2. Resda nista točkasti telesi, vendar če se gibljeta translatorno (kolesa izvzamemo), ju lahko obravnavamo kot takšni. Ker v začetku mirujeta, je njuna skupna gibalna količina nič: $\mathbf{G} = 0$. Na vozička delujejo zunanje sile: njuni teži in pravokotni sili podlage. Te se medsebojno uničujejo, zato je $\mathbf{F} = 0$. Torej je gibalna količina obeh vozičkov ves čas nič, četudi se vmes sprožijo notranje sile vzmeti. Po sprožitvi vozička odskočita s takšnima hitrostma $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$, da je vektorska vsota njunih gibalnih količin nič:

$$\mathbf{G} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0 \text{ ali } \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 m_1/m_2$$

En voziček odnese v eno smer tolikšno gibalno količino, kolikršno odnese drugi v nasprotno smer. Notranji sili sprožene vzmeti spremenita gibalno količino vsakega vozička, vendar tako, da je skupna gibalna količina vozičkov še zmeraj nič, kot je bila pred sprožitvijo. Celoten $\mathbf{G}$ lahko spremenijo le zunanje sile, teh pa v tem primeru ni.

Podobno kot zgoraj se dogaja pri streljanju z različnimi orožji. Izstrelek odnese neko gibalno količino (kolikšno, je odvisno od notranjih sil, to je od energije, sproščene z eksplozijo); z enako veliko gibalno količino sune orožje samo (npr. puška, top) v nasprotno smer. Da ne sune s preveliko hitrostjo, je orožje masivno (njegova masa velika v primerjavi z maso izstrelka).

Nadaljnji primeri:

S kolikšno hitrostjo se odrine čoln, s katerega skočimo na breg? Kako se giblje ladja zaradi tega, ker se po njenem krovu sprehaja potnik?

2. Granata se giblje enakomerno s stalno gibalno količino $\mathbf{G}$ (slika 3.4). Naenkrat se razleti na različna kosa, ki odletita vsak v svojo smer. Kaj lahko rečemo o hitrosti kosov?

Hitrost in smer gibanja kosov sta sicer odvisni od načina razstrelitve granate (od sproščene energije, od notranjih sil, ki se sprostita ob razstrelitvi) in sta zato v različnih primerih različni, vendar je njuna skupna gibalna količina vsakič enaka prvotni gibalni količini $\mathbf{G}$ granate:

$$\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$$

Eksplozija granate ne spremeni celotne gibalne količine.

3. Oklepni voz, ki miruje na vodoravnem tiru, izstreli granato (m_1 = 200 kg) s hitrostjo v_1 = 1 km/s pod kotom $\varphi = 45°$ glede na tir. S kolikšno hitrostjo (v_2) se premakne voz po tiru, če je njegova masa m_2 = 20 t ? (Slika 3.5)

Ker granata odleti poševno navzgor, bi se moral voz odriniti v nasprotno smer v tla. Tir se temu upre, pojavi se dodatna sila tal. Voz se lahko premakne le v vodoravni smeri. V tej smeri dobi gibalno količino m_2v_2, ki je nasprotno enaka vodoravni projekciji odnešene gibalne količine (granate): $m_1v_1\cos\varphi$. Za navpično projekcijo $m_1v_1\sin\varphi$ pa poskrbi povečana pravokotna sila tal.

V tem primeru se gibalna količina ohranja le v vodoravni smeri (v tej smeri namreč ni zunanjih sil), v navpični smeri pa se poveča; prvotno je bila nič, po izstrelitvi granate pa je $m_1v_1\sin\varphi$; ta sprememba je enaka sunku povečane sile tal (gl. 2.5).

Masno središče sistema

Enačba (3.4), ki podaja časovno spreminjanje celotne gibalne količine sistema v odvisnosti od zunanjih sil, je po obliki podobna enačbi (2.3) za spremembo gibalne količine točkastega telesa. Lahko si izberemo neko točko, t. i. **masno središče sistema** (C), ki predstavlja celoten sistem točkastih teles. Mislimo si, da **masno središče C zajema maso celotnega sistema** in se **giblje s celotno gibalno količino G sistema, kot da bi zunanje sile delovale neposredno nanj.**

Masno središče ni nobeno točkasto telo, je umišljena (matematična) točka, ki jo vpeljemo zgolj zato, da z njeno pomočjo enostavneje zasledujemo gibanje celotnega sistema.

Trenutno lego masnega središča podaja krajevni vektor $\mathbf{r}_C$, njegovo hitrost pa vektor $\mathbf{v}_C = d\mathbf{r}_C/dt$ (slika 3.6). Seveda je lega odvisna od prostorske razporeditve posameznih točkastih teles, ki sestavljajo sistem. Ugotovimo jo s pomočjo definicije, da se masno središče giblje z gibalno količino $\mathbf{G}$ sistema, kot da bi bila v njemu zbrana vsa masa m sistema. Sledi:

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{G}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_C \tag{3.6}$$

ali

$$\mathbf{v}_C = (1/m)\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i \tag{3.6a}$$

Hitrost masnega središča je povprečje hitrosti posameznih točkastih teles sistema; utež povprečenja je masa telesa. Masivnejša telesa več prispevajo k hitrosti masnega središča kot lažja.

Ker je $\mathbf{v}_C = d\mathbf{r}_C/dt$ in $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$, napišemo naprej:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m\frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \text{ ali}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}_C) \text{ ter (ne upoštevaje integracijske konstante)}$$

$$m\mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i \text{ ali}$$

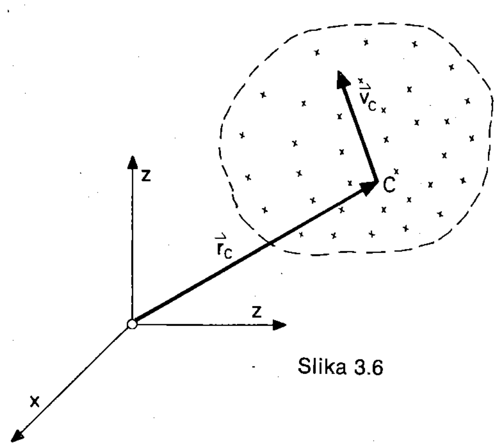
$$\boxed{\mathbf{r}_C = (1/m)\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i} \tag{3.7}$$

Projekcije krajevnega vektorja masnega središča na posamezne koordinatne osi so dane z enačbami:

$$x_C = (1/m) \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \tag{3.7a}$$

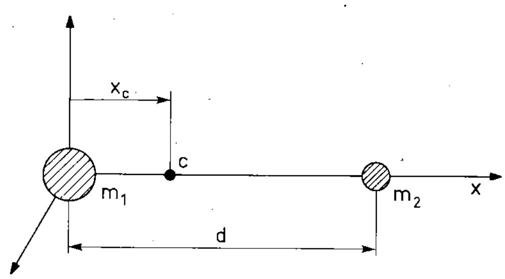
$$y_C = (1/m) \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \tag{3.7b}$$

$$z_C = (1/m) \sum_{i=1}^{N} m_i z_i \tag{3.7c}$$



Slika 3.6

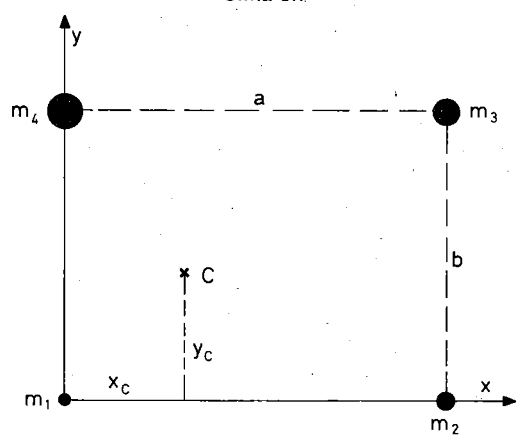
Podobno kot hitrost $\mathbf{v}_C$ je tudi krajevni vektor $\mathbf{r}_C$ masnega središča povprečje krajevnih vektorjev $\mathbf{r}_i$ posameznih točkastih teles, ki sestavljajo sistem, pri čemer vsako telo prispeva k povprečju sorazmerno z maso. Masno središče C sistema je zato v bližini masivnih teles; telesa z majhno maso malo odločajo o legi masnega središča celotnega sistema.



Slika 3.7

Primera:

1. Točkasti telesi $m_1 = 2$ kg in $m_2 = 1$ kg sta razmaknjeni za $d = 60$ cm. Kje je njuno masno središče (slika 3.7)? Koordinatni sistem zasukamo tako, da je npr. telo m_1 v koordinatnem izhodišču ($r_1 = 0$), telo m_2 pa na osi x ($y_2 = z_2 = 0$, $x_2 = d$). Potem velja: $y_C = z_C = 0$ in $x_C = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2) = dm_2/m = d/3 = 20$ cm.



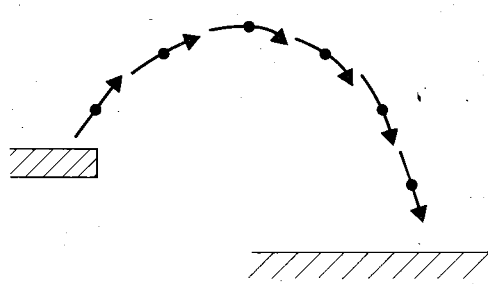
Slika 3.8

2. Točkasta telesa $m_1 = 10$ g, $m_2 = 20$ g, $m_3 = 30$ g in $m_4 = 40$ g so razvrščena po ogliščih pravokotnika s stranicama $a = 60$ cm in $b = 40$ cm, kot kaže slika (3.8). Določi njihovo masno središče!

Ker so vsa telesa v isti ravnini, usmerimo koordinatni sistem tako, da sta osi x in y v tej ravnini, os z pa pravokotna nanjo. Tedaj je $z_C = 0$; računamo le y_C in x_C:

$$x_C = (m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4)/m = a(m_2 + m_3)/m = \\ = 30 \text{ cm}$$

$$y_C = (m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4)/m = b(m_3 + m_4)/m = \\ = 28 \text{ cm}$$



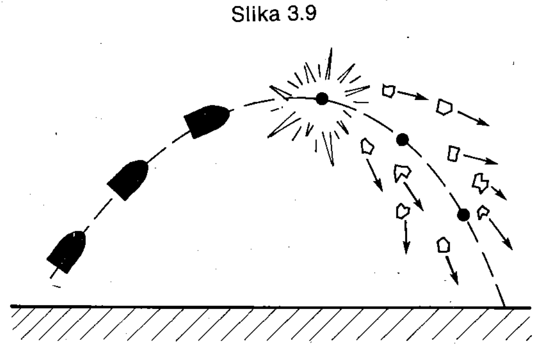
Slika 3.9

Po definiciji se masno središče sistema giblje tako, kot da bi imelo celotno gibalno količino in celotno maso sistema in kot da bi zunanje sile delovale neposredno nanj. Enačbo (3.4) interpretiramo kot posplošen Newtonov zakon dinamike za gibanje masnega središča:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v}_C)}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = m\mathbf{a}_C$$

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C} \tag{3.7'}$$

kjer je $\mathbf{a}_C = d\mathbf{v}_C/dt$ pospešek masnega središča.



Slika 3.10

Vidimo, da je **pospešek masnega središča odvisen od zunanjih sil.** Masno središče sistema se giblje tako, kot predpisujejo zunanje sile. Notranje sile nanj ne vplivajo. Četudi se spreminjajo in se npr. močno povečajo (ob eksploziji sistema), se to ne pozna na gibanju masnega središča sistema. Notranje sile lahko spreminjajo hitrost oziroma gibalno količino posameznih teles sistema, ne morejo pa spreminjati hitrosti $\mathbf{v}_C$ njihovega masnega središča.

Ko skakalec skoči s skakalne deske v vodo, se njegovo masno središče (nekje blizu želodca) giblje pod vplivom zunanje sile – teže po paraboli poševnega meta (upor zraka npr. zanemarimo). Med skokom se skakalec skrči (z delovanjem notranjih sil – sil mišic) in zavrti okrog svojega središča, vendar se njegovo središče zaradi tega ne giblje nič drugače (slika 3.9). To sicer velja le, če zares lahko zanemarimo upor zraka. Ta se namreč spremeni, ko se skakalec skrči, zato se tudi masno središče giblje drugače.

Topovska granata se giblje po paraboli, ki je značilna za poševni met pod vplivom teže. Ko granata med letom eksplodira in se razleti na koščke, se masno središče razletelih koščkov še naprej giblje po prvotni paraboli (slika 3.10). Razstrelitev granate namreč povzročijo notranje sile, te pa ne morejo vplivati na hitrost masnega središča granate. Ali se po eksploziji granate spremeni tudi gibanje masnega središča, če upoštevamo upor zraka? Zakaj?

Reakcijska sila

Ko odskočimo s čolna, se čoln odrine v nasprotno smer, njegova hitrost v nasprotno smer se poveča. Z vozečega vozička odvržemo predmet v smeri nazaj; hitrost vozička v smeri naprej se zaradi tega poveča. Če stalno odmetujemo predmete nazaj, se hitrost vozička stalno povečuje. Voziček se giblje pospešeno v nasprotni smeri, kot odmetujemo predmete. Odvrženi predmeti se »odrivajo« od vozička in ga tako pospešujejo v nasprotno smer. Pravimo, da se voziček pospešuje, ker ga odvrženi predmeti odrivajo z reakcijsko silo.

Raketa izmetuje izpušne pline. Ti z reakcijsko silo porivajo raketo naprej, nasproti smeri iztekanja. V nekem trenutku ima raketa maso m in se giblje s hitrostjo v. V naslednjem kratkem časovnem intervalu dt raketa odvrže pline z maso dm in z relativno hitrostjo u, zaradi česar se hitrost rakete poveča za dv. Gibalna količina izpušnih plinov v smeri naprej se zmanjša z $v\,dm$ na $(v-u)dm$, to je za $u\,dm$. Za toliko se poveča gibalna količina rakete v smeri naprej: $m\,dv$. Sledi:

$$u\,dm = m\,dv$$

Enačbo delimo z dt, da dobimo spremembo v časovni enoti:

$$u(dm/dt) = m\,dv/dt$$

Količnik dm/dt se imenuje **masni tok** izpušnih plinov (Φ_m):

$$\boxed{\Phi_m = dm/dt} \qquad (3.8)$$

Pove maso snovi, ki jo raketa odvrže v časovni enoti (merska enota je kg/s).

Pospešek $a = dv/dt$ rakete zaradi reakcijske sile izpušnih plinov potemtakem računamo z enačbo:

$$\boxed{ma = u\Phi_m} \qquad (3.9)$$

Produkt relativne hitrosti u iztekanja in masnega toka Φ_m iztekajočih plinov ima dimenzijo sile; imenuje se **reakcijska sila** iztekajočih plinov. Ta je tem večja, s čim večjo hitrostjo plini iztekajo iz rakete in čim večji je njihov masni tok.

Primer:

Plini iztekajo iz rakete z relativno hitrostjo $u = 1500$ m/s, masni tok je $\Phi_m = 150$ kg/s. Kolikšen pospešek vsiljuje reakcijska sila raketi z maso $m = 10$ t?

$$a = u\Phi_m/m = 1500\ \mathrm{ms^{-1}} \cdot 150\ \mathrm{kgs^{-1}}/10000\ \mathrm{kg} = 22{,}5\ \mathrm{m/s^2}$$

Balon s stisnjenim zrakom pritrdimo na voziček. Balon odpremo, da začne zrak iztekati. Reakcijska sila iztekajočega zraka potiska voziček v nasprotno smer. Voda, iztekajoča iz pipe, odriva pipo z reakcijsko silo. Ta je posebno opazna pri gasilski cevi ali v kopalnici pri cevi za tuširanje. Če pipo na hitro odpremo, da voda brizgne iz cevi, se cev sunkovito premakne v nasprotno smer, kot izteka voda. Reakcijska sila iztekajoče vode poganja vrteči se škropilnik za namakanje travnika.

Raketa nosi s seboj gorivo, ki izgoreva v posebnih komorah. Nastali vroči plini z veliko hitrostjo izstopajo skozi izpušne šobe in odrivajo raketo z reakcijsko silo, tako da se raketa lahko pospešuje tudi skozi brezzračni prostor.

Primer:

Raketo z zemeljskega površja izstrelimo v navpični smeri. Kako se mora masa rakete spreminjati s časom, da se raketa dviga s stalno hitrostjo v_0? Začetna masa rakete skupaj z gorivom je m_0, izpušni plini iztekajo iz rakete s stalno relativno hitrostjo u. Upor zraka zanemarimo.

Na raketo delujeta sili: teža rakete $m(t)g$ navzdol ter reakcijska sila $u\Phi_m(t)$ navzgor, pri čemer je $\Phi_m = -dm/dt$. Težni pospešek se z višino zmanjšuje (gl. 2.11): $g = g_0R^2/r^2$, g_0 je težni pospešek na površju Zemlje (= 9,81 m/s²), R je polmer Zemlje (= 6400 km), r je oddaljenost rakete od središča Zemlje $= R + v_0t$.

Raketa se dviga s stalno hitrostjo v_0, če je potisna reakcijska sila ves čas enaka teži:

$$u\Phi_m = mg$$
$$u\frac{dm}{dt} = -mg_0R^2(R+v_0t)^{-2} \text{ ali}$$
$$u\,m^{-1}dm = -g_0R^2(R+v_0t)^{-2}dt$$

(predznak minus zato, ker se m zmanjšuje s časom in pozitivnemu dt ustreza negativen dm)

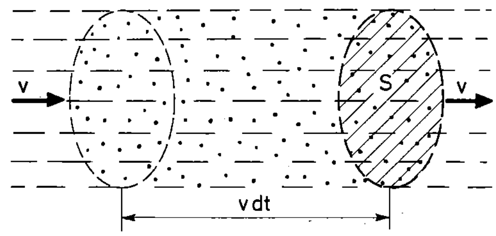
Enačbo integriramo: na levi strani od m_0 do m, na desni pa od 0 do t. Dobimo:

$$u\ln(m_0/m)\ (g_0R^2/v_0)[R^{-1} - (R+v_0t)^{-1}] = g_0Rt/(R+v_0t)$$

ter

$$m = m_0 \exp\left[-\frac{g_0 Rt}{u\,(R + v_0 t)}\right]$$

Ker poznamo maso rakete kot funkcijo časa, lahko izračunamo, kako se mora masni tok izpušnih plinov $\Phi_m = -dm/dt$ spreminjati s časom, da se bo raketa dvigala enakomerno s stalno hitrostjo v_0.



Slika 3.11

Sila curka

S pojmom curek razumemo množico (sistem) delcev, ki se gibljejo vzporedno s približno enako hitrostjo, npr. vodni curek, zračni tok, curek elektronov v katodni cevi, curek kroglic iz strojnice itd. Podamo hitrost curka (to je hitrost delcev v curku) v, njegov prečni presek S in masni tok Φ_m. Masni tok je kvocient mase snovi (dm), ki v časovnem intervalu dt steče skozi prečni presek curka:

$$\Phi_m = dm/dt$$

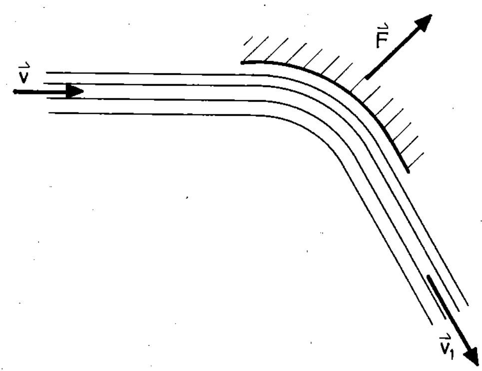
Skozi prerez S (gl. sliko 3.11) prispe v časovnem intervalu dt vsa snov, ki je v volumenskem elementu z osnovno ploskvijo S in dolžino vdt vzdolž curka do prereza S, to je: $dm = \varrho dV = \varrho Svdt$, pri čemer je ϱ gostota snovi v curku, to je masa snovi v enoti prostornine curka. Sledi:

$$\boxed{\Phi_m = \varrho Sv} \tag{3.10}$$

Če poznamo število (n) delcev (npr. kroglic), ki v enoti časa pretečejo skozi prečni prerez curka, je seveda:

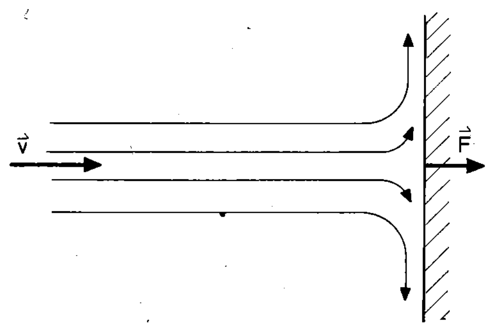
$$\Phi_m = n\mu \tag{3.10a}$$

kjer je μ masa enega delca v curku.



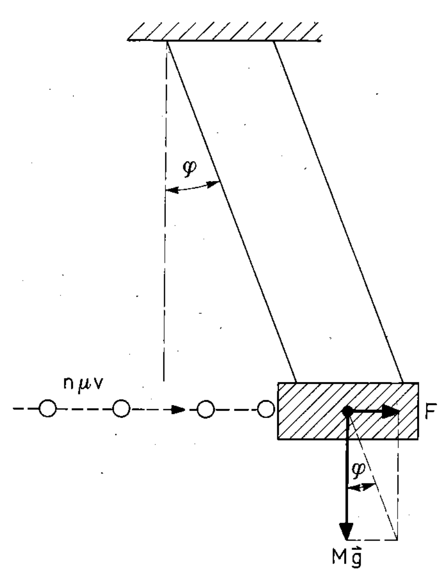
Slika 3.12

Curek predstavlja gibajočo se snov, to je tok gibalne količine. Ta se ne spreminja, če je vsota vseh sil, ki učinkujejo na delce curka, enaka nič; tedaj curek teče enakomerno – premočrtno s stalno hitrostjo. Brž ko pa curek zadene na oviro, se gibalna količina spremeni. **Sprememba gibalne količine v enoti časa je enaka sili** (gl. 2.3), s katero ovira učinkuje na curek, oziroma je nasprotno enaka sili, s katero curek odriva oviro.



Slika 3.13

V splošnem ovira spremeni tako velikost kot smer hitrosti delcev v curku. Recimo, da delci vpadajo na oviro s hitrostjo $\mathbf{v}$, zapuščajo pa jo s hitrostjo $\mathbf{v}_1$ (slika 3.12). V časovnem intervalu dt prispe do ovire $dm = \Phi_m dt$ snovi, ki prinese gibalno količino $\mathbf{v}dm$. Zaradi ovire se ta gibalna količina spremeni za $d\mathbf{G} = dm(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})$, kar je sprememba gibalne količine curka v časovnem intervalu dt. Kvocient spremembe gibalne količine in časovnega intervala, v katerem se sprememba zgodi, je enak sili, ki to spremembo povzroči, to je sili, s katero ovira zadržuje curek: $d\mathbf{G}/dt = (dm/dt)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) = \Phi_m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})$.



Slika 3.14

Sila curka je sila, s katero curek odriva oviro; je nasprotno enaka sili, s katero ovira moti njegovo gibanje, to je:

Sila curka $$\boxed{\mathbf{F} = \Phi_m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)} \tag{3.11}$$

Sila curka je produkt masnega toka in spremembe hitrosti curka.

Zgodi se, da se curek ob oviri ustavi ($v_1 = 0$) ali pa se ob njej razlije enakomerno v vse smeri (slika 3.13). Tedaj ima sila curka vpadno smer (odriva oviro v smeri curka) in je velika:

$$F = \Phi_m v \tag{3.11a}$$

Primera:

1. Voda v potoku teče s hitrostjo 1,5 m/s, prečni presek je okrog 10 dm^2. Potok nenadoma zajezimo s pravokotno pregrado, tako da voda odteka v pravokotni smeri v sosednja bazena na obeh straneh potoka. S kolikšno silo moramo zadrževati pregrado, da je potok ne odnese?

$$F = \Phi_m v = \varrho S v^2 = 10^3 \mathrm{kgm^{-3}} \cdot 0{,}1 \mathrm{m^2} \cdot 2{,}25 \mathrm{m^2 s^{-2}} =$$
$$F = 225 \ \mathrm{kgms^{-2}} = 225 \ \mathrm{N}$$

2. Lesena klada z maso $M = 2$ kg visi na dolgih nitkah (slika 3.14). Vanjo streljamo s strojnico v vodoravni smeri; v sekundi izstrelimo 40 metkov, masa vsakega metka je 0,5 g. Metki se zarivajo v klado in jo odrivajo, zaradi česar se klada odkloni za kót 15°. Kolikšna je povprečna hitrost izstreljenih metkov?

Na visečo klado delujejo tele sile: teža Mg, sila curka metkov F in sila v vrvicah. Klada se umiri pri takšnem kotu φ, da ima rezultanta med težo in silo curka smer vrvic (in je nasprotno enaka sili v vrvicah), tako da velja: $\mathrm{tg}\varphi = F/Mg$ ali $F = Mg\mathrm{tg}\varphi$. Sila curka izstreljenih metkov znaša (gl. 3.11a in 3.10a): $F = \Phi_m v = n\mu v$. Sledi:

$$v = (Mg/n\mu)\mathrm{tg}\varphi = 260 \ \mathrm{m/s} = 950 \ \mathrm{km/h}$$

Silo vodnega (parnega) curka izkoriščamo pri vodnih (parnih) turbinah. Ovira so lopatice na obodu rotorja turbine. Vpadni curek odriva lopatice in s tem vrti rotor. Torej s pomočjo sile curka spreminjamo kinetično energijo curka v rotacijsko kinetično energijo rotorja turbine.

Rotor turbine se vrti, zato lopatice bežijo pred curkom; relativna hitrost med curkom in lopatico je manjša, kot če lopatice mirujejo, manjša je tudi sila, s katero curek odriva lopatice. Za primer turbine vzemimo, da so lopatice zakrivljene, tako da odbijajo curek z enako relativno hitrostjo nazaj (slika 3.15). Če se lopatice gibljejo s hitrostjo v_0 v smeri curka, curek zadeva obnje z relativno hitrostjo $v - v_0$; z enako relativno hitrostjo se odbija nazaj, kar pomeni, da se curek po odboju od lopatic giblje v levo s hitrostjo $2v_0 - v$, hitrost curka se torej spremeni za $2(v - v_0)$. V tem primeru curek odriva lopatice s silo $F = \Phi_m \cdot 2(v - v_0)$. Masni tok Φ_m pove maso snovi, ki v enoti časa priteka do lopatic turbine. Če so lopatice razvrščene po obodu rotorja na gosto (ko se ena odmakne, je že druga v curku), je masni tok Φ_m neodvisno od hitrosti v_0 lopatic enak $\varrho S v$. Pri posamičnih lopaticah pa je treba upoštevati relativno hitrost: $\Phi_m = \varrho S(v - v_0)$.

Želimo, da bi rotor turbine čim hitreje prejemal kinetično energijo, da bi torej sila curka delala s čim večjo močjo. Iz srednje šole se spomnimo, da je moč enaka produktu sile in hitrosti (gl. str. 87). Vpadni curek potemtakem oddaja lopaticam moč:

$$P = Fv_0 = \Phi_m \cdot 2(v - v_0)v_0$$

Kako hitro naj se gibljejo lopatice rotorja, da bodo od curka prejemale največjo možno moč? Če se gibljejo zelo počasi, je moč P majhna, ker je v_0 majhen. Pri hitrem gibanju pa je P zopet majhen, ker je F majhen (gl. sliko 3.16). Največjo možno moč dobimo pri vmesni hitrosti v_0 lopatic, za katero velja:

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}v_0 = 0$$

Za turbino z gosto razporejenimi lopaticami velja: $P = 2\varrho S v.(v - v_0)v_0$ in $\mathrm{d}P/\mathrm{d}v_0 = 2\varrho S v(v - 2v_0) = 0$ ter $v_0 = v/2$. **Turbina prejema največjo možno moč, če se lopatice gibljejo s polovično hitrostjo curka.** Tedaj se curek po odboju od lopatic ustavi in torej preda lopaticam vso svojo kinetično energijo. (Za turbino s posamičnimi lopaticami pa dobimo največjo možno moč pri $v_0 = v/3$)

Pritisk padajočega peska na tla. Pesek pada z višine h na vodoravna tla, kjer obmiruje (slika 3.17). Zanima nas sila N, s katero padajoči pesek pritiska ob tla, ki ga ustavljajo.

Delci peska padajo na tla s hitrostjo $v = \sqrt{2gh}$, masni tok curka (gl. 3.10) je: $\Phi_m = \varrho S v$, kjer je S presek curka, ϱ pa povprečna gostota peska v curku. V časovnem intervalu $\mathrm{d}t$ pade na tla pesek z maso $\mathrm{d}m = \Phi_m \mathrm{d}t = \varrho S v \mathrm{d}t$, ki prinese gibalno količino $\mathrm{d}G = v\mathrm{d}m = \varrho S v^2 \mathrm{d}t$. Sila N je enaka spremembi gibalne količine v časovni enoti:

$$N = \mathrm{d}G/\mathrm{d}t = \varrho S v^2 = \varrho S \cdot 2gh = mg$$

pri čemer je $m = 2\varrho S h$ masa celotnega padajočega dela peska.* Ko se **pesek ustavi ob tleh, pritisne na tla s silo, ki je enaka teži celotnega padajočega peska** (višina h nad tlemi). Če bi pesek nad tlemi miroval kot pokončen steber, bi pritiskal na tla prav tako s težo mg.

Zgoraj smo računali silo, s katero tla ustavljajo padajoči curek. Tej sili moramo seveda dodati še težo mirujočega (že ustavljenega) peska, da dobimo celoten pritisk peska na tla.

Ovira v splošnem spremeni smer curka in je treba računati silo curka vektorsko (3.11). Sila curka $\mathbf{F}$ ima poleg komponente v vpadni smeri curka še komponento v prečni smeri, s katero curek odriva oviro prečno na vpadno smer. Ta je seveda večja, če ovira močneje zakrivi tok curka.

Primera:

1. Vodni curek priteka s hitrostjo v na zakrivljeno lopatico, ki zasuka njegovo smer za kót θ (slika 3.18). S kolikšno silo moramo potiskati lopatico v vzdolžni

---

$$* \ m = \int_0^h \varrho(z) S \mathrm{d}z = S\varrho v \int_0^h \mathrm{d}z/v(z) = (S\varrho v/\sqrt{2g}\,) \int_0^h (h-z)^{-1/2} \mathrm{d}z$$
$$= S\varrho v \sqrt{2h/g} = 2\varrho h S$$

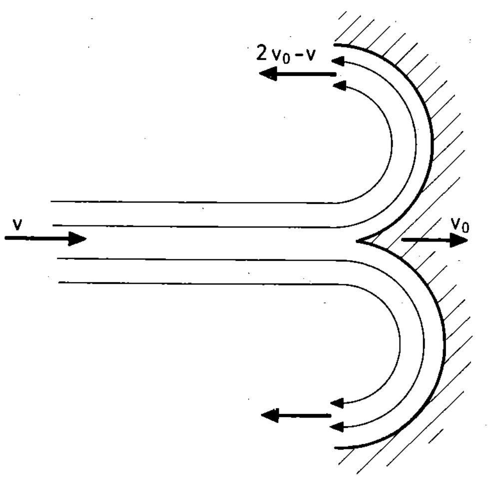
smeri in s kolikšno v prečni, da se zaradi curka ne premakne?

Na območju lopatice je v nekem trenutku dana množina vode. V naslednjem kratkem času dt priteče na lopatico $dm = \Phi_m dt = \varrho S v dt$ vode, ki prinese v smeri x (to je v vpadni smeri) gibalno količino $v dm$. Obenem odteče z lopatice enaka množina vode, ki odnese gibalno količino $v dm$ v smeri kota θ. V vpadni smeri (x) se torej gibalna količina vodnega curka zmanjša za $dG_x = v(1 - \cos\theta)dm$; to zmanjšanje povzroči sila F_x. Velja:

$$F_x = dG_x/dt = \varrho S v^2(1 - \cos\theta)$$

Prečna sila F_y poveča gibalno količino curka v prečni smeri y od 0 na $dG_y = v dm \sin\theta$. Sledi:

$$F_y = dG_y/dt = \varrho S v^2 \sin\theta$$



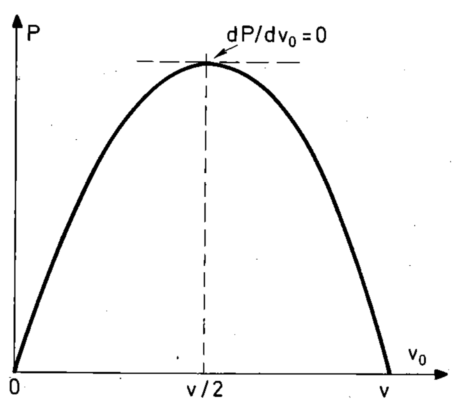
Slika 3.15

2. Snežni plug rije po vodoravni cesti s stalno hitrostjo $v = 18$ km/h in odmetava sneg; vsako minuto odvrže 60 ton snega. Sneg izstopa iz plužne brane z relativno hitrostjo $u = 3$ m/s pod pravim kotom glede na smer gibanja pluga. S kolikšno silo (F_x) mora plug potiskati brano naprej in kolikšna sila (F_y) deluje na plug od strani?

Kar se sil tiče, so razmere enake, kot če plug miruje in sneg vstopa v brano z nasprotne smeri s hitrostjo v. Primer je podoben prvemu (za $\theta = 90°$). Dobimo:

$$F_x = \Phi_m v = \frac{60\,000 \text{ kg}}{60\text{s}} \cdot 5 \text{ ms}^{-1} = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}$$

$$F_y = \Phi_m u = 3 \text{ kN}$$



Slika 3.16

Telo

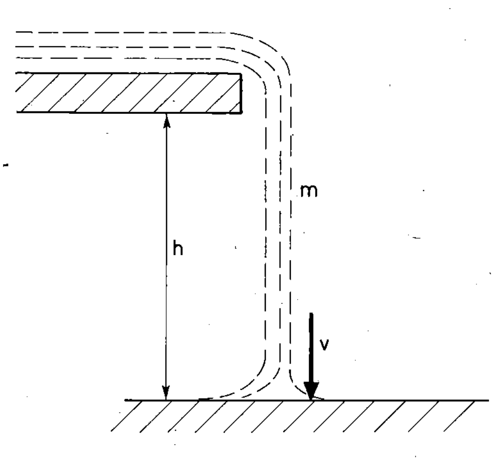
Telo je sistem z zelo veliko točkastimi telesci, ki se tiščijo drugo drugega. Med posameznimi telesci delujejo zelo močne notranje sile; te jih povezujejo v celoto in ovirajo njihovo relativno premikanje, tako da lahko govorimo o velikosti in obliki telesa. Čim močnejše so notranje sile, tem bolj trdno je telo, tem manj se med gibanjem spreminja njegova oblika (pod vplivom zunanjih sil). Telo je **togo**, če lahko zanemarimo spreminjanje njegove oblike. Pri togem telesu so notranje sile velike v primerjavi z zunanjimi in lahko vpliv zunanjih sil na obliko ali velikost telesa zanemarimo.

Enačbe (3.3 – 3.7), ki smo jih izpeljali za sistem točkastih teles, lahko uporabimo tudi za telo. Vendar moramo upoštevati, da telo vsebuje zelo veliko točkastih telesc, ki so nagnetena tako na gosto, da ne moremo ločiti eno od drugega. Posameznih telesc je preveč, da bi jih lahko preštevali. Telesca se tiščijo drugo drugega. Pravimo, da je **snov** v telesu **zvezno porazdeljena.**

Najprej si oglejmo, kako se opiše porazdelitev snovi v telesu.

Celotno prostornino (V) telesa razdelimo na majhne prostorninske elemente dV; vsota oziroma integral vseh teh je volumen telesa:

$$V = \int dV$$



Slika 3.17

Oblika posameznih prostorninskih elementov dV je odvisna od vrste oziroma oblike telesa. V splošnem izberemo dV v obliki kockice s stranicami dx, dy in dz, tako da je $dV = dxdydz$. V posebnih primerih, če simetrija telesa dopušča, pa lahko kot dV vzamemo npr. tanko kroglasto lupino (če je telo kroglaste oblike), pri čemer je $dV = 4\pi r^2 dr$ (telo razdelimo na tanke koncentrične kroglaste lupine, ena od njih ima polmer r in debelino dr) ali tanko valjasto plast (osno simetrično telo razdelimo na tanke koaksialne valjaste lupine, ena od njih ima višino h, polmer r in debelino dr): $dV = 2\pi rhdr$. Vsakič izberemo prostorninski element dV takšne oblike, da je izračun prostornine telesa enostaven.

Primera:

1. Prostornina krogle. Kroglo s polmerom R v mislih olupimo na tanke koncentrične kroglaste lupine. Ena od njih ima polmer r in debelino dr, njena prostornina je $dV = 4\pi r^2 dr$. Celotno kroglo objamemo, če gre r od 0 do R:

$$V = \int dV = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 4\pi R^3/3$$

Za vajo poišči izraz za prostornino votle krogle. Zunanji polmer je R_2 notranji pa R_1.

2. Volumen piramidastih teles. Dani sta osnovna ploskev S in višina h. Stranice, ki povezujejo osnovno ploskev z vrhom telesa, so ravne. Pri stožcu je $S = \pi R^2$ (R je polmer stožca), pri pravilni kvadratni piramidi je $S = a^2$ (a je stranica) itd. Telo je ali pokončno (višina h je pravokotna na osnovno ploskev S) ali poševno. Dokaži, da je volumen takšnih teles vedno dan z enačbo: $V = Sh/3$.

Na sliki (3.19) je stranski prerez piramidastega telesa. Slika a predstavlja pokončno telo: vodoravne plasti so naložene ena nad drugo, da se njihova središča pokrivajo. Če vsako naslednjo višjo plast nekoliko premaknemo v desno (slika b), dobimo poševno telo. Jasno je, da se ob takšnih premikih volumen telesa ne spremeni, torej ima poševna piramida enako prostornino kot pokončna (pri enaki osnovni ploskvi in višini).

Tenka plast na globini z pod vrhom piramide ima debelino dz in ploskev $S(z)$. Zadnja je premo sorazmerna s kvadratom premera oziroma stranice plasti, ta pa je premo sorazmerna s koordinato z (ker je stranski rob telesa raven), zato velja: $S(z) = (z/h)^2 S$ ter $dV = S(z)dz = (S/h^2)z^2 dz$. Prostornina celotnega telesa je:

$$V = \int dV = (S/h^2) \int_0^h z^2 dz = (S/h^2)h^3/3 = Sh/3$$

kar smo morali dokazati. Rezultat je neodvisen od oblike osnovne ploskve S; velja tako za stožec kot za različne piramide.

Maso snovi v prostorninskem elementu dV označimo z dm. Kvocient mase in prostornine (to je masa v enoti prostornine snovi) se imenuje **gostota snovi** (ϱ):

$$\boxed{\varrho = dm/dV} \quad \text{(merska enota: kg/m}^3 \text{ ali g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3\text{)} \qquad (3.12)$$

Maso m celotne snovi izrazimo z:
$m = \int dm = \int \varrho dV$

V **homogeni snovi** se gostota ne spreminja s krajem; ϱ je enak za vsak dV, zato lahko pišemo:

$$m = \varrho \int dV = \varrho V \text{ ali } \varrho = m/V$$

Gostota homogene snovi je kvocient mase in prostornine celotne snovi. V tabeli na koncu knjige so podatki za gostoto nekaterih pomembnih snovi. Kovine so najgostejše snovi, njihova gostota je do okrog 20 g/cm^3. Kapljevine imajo ϱ okrog 1 g/cm^3 = 10^3 kg/m^3, plini pa so približno tisočkrat redkejši – okrog 1–5 kg/m^3.

Nekatere trdne snovi so porozne, vsebujejo mnogo zračnih mehurčkov ali votlinic, ki so včasih med seboj povezane z drobnimi cevčicami. Za takšne snovi navedemo **povprečno gostoto** ($\bar{\varrho}$), ta je manjša od gostote ϱ same snovi. Recimo, da v celotni prostornini V porozne snovi zavzema zrak prostornino V_z. V okviru nekajodstotne nenatančnosti, s kakršno običajno delamo v praksi, lahko zanemarimo maso zraka v porozni snovi v primerjavi z maso same snovi in zapišemo:

$$m = \varrho(V - V_z) + \varrho_z V_z \approx \varrho(V - V_z) = \bar{\varrho} V \text{ ali}$$
$$\bar{\varrho} = \varrho(V - V_z)/V = \varrho(1 - V_z/V) \qquad (3.13)$$

Primer:

Povprečna gostota poroznega kosa železa je $\bar{\varrho}$ = 7,0 g/cm^3. Koliko odstotkov prostornine takšnega poroznega železa zavzema zrak? Gostota polnega železa je ϱ = 7,8 g/cm^3.

$$V_z/V = 1 - \bar{\varrho}/\varrho = 1 - 7{,}0/7{,}8 = 0{,}10 = 10\%$$

Nekatera telesa so sestavljena iz različnih snovi (npr. litine). Sestavo takšnih zmesi povemo ali z **volumenskimi odstotki** (koliko odstotkov celotne prostornine zavzema posamezna snov v telesu) ali z **utežnimi** oziroma **masnimi odstotki** (koliko odstotkov celotne mase telesa odpade na posamezno snov).

V prvem primeru je povprečna gostota telesa dana z enačbo:

$$\bar{\varrho} = p_1\varrho_1 + p_2\varrho_2 + \ldots . \qquad (3.14a)$$

kjer je p_1 odstotek celotne prostornine, ki odpade na snov z gostoto ϱ_1 itd. (gl. prejšnji primer).

Kadar je sestava telesa podana z utežnimi odstotki: $m_1 = p_1 m$, $m_2 = p_2 m$ itd., računamo povprečno gostoto takole:

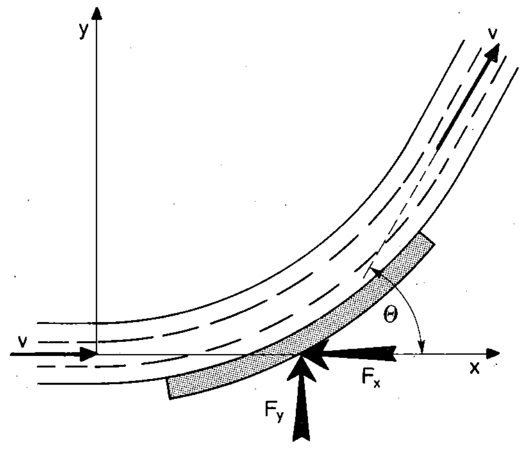
$$1/\bar{\varrho} = p_1/\varrho_1 + p_2/\varrho_2 + \ldots . \qquad (3.14b)$$

Dokaz: $V = V_1 + V_2 + \ldots = m_1/\varrho_1 + m_2/\varrho_2 + \ldots = m(p_1/\varrho_1 + p_2/\varrho_2 + \ldots) = m/\bar{\varrho}$

Primer:

Litina bron vsebuje 90% bakra in 10% cinka (odstotki se nanašajo na volumen). Gostota bakra je ϱ_{Cu} = 8,9 g/cm^3, cinka pa ϱ_{Zn} = 7,2 g/cm^3. Kolikšna je povprečna gostota brona?

$\bar{\varrho} = p_1\varrho_1 + p_2\varrho_2 = 0{,}90.8{,}9\ \mathrm{g/cm^3} + 0{,}10.7{,}2\ \mathrm{g/cm^3}$
$\bar{\varrho} = 8{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$



Slika 3.18

Masno središče telesa računamo s podobno enačbo, kot velja za sistem točkastih teles (3.7), le da nadomestimo diskretna točkasta telesca m_i z masnimi elementi dm, seštevanje pa z integriranjem:

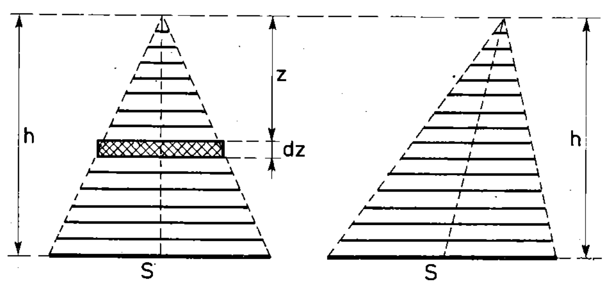
$$\boxed{\mathbf{r}_C = (1/m)\int \mathbf{r}\,dm} \qquad (3.15)$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor masnega elementa dm (slika 3.20). Komponente krajevnega vektorja $\mathbf{r}_C$ vzdolž posameznih koordinatnih osi so:

$$x_C = (1/m)\int x\,dm \qquad (3.15a)$$
$$y_C = (1/m)\int y\,dm \qquad (3.15b)$$
$$z_C = (1/m)\int z\,dm \qquad (3.15c)$$

Pri homogenih telesih lahko zapišemo: $m = \varrho V$, poleg tega lahko ϱ izpostavimo iz integrala, tako da se krajša, in dobimo:

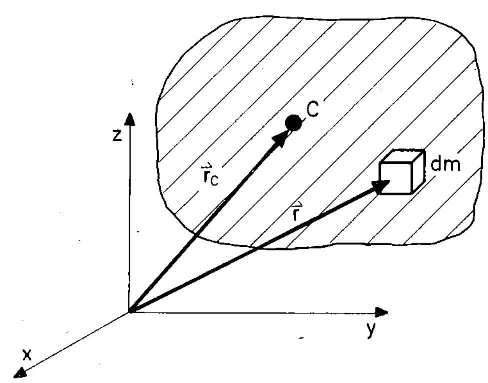
$$x_C = (1/V)\int x\,dV \qquad (3.16a)$$
$$y_C = (1/V)\int y\,dV \qquad (3.16b)$$
$$z_C = (1/V)\int z\,dV \qquad (3.16c)$$



Slika 3.19

Če je telo ploščat lik (narejeno iz enakomerno debele plošče), računamo le koordinati x_C in y_C masnega središča, tretja koordinata z_C je enaka $h/2$ (h = debelina plošče). Pišemo: d$V = h$dS in $V = hS$, debelina plošče h se krajša in ostane integracija po površini lika:

$$x_C = (1/S)\int x\,dS \qquad (3.17a)$$
$$y_C = (1/S)\int y\,dS \qquad \text{(Slika 3.21)} \qquad (3.17b)$$



Slika 3.20

Primeri:

1. Izračunaj koordinate masnega središča pokončnega homogenega **piramidastega telesa** z višino h.

Piramidasto telo v mislih razrežemo na tanke vodoravne plasti (gl. sliko 3.19). Masno središče pokončne piramide (ali stožca) je na simetrijski osi (višini), zato računamo le koordinato z_C ($x_C = y_C = 0$). Koordinatno izhodišče je npr. na vrhu piramide, os z kaže navzdol. Velja:

$$z_C = (1/V)\int z\,dV$$

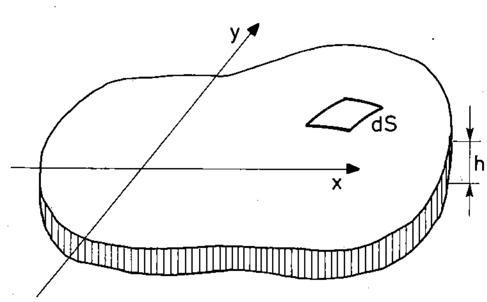
kjer je d$V = S(z)dz = S(z/h)^2\,dz$ in $V = Sh/3$ (gl. 2. primer na strani 60). Sledi:

$$z_C = (3/h^3)\int_0^h z^3 dz = 3h/4$$

Masno središče pokončne piramide ali stožca je 3/4 višine pod vrhom oziroma $h/4$ nad osnovno ploskvijo.

2. Poišči masno središče **polne polkrogle** s polmerom R.

Polkroglo postavimo ploskoma na vodoravno ravnino $x - y$; os z kaže navzgor v smeri simetrijske osi (slika



Slika 3.21

3.22). Polkroglo v mislih razrežemo na tanke vodoravne okrogle ploščice. Ploščica na višini z ima polmer $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ in debelino dz, njen volumen je dV = $= \pi r^2 \mathrm{d}z = \pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$.

$$x_C = y_C = 0$$
$$z_C = (1/V)\int z\mathrm{d}V = (3/2\pi R^3)\int_0^R \pi z(R^2 - z^2)\mathrm{d}z = 3R/8$$

3. Določi masno središče ploščatega telesa – **četrtine krožne ploščice** (slika 3.23).

Ploščico razrežemo na tanke vzporedne trakove.

$$x_C = y_C = (1/S)\int y\mathrm{d}S$$
$$\mathrm{d}S = x\mathrm{d}y,\ S = \pi R^2/4$$
$$x_C = (4/\pi R^2)\int_0^R xy\mathrm{d}y$$

Ker je $x^2 + y^2 = R^2$, dobimo po odvajanju $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$ ali $y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x$ ter

$$x_C = (4/\pi R^2)\int_0^R x^2\mathrm{d}x = 4R/3\pi$$

Polkrožna ploščica je sestavljena iz dveh četrtinskih ploščic; njeno masno središče je zato na simetrijski osi, na oddaljenosti $4R/3\pi$ od ravnega dela – premera.

Poišči masno središče krožne ploščice, iz katere je izrezan kvadrant.

4. Masno središče **sestavljenih teles** poiščemo tako, da najprej vsak del telesa zberemo v njegovem masnem središču kot točkasto telo in nato (z enačbo 3.7) izračunamo masno središče posameznih točkastih teles. Kot primer vzemimo pokončen valjast stolp s stožčasto streho (slika 3.24).

Valjasti del stolpa ima maso $m_1 = \varrho\pi R^2 h$, njegovo masno središče je na višini $z_1 = h/2$ nad tlemi. Stožčasta streha ima maso $m_2 = \varrho\pi R^2 v/3$, njeno masno središče je na višini $z_2 = h + v/4$ nad tlemi. Računamo masno središče dveh točkastih teles m_1 in m_2 (gl. 3.7c):

$$z_C = (z_1 m_1 + z_2 m_2)/(m_1 + m_2) = $$
$$= (6h^2 + 4hv + v^2)/(12h + 4v)$$

5. Masno središče **telesa z votlinami.** Telo z votlinami bi zahtevalo zamuden račun masnega središča. Temu se izognemo, če si mislimo, da imamo polno telo, na mestu votline pa telo z negativno maso. Kot primer izračunajmo masno središče pokončnega valja, iz katerega je izrezana polkrogla (slika 3.25).

Poln valj ima maso $m_1 = \varrho\pi R^2 h$ in masno središče na višini $z_1 = h/2$, negativna polkrogla ima masno središče na višini $z_2 = 3R/8$ in negativno maso $m_2 = -\varrho \cdot 2\pi R^3/3$. Masno središče obeh (to je masno središče valja z votlo polkroglo) je na višini:

$$z_C = (z_1 m_1 + z_2 m_2)/(m_1 + m_2) = $$
$$= (h^2/2 - R^2/4)/(h - 2R/3)$$

Seveda je z_C večji od $h/2$.

Za vajo tega računanja ponovno izračunaj masno središče polkrogle (2. primer), vendar tokrat tako, da vzameš polno kroglo in spodnjo polkroglo z negativno maso.

Porazdelitev sil

Silo predstavimo z vektorjem; ta ima točkasto prijemališče. Vendar nobena sila v resnici ne »prijemlje« v točki. Medsebojno učinkovanje teles namreč poteka prek kakšne stične ploskve ali je celo razpredeno po širši prostornini. Če npr. z roko pritisnemo na mizo, je sila roke porazdeljena po skupni ploskvi roke in mize. Podobno je, če s kladivom udarimo po glavici žeblja. Sila v napeti vrvici je razporejena po prečnem prerezu vrvice. Torej nimamo opravka s točkastimi (diskretnimi) silami, ampak so **sile zvezno porazdeljene** ali po ploskvi ali po prostornini. Povedati moramo, kako so sile porazdeljene po dani ploskvi ali prostornini.

Recimo, da je sila **F** razporejena po ploskvi S na površini telesa. V splošnem je razporejena neenakomerno, na enem delu ploskve je npr. več sile kot na drugem, pa tudi smer sile se vzdolž ploskve spreminja. Zato razdelimo celotno ploskev S na majhne ploskovne elemente dS; vsak od njih je dovolj majhen, da je sila na njemu razporejena kolikor toliko enakomerno. Na ploskvico dS npr. odpade sila d**F**. Celotna sila **F** je rezultanta (vektorska vsota oziroma integral) posameznih delnih sil d**F**, delujočih na posameznih ploskovnih elementih dS:

$$\mathbf{F} = \int \mathrm{d}\mathbf{F}$$

Delna sila d**F**, ki odpade na ploskvico dS, ima v splošnem poševno smer (slika 3.26). Razstavimo jo na komponento d**F**⊥, ki je pravokotna na ploskvico, in na komponento d**F**‖ v ravnini ploskvice. Prva se imenuje **natezna sila** (če je usmerjena ven iz ploskvice) oziroma **tlačna sila** (če kaže v ploskvico – v notranjost telesa). Druga je **strižna sila**. Zgodi se, da je celotna sila d**F** že pravokotna na ploskvico, da je torej natezna ali tlačna sila (d**F**‖ = 0 in d**F**⊥ = d**F**). Ali pa d**F** leži v ploskvici in učinkuje kot strižna sila (d**F**⊥ = 0 in d**F**‖ = d**F**).

Zanima nas kvocient sile d**F** in ploskvice dS, na kateri učinkuje: d**F**/dS; imenuje se ali **tlak p** ali **natezna napetost** (σ) ali **strižna napetost** (τ):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}S} = \begin{cases} \textbf{tlak p} & \text{če je d}\mathbf{F}\text{ pravokoten na ploskvico in usmerjen vanjo} \\ \textbf{natezna napetost} & \text{če je d}\mathbf{F}\text{ usmerjen pravokotno iz ploskvice} \\ \textbf{strižna napetost} & \text{če d}\mathbf{F}\text{ leži v ploskvici} \end{cases} \quad (3.18)$$

Merska enota tlaka oziroma napetosti sile je količnik enote sile in enote površine, to je N/m^2; imenuje se **pascal** (Pa):

$$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m^2}$$

Ker je Pa zelo majhna enota, se večinoma uporabljajo večje enote: kPa = 10^3N/m^2, MPa = 10^6N/m^2 ter posebna enota: **bar** = 10^5N/m^2 = 100 kPa = 1000 mbar (milibar), mbar = 100 N/m^2. Tu in tam se pojavlja še stara enota kp/cm^2 (at = atmosfera) = 9,8 N/cm^2 = 98 000 N/m^2 = 98 kPa = 0,98 bar.

Recimo, da je sila F tlačna sila, da je povsod pravokotna na ploskev. Če vemo, kako se tlak te sile: **p** = d**F**/dS spreminja po ploskvi, izračunamo celotno silo **F** z integralom:

$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int p dS$

Primer:

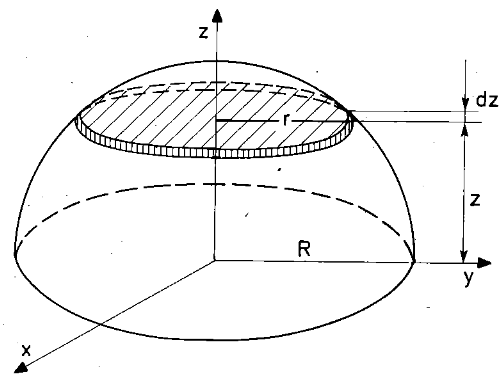
Parni curek pritiska pravokotno na valjast bat; tlak tlačne sile se spreminja v odvisnosti od radija r iz sredine bata po enačbi: $p = p_o(1 - r^2/R^2)$, kjer je $p_o = 2$ bar, R (polmer bata) = 5 cm. S kolikšno silo F curek odriva bat?

Ker so sile $d\mathbf{F}$ na posameznih ploskovnih elementih dS bata vzporedne, lahko vektorski znak opustimo in sile skalarno seštejemo:

$$F = \int dF = \int p dS$$

Ploskvice dS izberemo v obliki koncentričnih kolobarjev: $dS = 2\pi r dr$.

$$F = 2\pi p_0 \int_0^R (1 - r^2/R^2) r dr = \pi R^2 p_o/4 = 390 \text{ N}$$

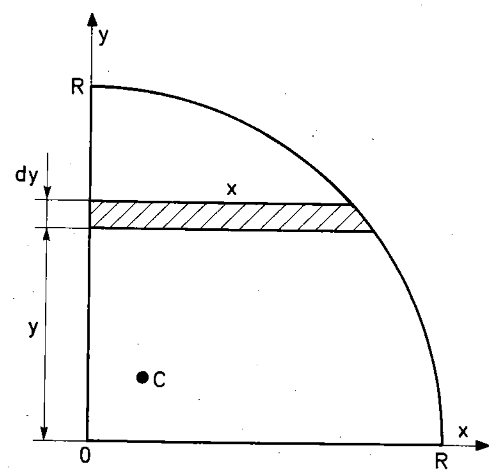


Slika 3.22

Nekatere sile učinkujejo ne le na površju, ampak tudi na vsak delček v notranjosti telesa. Povedati moramo, kako je takšna sila razporejena po prostornini telesa.

Celotno prostornino V telesa razdelimo na prostorninske elemente dV. Silo, ki odpade na en tak element dV, označimo z $d\mathbf{F}$. Kvocient sile $d\mathbf{F}$ in prostorninskega elementa dV, v katerem učinkuje, se imenuje **gostota sile** ($\mathbf{f}$):

$$\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dV \text{ (merska enota: N/m}^3\text{)} \quad (3.19)$$



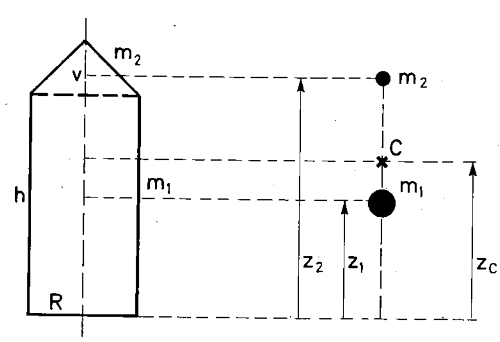
Slika 3.23

Z gostoto sile povemo, koliko sile odpade na enoto prostornine telesa. Če vemo, kako se gostota sile $\mathbf{f}$ spreminja s krajem po notranjosti telesa, dobimo ustrezno silo $\mathbf{F}$, ki učinkuje na celotno telo, z integralom:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int \mathbf{f} dV$$

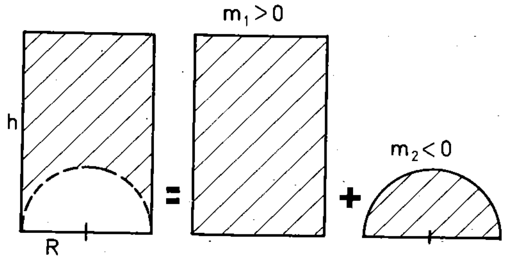
Sila te vrste je npr. **teža telesa** ($\mathbf{F} = m\mathbf{g}$). **Gostota teže** se imenuje **specifična teža**, to je teža na enoto prostornine telesa (običajno jo označimo z grško črko γ):

$$\gamma = d\mathbf{F}/dV = d(m\mathbf{g})/dV = \mathbf{g} \cdot dm/dV = \varrho \mathbf{g} \quad (3.20)$$



Slika 3.24

Vidimo, da je specifična teža premo sorazmerna z gostoto snovi; sorazmernostni faktor med njima je težni pospešek $\mathbf{g}$. Včasih so specifično težo izražali z mersko enoto kp/m³. To je bilo udobno, kajti kolikor kg/m³ znaša gostota snovi, toliko kp/m³ je njena specifična teža. Voda ima npr. gostoto 1 kg/dm³, njena specifična teža je 1 kp/dm³. Ta enota je po novem prepovedana in moramo specifično težo navajati v merskih enotah N/m³ (voda ima specifično težo 9,8 N/dm³).



Slika 3.25

Gibanje togega telesa

Sistem N točkastih telesc se v splošnem giblje tako, da se vsako telesce giblje po svoje. Kako se tak sistem giblje, ugotovimo, če rešimo N vektorskih enačb (3.1).

Ker vsaka vektorska enačba pravzaprav pomeni 3 enačbe za 3 projekcije krajevnega vektorja točkastega telesca, moramo v splošnem rešiti $3N$ enačb. Trenutno lego sistema v prostoru podamo s $3N$ koordinatami posameznih telesc sistema (3 koordinate za vsako telesce). Zato pravimo, da ima sistem N točkastih telesc **3N prostostnih stopenj**. To število je navadno zelo veliko, saj je sistem sestavljen iz veliko točkastih telesc.

Pri togem telesu so razmere enostavnejše. Zaradi močnih notranjih sil se posamezni deli togega telesa ne morejo premikati relativno drug glede na drugega, oblika in velikost telesa se zato med gibanjem ne spreminjata. Togo telo se giblje kot celota.

Koliko prostostnih stopenj ima togo telo?

Najprej si mislimo, da je telo sestavljeno iz enega samega točkastega telesca. To se lahko giblje v vse smeri v prostoru, njegova trenutna lega v prostoru je podana s tremi koordinatami (x, y, z), zato ima 3 prostostne stopnje. Nadalje si mislimo, da telo sestavljata dve točkasti telesci, razmaknjeni za stalno razdaljo. Če vzamemo, da se eno od njih poljubno giblje skozi prostor (čemur ustrezajo 3 prostostne stopnje), se drugo lahko giblje le po dani kroglasti ploskvi okrog prvega. Ploskovnemu gibanju drugega telesca pa ustrezata dve prostostni stopnji, kar dá skupaj 5 prostostnih stopenj za takšno telo. Na koncu vzemimo togo telo, sestavljeno iz treh točkastih telesc (med seboj togo povezanih). Za prvi dve smo že ugotovili, da se lahko gibljeta s 5 prostostnimi stopnjami. Tretje telesce pa lahko edinole kroži okrog osi skozi prve dve, s čimer je povezana ena sama prostostna stopnja – skupno torej 6 prostostnih stopenj.

Tri točkasta telesa (če ne ležе na isti premici) povsem določajo gibanje celotnega togega telesa, ne glede na to, iz koliko teles je sestavljeno. Torej ima **togo telo** v splošnem **6 prostostnih stopenj**. Tri od njih izkoristimo za gibanje masnega središča telesa, z ostalimi tremi pa opišemo vrtenje telesa okrog treh, med seboj pravokotnih osi, ki se sekajo v masnem središču.

Gibanje masnega središča že poznamo. Njegov pospešek določajo zunanje sile, ki učinkujejo na telo; odvisen pa je še od celotne mase telesa:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{F}/m$$

Preostane, da ugotovimo, kako se telo vrti okrog osi skozi masno središče.

Vrtenje togega telesa okrog stalne osi

Telo je vpeto na vrtilno os, okrog katere se lahko vrti. Večinoma je vrteče se telo osno simetrično in je simetrijska os vrtilna os, vendar to ni nujno. Vrtilna os je z ležaji fiksirana v prostoru, tako da se med vrtenjem telesa ne spreminja (slika 3.27).

Telo v mislih razdelimo na masne elemente dm. Ti med vrtenjem telesa krožijo v ravninah, pravokotno na vrtilno os. Masni element dm na oddaljenosti r od osi se npr. giblje po krogu s polmerom r z obodno hitrostjo $v = r\omega$, pri čemer je ω kotna hitrost vrtenja telesa. Ker je telo togo, kroži vsak masni element z enako kotno hitrostjo; njihova obodna hitrost pa je premo sorazmerna z oddaljenostjo r od vrtilne osi.

Poglejmo, kako zunanje sile vplivajo na vrtenje togega telesa.

Na masni element dm deluje zunanja sila $\mathbf{dF}$ in notranja sila $\mathbf{dF}_n$. Sila ne spreminja kotne hitrosti vrtenja telesa, če je vzporedna z vrtilno osjo; najmočneje pa jo spreminja, če leži v ravnini, ki je pravokotna na vrtilno os. Recimo, da $\mathbf{dF}$ in $\mathbf{dF}_n$ že ležita v tej ravnini. Na sliki (3.28) je prerez telesa pravokotno na os; ta je pravokotna na ravnino lista. Označena je le zunanja sila $\mathbf{dF}$. Masni element dm kroži v ravnini lista neenakomerno, ker sili $\mathbf{dF}$ in $\mathbf{dF}_n$ s svojima tangentnima komponentama $\mathbf{dF}'$ in $\mathbf{dF}_n'$ povzročata tangentni pospešek $\mathbf{a}_t$. Tega izračunamo z Newtonovim zakonom dinamike (2.1). Ker poznamo smeri vektorjev, napišemo enačbo dinamike v skalarni obliki:

$$dF' + dF_n' = dm \cdot a_t = dm \cdot r\alpha = dF\sin\delta + dF_n\sin\delta_n$$

pri čemer je kotni pospešek $\alpha = a_t/r$ (gl. 1.49), δ oz. δ_n pa kota med smerjo vektorja $\mathbf{r}$ in sile $\mathbf{dF}$ oz. $\mathbf{dF}_n$. Velja: $\sin\delta = r'/r$ oziroma $\sin\delta_n = r_n'/r$ (gl. sliko 3.28), kjer je r' (oz. r_n') **ročica sile** $\mathbf{dF}$ (oz. $\mathbf{dF}_n$), to **je pravokotna oddaljenost vrtišča od smeri sile** (merjeno v ravnini, pravokotno na vrtilno os). Dobimo:

$$r'dF + r_n'dF_n = \alpha \cdot r^2 dm \tag{3.21}$$

Na levi strani enačbe je **navor sile** dF (oz. dF_n), ki ga označimo z dM:

$$dM = r'dF = rdF\sin\delta$$

to **je produkt sile in njene ročice.** V vektorski obliki ga napišemo kot:

$$\boxed{\mathbf{dM} = \mathbf{r} \times \mathbf{dF}} \quad (\mathbf{dM}_n = \mathbf{r} \times \mathbf{dF}_n) \tag{3.22}$$

Njegova smer je pravokotna tako na radij $\mathbf{r}$ kot na silo $\mathbf{dF}$. V našem primeru sta vektorja $\mathbf{r}$ in $\mathbf{dF}$ v ravnini, pravokotno na vrtilno os, torej ima navor $\mathbf{dM}$ (oz. $\mathbf{dM}_n$) smer vrtilne osi. V tej smeri tudi kaže vektor kotnega pospeška $\boldsymbol{\alpha}$ (gl. str. 23).

Izraz r^2dm na desni strani enačbe (3.21) je **vztrajnostni moment** dJ masnega elementa dm:

$$dJ = r^2 dm \tag{3.23}$$

(to je produkt mase in kvadrata pravokotne oddaljenosti od vrtilne osi).

Enačbo dinamike za vrtenje masnega elementa okrog stalne osi potemtakem napišeno v obliki:

$$\mathbf{dM} + \mathbf{dM}_n = \boldsymbol{\alpha} dJ$$

Podobno enačbo napišemo za vsak masni element telesa. Dobljene enačbe seštejemo oz. integriramo. Ker notranje sile vedno nastopajo v parih nasprotno enakih sil, se navori vseh notranjih sil medsebojno izničijo:

$$\int \mathbf{dM}_n = \int \mathbf{r} \times \mathbf{dF}_n = 0 \tag{3.24}$$

in ostanejo le navori vseh zunanjih sil, ki edino lahko pospešujejo vrtenje togega telesa:

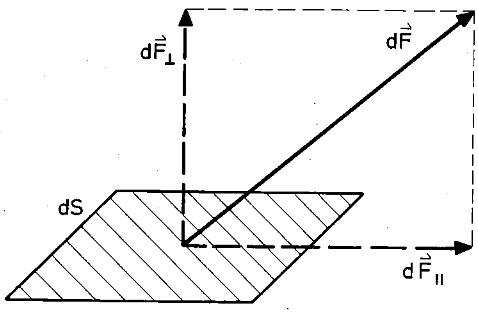
$$\int \mathbf{dM} = \int \boldsymbol{\alpha} dJ \tag{3.25}$$

Integral na levi strani je rezultanta **M** navorov vseh zunanjih sil, ki učinkujejo na telo:

$$\mathbf{M} = \int d\mathbf{M}$$

Vsak delček togega telesa se vrti okrog osi z enako kotno hitrostjo in z enakim kotnim pospeškom, zato lahko α v enačbi (3.25) izpostavimo iz integrala. Preostali integral $\int dJ$ je vztrajnostni moment J celotnega telesa:

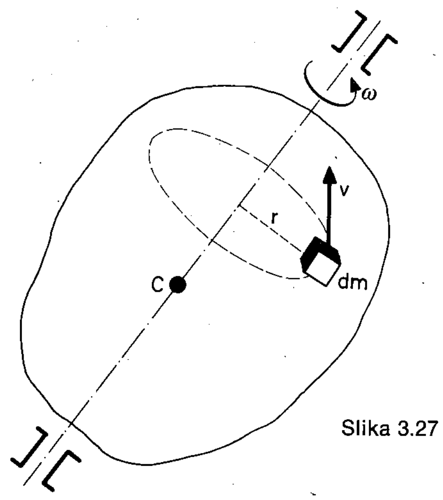
$$\boxed{J = \int r^2 dm} \quad \textbf{vztrajnostni moment togega telesa glede na izbrano os} \qquad (3.26)$$



Slika 3.26

Enačbo dinamike za vrtenje telesa okrog stalne osi lahko za togo telo napišemo v obliki:

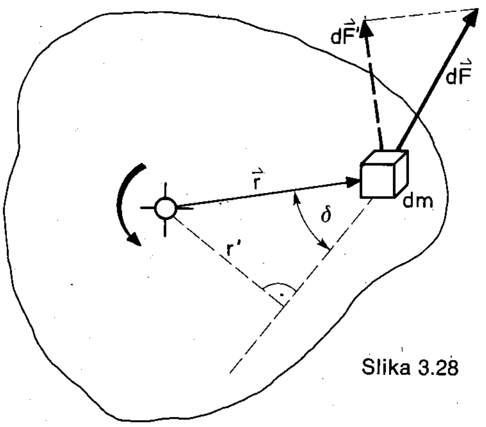
$$\boxed{\mathbf{M} = J\alpha} \qquad (3.27)$$



Slika 3.27

Vektorja **M** in α imata smer rotacijske osi. Če zunanje sile, ki učinkujejo na posamezne dele telesa, niso v ravninah, pravokotno na vrtilno os, če torej navori teh sil niso v smeri vrtilnih osi, upoštevamo le projekcije navorov na smer vrtilne osi.

Telo se vrti tem bolj pospešeno (s tem večjim kotnim pospeškom), **čim večja je rezultanta navorov vseh zunanjih sil**, ki učinkujejo na telo, ter **čim manjši je vztrajnostni moment telesa.**



Slika 3.28

Vztrajnostni moment telesa

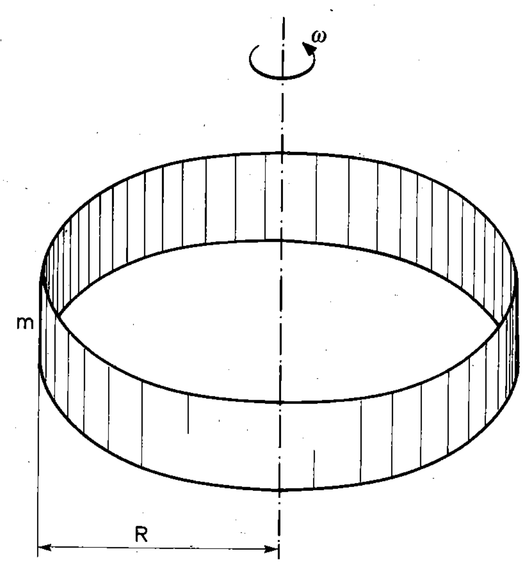
Velik vztrajnostni moment pomeni, da dobi telo pri danem navoru zunanjih sil majhen kotni pospešek, da se kotna hitrost počasi spreminja. Torej je vztrajnostni moment J telesa merilo za vztrajnost telesa proti spremembi kotne hitrosti vrtenja. Kakršno vlogo ima masa pri premem gibanju, ima vztrajnostni moment pri vrtenju.

Vztrajnostni moment J je odvisen od mase snovi in od njene razporeditve glede na vrtilno os. Če želimo velik vztrajnostni moment, mora biti telo masivno in snov mora biti čim bolj oddaljena od vrtilne osi.

Vztrajnostni moment togega telesa računamo z enačbo:

$$J = \int r^2 dm \quad \text{(merska enota: kgm}^2\text{)}$$

kjer je r pravokotna oddaljenost elementa dm od vrtilne osi. Če se spremeni vrtilna os, se pri istem telesu spremeni tudi vztrajnostni moment (ker se spremeni razporeditev snovi glede na os). Zato moramo vedno vedeti, na katero vrtilno os se nek vztrajnostni moment nanaša.



Slika 3.29

Računajoč vztrajnostni moment telesa, razdelimo telo (v mislih, seveda) na tanke, koaksialne valjaste plasti, tako da je vsak delček posamezne plasti približno enako (r) oddaljen od osi. Vztrajnostni moment ene takšne plasti je $dJ = r^2 dm = r^2 \varrho dV$, kjer je dV volumen plasti.

Primeri:

1. Izračunaj vztrajnostni moment **obroča** z maso m in polmerom R glede na simetrijsko os obroča (slika 3.29).

Vsa snov tankega obroča je za R oddaljena od osi (r = R), zato dobimo:

$$J = \int r^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

Višina obroča ni pomembna (skrita je v masi m); obroč je lahko ozek ali pa je širok valjast plašč.

2. **Tenka palica** z maso m in dolžino b je pravokotna na vrtilno os (slika 3.30). V mislih jo razrežemo na tanke prečne rezine. Ena takšna rezina z maso $dm = \varrho dV = \varrho S dx$ (S je presek palice) na oddaljenosti x od središča palice ima vztrajnostni moment $dJ = x^2 dm = \varrho S x^2 dx$. Vztrajnostni moment celotne palice je:

$$J = \int dJ = \varrho S \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 dx = \varrho S \cdot b^3/12 = mb^2/12 \tag{3.28}$$

3. **Poln valj** z maso m in polmerom R. Valj olupimo na tanke koaksialne valjaste plasti (slika 3.31). Plast s polmerom r, debelino dr in višino h ima vztrajnostni moment:

$$dJ = r^2 dm = r^2 \varrho dV = r^2 \varrho \cdot 2\pi r h dr = 2\pi\varrho h\, r^3 dr$$

$$J = \int dJ = 2\pi\varrho h \int_0^R r^3 dr = \varrho\pi h R^4/2$$

Vpeljemo še maso valja $m = \varrho V = \varrho\pi R^2 h$ in dobimo končni rezultat:

$$J = mR^2/2 \tag{3.29}$$

4. **Tanka kroglasta lupina** (masa m, polmer R, debelina h). Lupino razdelimo na tanke kolobarjaste trakove, katerih središča so na osi (slika 3.32). En tak kolobar ima polmer $r = R\sin\theta$, širino $Rd\theta$ in maso $dm = \varrho dV = \varrho \cdot 2\pi r h R d\theta$; njegov vztrajnostni moment je: $dJ = r^2 dm = 2\pi\varrho h R^4 \sin^3\theta d\theta$.

$$J = \int dJ = 2\pi\varrho h R^4 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = 2\pi\varrho h R^4 \cdot 4/3$$

$$J = 2mR^2/3 \quad (m = 4\pi R^2 h\varrho) \tag{3.30}$$

5. **Polna krogla** z maso m in polmerom R. Lahko si mislimo, da je krogla sestavljena iz tankih koncentričnih kroglastih plasti. Ena takšna plast s polmerom r in debelino dr ima vztrajnostni moment (glej 3.30 za $R \to r$, $h \to dr$ in $m \to dm$):

$$dJ = (2/3) r^2 dm = (2/3) r^2 \varrho \cdot 4\pi r^2 dr = (8\pi\varrho/3) r^4 dr$$

$$J = \int dJ = (8\pi\varrho/3) \int_0^R r^4 dr = 8\pi\varrho R^5/15$$

Ker je m (masa celotne krogle) $= \varrho \cdot 4\pi R^3/3$, dobimo končni rezultat:

$$J = 2mR^2/5 \tag{3.31}$$

Enak rezultat dobimo tudi drugače, če si kroglo mislimo olupljeno na koaksialne valjaste plasti (podobno kot pri 3. primeru). Plast s polmerom r, debelino dr in višino $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ ima maso $dm = \varrho dV = \varrho \cdot 2\pi r \cdot 2h dr$ in vztrajnostni moment $dJ = r^2 dm = 4\pi\varrho r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr$.

$$J = \int dJ = 4\pi\varrho \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr$$

$$= 4\pi\varrho \cdot 2R^5/15 = 2mR^2/5$$

Izračun vztrajnostnega momenta je kolikor toliko preprost le, če ima telo simetrijske lastnosti, npr. če je osno simetrično. V splošnem pa se zaplete in je bolje vztrajnostni moment izmeriti, npr. tako da izmerimo kotni pospešek α, s katerim se telo vrti pri znanem navoru zunanjih sil: $J = M/\alpha$.

Vztrajnostni radij

Vztrajnostni moment J poljubnega telesa želimo napisati v enostavni obliki, kot velja za tanek obroč:

$$\boxed{J = mk^2} \tag{3.32}$$

kjer je m masa telesa, parameter k pa se imenuje **vztrajnostni radij;** to je tista oddaljenost od vrtilne osi, na kateri moramo zbrati vso snov telesa, da dobimo enak vztrajnostni moment J, kot ga telo dejansko ima. Vztrajnostni radij obroča je kar enak njegovemu polmeru ($k = R$), za valj velja (gl. 3.29): $k = R/\sqrt{2}$, za kroglo (gl. 3.31) pa $k = 0{,}63R$ itd.

Vztrajnostni elipsoid – glavne osi telesa

Z računom ali pa z meritvijo določimo vztrajnostni moment telesa glede na poljubno usmerjeno vrtilno os. Odvisnost vztrajnostnega momenta od smeri vrtilne osi navadno prikažemo tako, da v prostorskem koordinatnem sistemu narišemo v smeri vrtilne osi vektor, katerega dolžina je enaka obratni vrednosti korena vztrajnostnega momenta za os v tej smeri (to je $1/\sqrt{J}$). Pokazali bomo, da konice teh vektorjev leže na ploskvi elipsoida, ki mu pravimo vztrajnostni elipsoid.

Smer izbrane vrtilne osi predstavimo z enotinim vektorjem $\mathbf{\Omega} = \cos\alpha\mathbf{e}_x + \cos\beta\mathbf{e}_y + \cos\gamma\mathbf{e}_z$ (gl. str. 7), kjer so koti α, β in γ naklonski koti vrtilne osi na koordinatne osi x, y in z (slika 3.33). Koordinatno izhodišče je v masnem središču telesa.

Vztrajnostni moment telesa J glede na izbrano vrtilno os je dan z enačbo (3.26):

$$J = \int r^2 dm$$

kjer je dm masni element na konici krajevnega vektorja $\boldsymbol{\varrho} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, r pa njegova oddaljenost od vrtilne osi. S slike (3.33) razberemo tele povezave:

$$r^2 = \varrho^2\sin^2\theta = \varrho^2 - \varrho^2\cos^2\theta = \varrho^2 - (\boldsymbol{\varrho} \cdot \mathbf{\Omega})^2 = \varrho^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

Ker je $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ in $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, lahko zapišemo naprej:

$$r^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha$$

Dobljeni izraz za r^2 vstavimo v enačbo (3.26) in dobimo izraz za vztrajnostni moment telesa glede na vrtilno os v smeri $\mathbf{\Omega}$:

$$J = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha \quad (3.33)$$

kjer so J_x, J_y in J_z vztrajnostni momenti telesa na posamezne koordinatne osi:

$$J_x = \int(y^2 + z^2)\mathrm{d}m,\ J_y = \int(z^2 + x^2)\mathrm{d}m$$
$$J_z = \int(x^2 + y^2)\mathrm{d}m \quad (3.34)$$

J_{xy}, J_{yz} in J_zx pa t. i. **centrifugalni vztrajnostni momenti:**

$$J_{xy} = \int xy\mathrm{d}m,\ J_{yz} = \int yz\mathrm{d}m,\ J_{zx} = \int zx\mathrm{d}m \quad (3.35)$$

V smeri enotinega vektorja $\mathbf{\Omega}$ narišemo vektor z dolžino $1/\sqrt{J}$; njegove projekcije na posamezne koordinatne osi označimo z X, Y in Z. Velja:

$$\cos\alpha = X\sqrt{J},\ \cos\beta = Y\sqrt{J},\ \cos\gamma = Z\sqrt{J}$$

Tako se enačba (3.33) prelevi v enačbo **vztrajnostnega elipsoida:**

$$J_xX^2 + J_yY^2 + J_zZ^2 - 2J_{xy}XY - 2J_{yz}YZ - 2J_{zx}ZX = 1 \quad (3.36)$$

kar smo morali dokazati.

Vsak elipsoid ima vsaj tri, med seboj pravokotne glavne osi; v našem primeru se imenujejo **glavne vztrajnostne osi telesa.** Najdaljša glavna os vztrajnostnega elipsoida določa smer vrtilne osi, glede na katero ima telo najmanjši vztrajnostni moment (in obratno).

Koordinatni sistem $x - y - z$ zasukajmo tako, da se koordinatne osi ujemajo z glavnimi osmi vztrajnostnega elipsoida. Izkaže se, da se pri tem zasuku izničijo vsi centrifugalni vztrajnostni momenti (J_{xy}, J_{yz} in J_{zx}), tako da se enačba (3.36) vztrajnostnega elipsoida poenostavi v enačbo:

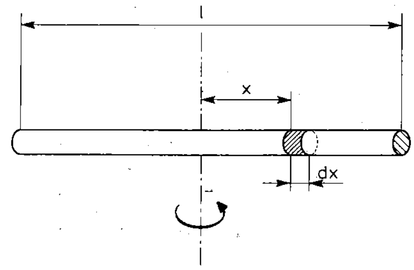
$$J_1X^2 + J_2Y^2 + J_3Z^2 = 1 \quad (3.37)$$

pri čemer smo označili vztrajnostne momente telesa glede na glavne vztrajnostne osi z J_1, J_2 in J_3; to so **glavni vztrajnostni momenti telesa.** V splošnem so različni; le če ima telo simetrijske lastnosti, so nekateri lahko enaki. Za homogeno kroglo npr. velja: $J_1 = J_2 = J_3$, za osnosimetrična telesa pa $J_1 = J_2 \neq J_3$ (če je os z simetrijska os).

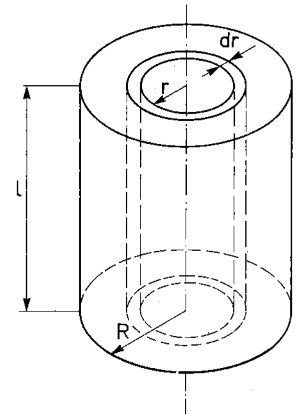
Steinerjev stavek

Vztrajnostni moment telesa glede na os skozi težišče poznamo. Kadar potrebujemo vztrajnostni moment glede na drugo os, ki je vzporedna osi skozi težišče, uporabimo Steinerjev stavek. Na sliki (3.34) je prerez telesa skozi ravnino, pravokotno na vrtilno os 0 (ta je lahko tudi izven telesa). Težišče C telesa je za a oddaljeno od osi 0.

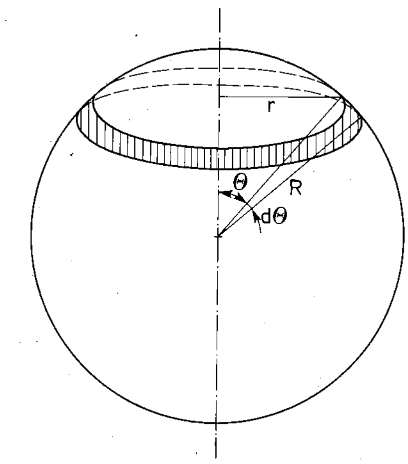
Vztrajnostni moment telesa glede na os 0 je po definiciji dan z enačbo:



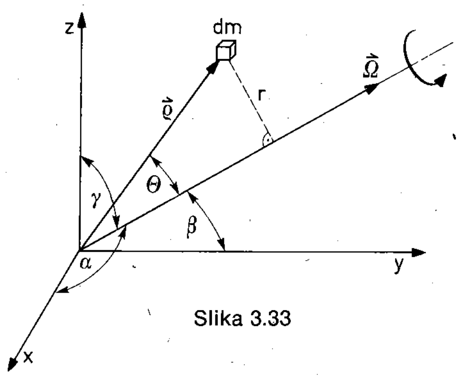
Slika 3.30



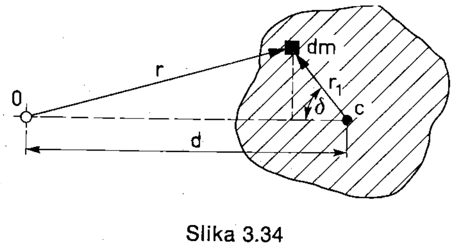
Slika 3.31



Slika 3.32



Slika 3.33



Slika 3.34

$$J = \int r^2 dm$$

kjer je r pravokotna oddaljenost masnega elementa dm od osi 0. J želimo povezati z vztrajnostnim momentom telesa glede na vzporedno težiščno os (J_c). V ta namen uporabimo kosinusni stavek:

$$r^2 = a^2 + r_1^2 - 2ar_1\cos\delta \quad \text{(gl. sliko 3.34)}$$

Tu je r_1 oddaljenost masnega elementa dm od težiščne osi. Sledi:

$$J = \int(a^2 + r_1^2 - 2ar_1\cos\delta)dm = a^2m + \int r_1^2dm - 2a\int r_1\cos\delta dm$$

Drugi člen na desni strani zgornje enačbe je vztrajnostni moment J_c telesa glede na težiščno os:

$$J_c = \int r_1^2 dm$$

V zadnjem členu nastopa x – ta koordinata masnega elementa dm, ki jo merimo iz koordinatnega izhodišča v težišču C; $x = r_1\cos\delta$, zato ga lahko izrazimo s koordinato x_C težišča:

$$\int r_1\cos\delta dm = \int x dm = x_C m = 0 \quad \text{(gl. 3.15a)}$$

(Ker smo postavili koordinatno izhodišče v težišče telesa, je $x_C = 0$). Končni rezultat je:

$$\boxed{J = J_c + a^2m} \quad \textbf{Steinerjev stavek} \qquad (3.38)$$

Vztrajnostni moment telesa glede na poljubno os je vsota vztrajnostnega momenta glede na vzporedno težiščno os in vztrajnostnega momenta a^2m (kot če bi bila snov zbrana v težišču), kjer je a oddaljenost obeh vzporednih osi.

Primeri:

1. Poišči vztrajnostni moment tanke, homogene palice (dolžina b, masa m) glede na os skozi konec palice; os je pravokotna na palico.

$$J = J_c + a^2m = mb^2/12 + (b/2)^2m = mb^2/3 \qquad (3.38a)$$

2. Kolikšen je vztrajnostni moment homogenega valja glede na os vzdolž plašča?

$$J = J_c + a^2m = mR^2/2 + mR^2 = 3mR^2/2 \qquad (3.38b)$$

3. Nihalo stenske ure je sestavljeno iz dolge palice (dolžina b, masa m_1) in krogle (polmer R, masa m_2), ki je pritrjena na koncu palice. Kolikšen je vztrajnostni moment tega nihala glede na os skozi zgornji konec palice?

Sestavljen je iz vztrajnostnega momenta palice in vztrajnostnega momenta krogle. Prvega že poznamo ($= m_1b^2/3$, gl. 3.38a), drugega pa izračunamo s Steinerjevim stavkom: $m_2(b + R)^2 + 2m_2R^2/5$ (gl. 3.31).

$$J = J_{palice} + J_{krogle} = m_1b^2/3 + m_2(b + R)^2 + 2m_2R^2/5$$

4. Izračunaj vztrajnostni moment homogenega kvadra (masa m, stranice a, b in c) glede na os skozi središče kvadra, vzporedno z robom c.

Kvader v mislih razrežemo na tanke ploščice (slika 3.35). Ena takšna ploščica ima maso $dm = \varrho dV = \varrho acdy$; ker je oddaljena od osi za y, je njen vztrajnostni moment (s pomočjo Steinerjevega stavka) enak:

$$dJ = (a^2/12)dm + y^2dm = (y^2 + a^2/12)\,\varrho acdy$$

Celotni kvader zajamemo, če gre y od $-b/2$ do $+b/2$:

$$J = \int dJ = \varrho ac\int_{-b/2}^{+b/2}(y^2 + a^2/12)dy = \varrho ac(a^2 + b^2)b/12$$

$$J = m(a^2 + b^2)/12 \quad m = \varrho abc \qquad (3.38c)$$

Če postaneta a in $c \ll b$, se kvader stanjša v tanko palico z dolžino b; njegov vztrajnostni moment je tedaj $mb^2/12$, kar že poznamo.

Navor sile

Navor **M** sile **F** zapišemo v vektorski obliki z enačbo (3.22):

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \quad \text{(merska enota: Nm)} \qquad (3.39)$$

pri čemer je **r** vektor oddaljenosti prijemališča sile od osi (slika 3.36). Smer navora M je določena s smerjo vektorskega produkta vektorjev **r** in **F** (prvi vektor **r** zasukamo tako, da se po najkrajši poti pokrije z drugim vektorjem **F**; kamor se pri tem zasuku premakne desni vijak, tja kaže vektor **M**). Vektor navora je torej pravokoten na ravnino, ki jo tvorita krajevni vektor **r** prijemališča sile in sama sila **F**; ima smer osi, okrog katere se vrti. Po velikosti je **produkt sile in njene ročice,** to je:

$$M = |\mathbf{M}| = rF\sin\delta = r'F \qquad (3.40)$$

kjer je δ kót med smerjo sile in smerjo vektorja **r** (ročica sile $r' = r\sin\delta$ je pravokotna oddaljenost vrtišča od smeri sile, gl. stran 64).

Iz definicije sledi, da se navor sile ne spremeni, če silo pomikamo v njeni lastni smeri (saj se pri tem ročica sile ne spremeni); seveda pa je ne smemo premikati paralelno, približati vrtišču ali oddaljiti od njega.

Če učinkuje na telo več sil hkrati, npr. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., določimo navor vsake sile posebej (glede na dano vrtilno os), npr. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$, ..., in nato poiščemo rezultanto vseh navorov:

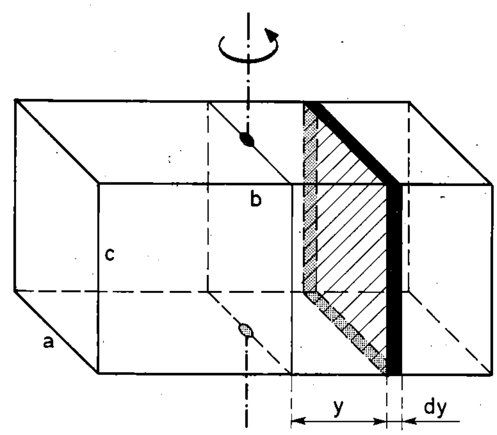
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \ldots \qquad (3.41)$$

Kako se telo vrti okrog neke vrtilne osi, je odvisno od rezultante navorov (**M**) vseh delujočih sil. Pomembna je projekcija navora vzdolž vrtilne osi. Sila najmočneje vpliva na vrtenje telesa (povzroči kotni pospešek), če je njen navor usmerjen vzdolž vrtilne osi (če sila leži v ravnini, pravokotno na vrtilno os).

Recimo, da sile $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... leže v isti ravnini (t. j. **koplanarne sile**), in sicer v ravnini pravokotno na vrtilno os. Na sliki (3.37) so sile v ravnini lista, vrtilna os pa je pravokotna nanjo. Ker imajo navori teh sil enako smer (smer vrtilne osi), jih lahko pišemo kot skalarje. S predznakom + ali – popišemo usmerjenost navora vzdolž vrtilne osi. Če sila pospešuje vrtenje (če ima njen navor **M** smer kotne hitrosti ω), je njen navor pozitiven, drugače pa negativen. Celoten navor M vseh sil je potem dan z enačbo (gl. sliko 3.37):

$$M = r_1'F_1 - r_2'F_2 + 0 + r_4'F_4$$

Navor sile F_3 je v našem primeru nič, ker je ročica te sile nič ($r_3' = 0$), saj gre podaljšek sile skozi vrtilno os.



Slika 3.35

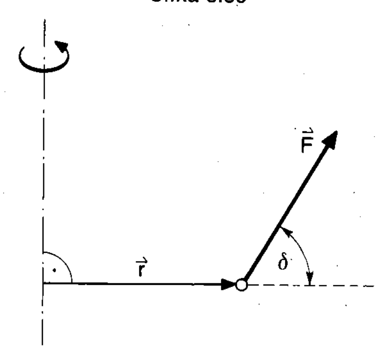
Navor rezultante sil

Rezultanta vseh zunanjih sil:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots$$

določa pospešek masnega središča telesa. Njeno lego (to je njeno prijemališče) poiščemo z zahtevo, da bodi **njen navor M enak rezultanti navorov posameznih sil, ki jo sestavljajo**:

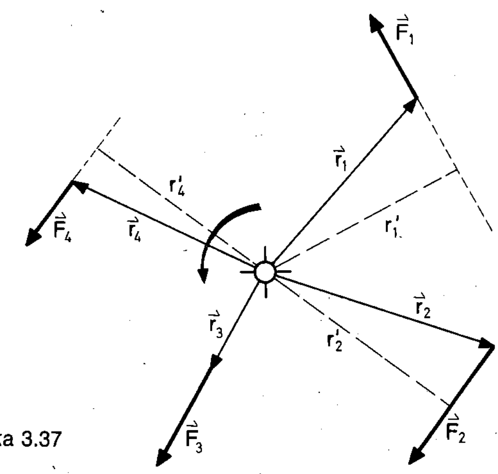
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \ldots \qquad (3.42)$$



Slika 3.36

Tu je **r** krajevni vektor prijemališča rezultante **F**. Rezultanto **F** postavimo na takšno oddaljenost od vrtilne osi, da je njen navor **M** enak rezultanti navorov vseh sil, ki jo sestavljajo. Tako lahko z rezultanto **F** izračunamo ne le pospešek $\mathbf{a}_c$ masnega središča telesa, ampak tudi kotni pospešek vrtenja ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}/J = \mathbf{r} \times \mathbf{F}/J$).

V splošnem je lega rezultante **F** (pri danih silah) odvisna od vrtilne osi, okrog katere se telo vrti. Če je ta druga, moramo rezultanto **F** premakniti, da je njen navor spet enak rezultanti navorov posameznih sil. Tega pa ni treba napraviti, če so **sile vzporedne. Lega rezultante vzporednih sil je neodvisna od vrtilne osi.** To trditev bomo dokazali s primerom.



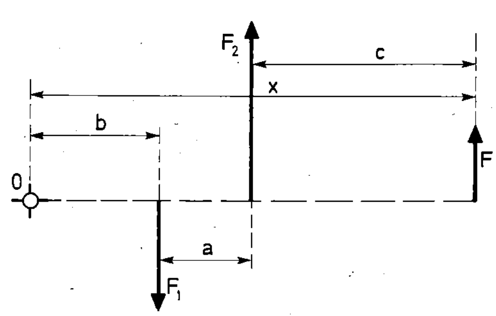
Slika 3.37

Primera:

1. Poišči rezultanto vzporednih sil $F_1 = 20$ N in $F_2 = 30$ N, ki sta razmaknjeni (paralelno) za $a = 40$ cm (slika 3.38).

Ker sta sili vzporedni in ker se navori sil ne spremene, če sile pomaknemo v njihovih lastnih smereh, lahko sili F_1 in F_2 pomaknemo tako, da sta njuni prijemališči v isti črti z vrtiščem 0 (gl. sliko 3.38). Sila F_1 je od vrtišča oddaljena za b, sila F_2 za $b + a$, rezultanta $F = F_2 - F_1$ pa za x, ki ga iščemo. Velja (gl. enačbo 3.41):

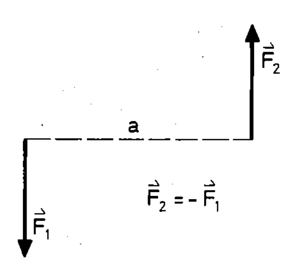
$$xF = F_2(b + a) - F_1 b \quad \text{ali}$$
$$x = b + aF_2/(F_2 - F_1)$$



Slika 3.38

Vidimo, da je rezultanta F oddaljena od sile F_2 za $c = x - b - a = aF_1/(F_2 - F_1) = 80$ cm, od sile F_1 pa za $c + a = aF_2/(F_2 - F_1) = 120$ cm. Ker oddaljenost b vrtišča izpade, je oddaljenost rezultante F od sile F_1 oz. F_2 neodvisna od lege vrtišča 0.

Ker je lega rezultante neodvisna od vrtilne osi, lahko postavimo os tudi na mesto rezultante. Navor rezultante glede na to os je torej nič. Prepričaj se, da sta navora sil F_1 in F_2 glede na to os nasprotno enaka (njuna rezultanta je nič).



Slika 3.39

Zgoraj smo ugotovili, da je rezultanta zunaj sil, če sta sili nasprotno usmerjeni, in sicer je na strani močnejše sile (F_2). Če pa sta vzporedni sili usmerjeni v isto smer, je njuna rezultanta med njima, in sicer bliže močnejši sili.

2. Navor dvojice sil. Dvojica sil je par nasprotno enakih sil (slika 3.39). Njuna rezultanta F je nič. Če na telo učinkuje dvojica sil, masno središče telesa ali miruje ali se giblje enakomerno (brez pospeška). Dvojica sil vpliva edinole na vrtenje telesa. Tu nima pomena iskati lege rezultante (1. primer za $F_1 = F_2$), saj rezultante ni. Pač pa kljub temu obstaja rezultanta M navorov obeh sil. Ta je neodvisno od lege vrtišča enaka:

$$M = aF_1 \tag{3.43}$$

kjer je a paralelna razmaknjenost obeh sil. O tem se najlažje prepričamo, če si mislimo vrtišče v prijemališču sile F_1.

Če želimo, da se prosto telo vrti na mestu (ne da bi se njegovo masno središče premikalo), moramo na telo učinkovati z dvojico sil.

Navor teže telesa – težišče

Zanima nas, kako se telo vrti pod vplivom lastne teže. Teža učinkuje v navpični smeri, zato je njen učinek na vrtenje največji, če je vrtilna os vodoravna. Na sliki (3.40) je navpični prerez telesa; vrtilna os je pravokotna na ravnino lista. Teža $m\mathbf{g}$ je zvezno porazdeljena po celotni prostornini telesa. Na masni element dm odpade diferencialna teža $\mathbf{g}dm$; teh je zelo (neskončno) mnogo. Posamezne diferencialne teže so vzporedne, zato je njihova rezultanta (to je celotna teža telesa) kar vsota oziroma integral:

$$\int \mathbf{g}dm = \mathbf{g}\int dm = \mathbf{g}m = \textbf{teža telesa}$$

Diferencialne teže elementov, ki so desno od navpičnice skozi vrtišče 0, vrtijo telo v smeri vrtenja urnega kazalca; one na drugi strani pa v nasprotni smeri. Iščemo rezultanto navorov posameznih diferencialnih tež.

Skozi vrtišče 0 potegnemo vodoravno koordinatno os x, tako da je vrtišče v koordinatnem izhodišču. Koordinata x masnega elementa dm je obenem ročica teže $\mathbf{g}dm$ tega elementa glede na vodoravno os skozi koordinatno izhodišče 0. Navor dM teže tega elementa je zato:

$$dM = xgdm$$

Navori elementov na desni strani vrtišča ($x > 0$) so pozitivni, na levi strani ($x < 0$) pa negativni. Rezultanta teh navorov je navor celotne teže telesa:

$$M = \int dM = \int xgdm = g\int xdm$$

Rezultanto navorov pišemo kot navor rezultante:

$$M = l \cdot mg$$

kjer je l ročica celotne teže:

$$l = (1/m)\int xdm = x_C \tag{gl. 3.15a}$$

enaka koordinati x_C masnega središča telesa. Ne glede na lego vrtišča velja, da **teža vrti telo tako** (s takšnim navorom), **kot da bi bila zbrana v masnem središču telesa**. Zaradi tega se masno središče togega telesa imenuje tudi **težišče**. Seveda v resnici teža ne »prijemlje« v težišču (saj je porazdeljena po celotnem telesu in učinkuje na vsak delček telesa), pač pa se telo vrti tako, kot da bi celotna teža delovala iz njegovega težišča. Vidimo, da se telo ne giblje le translatorno skozi prostor pod vplivom zunanjih sil, kot da bi bila njegova masa zbrana v težišču, ampak se pod vplivom teže vrti tudi okrog stalne osi, kot da bi težišče vsebovalo celotno težo telesa.

Navor teže telesa glede na dano vrtišče 0 izračunamo tako, da vzamemo, kot da teža $m\mathbf{g}$ »prijemlje« v težišču telesa (slika 3.41), zato velja:

$$\boxed{M = x_C mg} \tag{3.44}$$

Če je težišče desno od vrtišča ($x_C > 0$), se telo pod vplivom lastne teže zavrti v smeri vrtenja urnega kazalca. Telo se zaradi lastne teže ne zavrti, če je težišče pod vrtiščem ali nad njim, torej če sta težišče in vrtišče na isti navpičnici, t. i. **težiščnici** (slika 3.42). Ker je tedaj $x_C = 0$, je tudi $M = 0$.

Mehansko ravnovesje

Telo je v mehanskem ravnovesju, če je pospešek njegovega težišča nič in če ni kotnega pospeška okrog poljubne osi skozi težišče:

$$\mathbf{a}_C = 0 \tag{3.45a}$$
$$\alpha_C = 0 \tag{3.45b}$$

To dosežemo, če je **rezultanta vseh zunanjih sil**, ki učinkujejo na telo, **nič**, in če je **rezultanta vseh navorov**, ki vrtijo telo okrog poljubne osi, enaka **nič**:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \\ \mathbf{M} &= \sum_i \mathbf{M}_i = 0\end{aligned}} \qquad \begin{aligned}&\textbf{Potreben in zadosten pogoj za} \quad (3.46a)\\ &\textbf{mehansko ravnovesje togega telesa} \quad (3.46b)\end{aligned}$$

Težišče telesa, ki je v mehanskem ravnovesju, miruje ali se giblje enakomerno s stalno hitrostjo. Če je telo mirovalo v trenutku, ko so se izničile zunanje sile, miruje tudi naprej. Če se je tedaj gibalo, se giblje naprej z nespremenjeno hitrostjo. Mirovanje tržišča oziroma njegovo enakomerno gibanje ne zadostuje za mehansko ravnovesje. Potrebno je še, da se telo ne vrti neenakomerno (pospešeno ali pojemajoče), kar zagotovimo, če izničimo rezultanto vseh navorov. Če se v trenutku, ko rezultanta navorov postane nič, vrti z neko kotno hitrostjo, se vrti tudi naprej enakomerno z enako kotno hitrostjo.

V tehniških strokah se mehansko ravnovesje teles obravnava v okviru **statike.** Vendar ne pozabimo, da z mehanskim ravnovesjem ni vedno povezano mirovanje telesa. Telo se lahko tudi giblje, vendar enakomerno.

Primeri:

1. Lokomotiva na mostu. Most (dolžina b, masa M) je na konceh podprt. Čezenj pelje lokomotiva (masa m) s stalno hitrostjo v. Kako se sili N_A in N_B, s katerima most pritiska na podpori A in B spreminjata s časom zaradi gibanja lokomotive? (Slika 3.43)

Na most učinkujejo tele zunanje sile: podporni sili N_A in N_B navzgor ter teža lokomotive (mg) in samega mostu (Mg) navzdol. Njihova rezultanta mora biti nič:

$$N_A + N_B - mg - Mg = 0 \text{ ali } N_A + N_B = mg + Mg$$

(Podporni sili skupaj sta enaki celotni teži tovora – mostu in lokomotive). Drugi pogoj mehanskega ravnovesja (3.46b) uporabimo za os skozi podporno točko A (ali B). Teža lokomotive vrti most navzdol z navorom xmg (x je oddaljenost lokomotive od leve podpore A, enaka je vt), teža Mg mostu pa ga vrti z navorom $Mgb/2$ (gl. 3.44). Tema navoroma nasprotuje podporna sila N_B, ki vrti most navzgor z navorom bN_B. Rezultanta vseh teh navorov je nič (most miruje):

$$bN_B - xmg - (b/2)Mg = 0 \quad \text{ali}$$
$$N_B = Mg/2 + (x/b)mg, \quad x = vt$$

Podobno dobimo podporno silo N_A (vrtišče je v podpori B):

$$N_A = Mg/2 + (1 - x/b)mg$$

Ko je lokomotiva na sredi mostu ($x = b/2$), sta podporni sili enaki ($N_A = N_B = Mg/2 + mg/2$), drugače pa je bolj obremenjena tista podpora, ki je bliže bremenu (lokomotivi). V začetku, ko je lokomotiva nad podporo A ($x = 0$), je $N_A = Mg/2 + mg$ in $N_B = Mg/2$, na koncu ($x = b$) pa obratno.

2. Tehtanje z vzvodno tehtnico (slika 3.44). Če vzvod ni podprt natančno v težišču, morata biti prazni skodelici različno težki, da je tehtnica v ravnovesju. Merjenec z maso m, ki jo želimo določiti, položimo npr. na desno skodelico, na levo pa postavimo znano utež m_1, ki uravnovesi tehtnico. Meritev nato ponovimo: merjenec damo na levo skodelico in uravnovesimo tehtnico z drugo utežjo m_2 na desni skodelici. Dokazali bomo, da je masa merjenca enaka geometrijski sredini mas obeh uteži: $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

Pogoj za mehansko ravnovesje (glede na vodoravno vrtilno os skozi podporno točko vzvoda) prazne tehtnice dá enačbi:

$$N - (M_0 + M_1 + M_2)g = 0 \quad \text{ter}$$
$$M_0 gx + M_2 g(L + x) - M_1 g(L - x) = 0$$

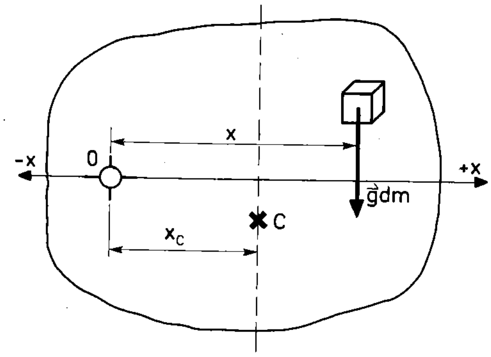
kjer je x odmik težišča vzvoda od vrtišča; M_0, M_1 in M_2 so mase vzvoda ter leve in desne skodelice.

Za prvo tehtanje se navori izničijo z enačbo:

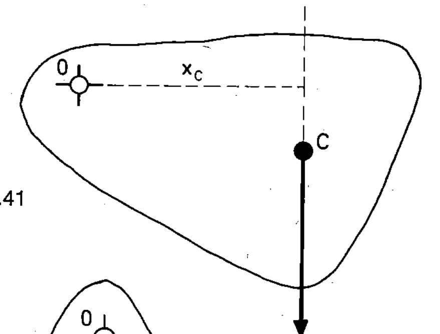
$$M_0 gx + (M_2 + m)g(L + x) - (M_1 + m_1)g(L - x) = 0$$

za drugo pa z enačbo:

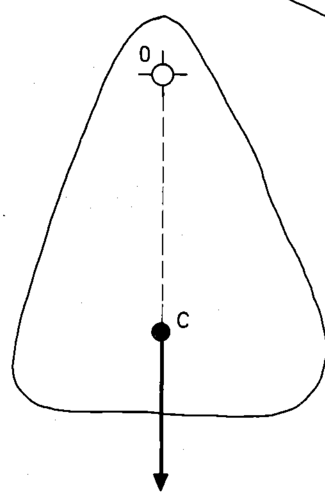
$$M_0 gx + (M_2 + m_2)g(L + x) - (M_1 + m)g(L - x) = 0$$



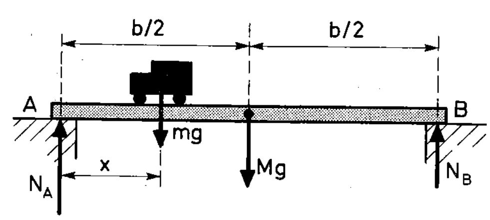
Slika 3.40



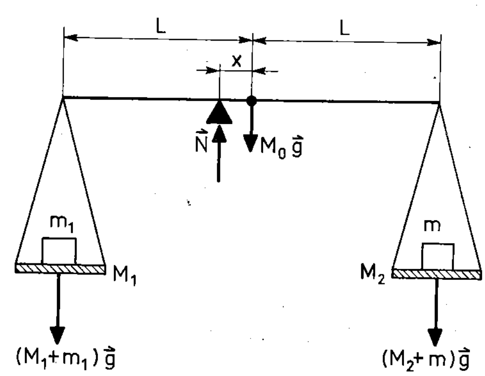
Slika 3.41



Slika 3.42



Slika 3.43



Slika 3.44

Sila N v podpori je vsakokrat enaka celotni teži vseh bremen (vzvoda, skodelic, merjenca in uteži).

Od zadnjih dveh enačb odštejemo enačbo ravnovesja navorov prazne tehtnice (da se izločijo mase vzvoda in praznih skodelic) in dobimo enačbi:

$$m(L + x) = m_1(L - x) \quad \text{ter}$$
$$m_2(L + x) = m(L - x)$$

Enačbi med seboj delimo in ostane: $m/m_2 = m_1/m$ ali $m^2 = m_1m_2$, kar je bilo treba dokazati. Z dvojnim tehtanjem lahko maso merjenca izrazimo z masama uteži, ne da bi vpletali podatke o sami tehtnici.

3. Decimalna tehtnica je razmeroma zapleten sistem vzvodov, prirejen za tehtanje težjih tovorov (slika 3.45). Posamezni vzvodi so izbrani in razporejeni tako, da je odčitek teže tovora (T) neodvisen od lege tovora na tehtalni plošči. Poleg tega je utež T na skodelici, ki uravnovesi tehtnico s tovorom, natanko desetina teže tovora (odtod ime decimalna tehtnica).

Na sliki (3.45) so označene sile F_1, F_2 in F_3, ki jih potrebujemo za uravnovešenje navorov v posameznih vrtiščih. Za ravnovesje glavnega vzvoda okrog vrtišča 0 dobimo enačbo:

$$TL = F_1a + F_2b$$

Sili F_1 in F_3 podpirata tehtalno ploščo s tovorom, zato je:

$$F_1 + F_3 = mg$$

Izenačenje navorov glede na vrtišče B dá enačbo:

$$F_1(b + d - a) + F_3c = mgx$$

pri čemer je x oddaljenost težišča tovora od vrtišča B. Preostane še ravnovesje navorov za podporno ogrodje, ki je pod tehtalno ploščo:

$$F_2d = F_3c$$

Iz zgornjih enačb izločimo F_3 ter F_2 in dobimo:

$$F_1 = mg(x - c)/(b + d - a - c) \quad \text{ter}$$
$$TdL = bc \cdot mg + (ad - bc)F_1$$

Vidimo, da postane odčitek T neodvisen od F_1 (ki vsebuje x, to je lego tovora na tehtalni plošči), če je $ad - bc = 0$ ali

$$a/b = c/d$$

Pri tako izbranih dolžinah vzvodov je odčitek T dan z enačbo (ne glede na lego tovora na tehtalni plošči):

$$T = (a/L)mg$$

Za $L = 10a$ potemtakem dobimo: $T = mg/10$, kar je značilno za decimalno tehtnico.

Pri zgornjem izvajanju smo zanemarili težo tehtalne plošče in težo skodelice. Ponovi računa tako, da ju upoštevaš.

4. Viseči most. Levi konec vodoravnega mostu je vpet v zid, na prosti strani pa je most z vrvjo poševno navzgor pritrjen v zid (slika 3.46). Kolikšna je sila F_v v vrvi in s kolikšno silo učinkuje zid na levi konec mostu?

Ker vrv vleče most poševno navzgor k zidu, ima sila zidu vodoravno komponento R, ki odriva most in tako vzdržuje ravnovesje z vodoravno komponento sile F_v v vrvi:

$$R = F_v\cos\varphi$$

Za navpične komponente sil velja ravnovesna enačba:

$$F_v\sin\varphi + N = mg \quad \text{ali}$$
$$N = mg - F_v\sin\varphi$$

Navore sil izničimo glede na os, okrog katere bi se most zavrtel, če bi se vrv strgala. Teža mostu (mg) vrti navzdol z navorom $mgL/2$, sila v vrvi pa vrti navzgor z navorom $F_vb\sin\varphi$ (b je oddaljenost pritrdišča vrvi od vrtišča mostu). Sledi:

$$F_vb\sin\varphi - mgL/2 = 0 \quad \text{ali}$$
$$F_v = mgL/(2b\sin\varphi) \quad \text{ter}$$
$$N = mg - F_v\sin\varphi = mg(1 - L/2b)$$
$$R = F_v\cos\varphi = mg(L/2b)\mathrm{ctg}\varphi$$

Vidimo, da v zidu ni navpične podporne sile ($N = 0$), če je $b = L/2$, če je torej nosilna vrv vpeta v težišču mostu. Tedaj je navpična komponenta sile v vrvi enaka teži mostu (ne glede na naklon φ vrvi). Za $b < L/2$ je $N < 0$ (navpična sila v zidu je usmerjena navzdol).

5. Drsenje lestve ob zidu. *Lahka lestev (dolžina L)* je prislonjena ob navpično steno, tako da oklepa kót φ z vodoravnimi tlemi (slika 3.47). Statični torni koeficient med tlemi in lestvijo je k_1, med lestvijo in steno pa k_2. Po lestvi se vzpenja človek z maso m. Kako visoko se mora vzpeti, da lestev zdrsne? Maso lestve zanemarimo v primerjavi z maso človeka.

Na lestev učinkujejo sile: teža mg človeka ter sila tal in sila stene. Zadnji razstavimo na navpični in vodoravni komponenti. Vodoravna komponenta sile tal je usmerjena k steni (ker hoče spodnji konec lestve zdrsniti proč od stene) in med človekovim vzpenjanjem narašča do največje možne vrednosti k_1N_1. Navpična komponenta sile stene je usmerjena navzgor in narašča do zgornje vrednosti k_2N_2.

Vzemimo, da lestev zdrsne, ko se človek povzpne po lestvi za x. Tedaj doseže vodoravna komponenta sile tal zgornjo mejo k_1N_1, navpična komponenta sile stene pa zgornjo mejo k_2N_2. Tik pred zdrsom še veljajo pogoji mehanskega ravnovesja.

Rezultanta vseh sil, ki učinkujejo na lestev, je nič:

$$N_1 + k_2N_2 - mg = 0 \quad \text{in}$$
$$k_1N_1 - N_2 = 0 \quad \text{ali}$$
$$N_1 = mg/(1 + k_1k_2) \quad , \quad N_2 = k_1N_1$$

Rezultanta vseh navorov (npr. glede na vodoravno os skozi spodnje dotikališče lestve) je nič:

$$mgx\cos\varphi - k_2N_2L\cos\varphi - N_2L\sin\varphi = 0 \quad \text{ali}$$
$$x = LN_2(k_2 + \mathrm{tg}\varphi)/mg = Lk_1(k_2 + \mathrm{tg}\varphi)/(1 + k_1k_2)$$

Vidimo, da je najvišji vzpon neodvisen od mase človeka (če je le ta velika v primerjavi za maso lestve). Po lestvi se lahko vzpenjamo brez bojazni, da bo zdrsnila, če je zgornji konec lestve pritrjen k steni, čemur ustreza $k_2 \to \infty$. Pri končno velikem k_2 pa se je nemogoče vzpenjati po lestvi, če so tla idealno gladka: za $k_1 = 0$ je tudi $x = 0$. V splošnem se lahko dlje vzpenjamo po lestvi, če je ta bolj pokončna (večjemu kotu φ ustreza večji x).

6. Prevrnitev zaboja med drsenjem. Po vodoravnih tleh vlečemo kockast zaboj (masa m, stranica b), da drsi enakomerno s stalno hitrostjo (slika 3.48). Najmanj kolikšen kót φ mora oklepati vlečna sila F z vodoravno smerjo, da se zaboj med drsenjem ne prevrne?

Ker zaboj drsi translatorno s stalno hitrostjo, so sile in navori v ravnovesju: rezultanta sil je nič in rezultanta navorov je nič. Za projekcije sil v navpični smeri velja:

$$F \sin\varphi + N - mg = 0 \text{ ali } N = mg - F \sin\varphi$$

za vodoravne projekcije pa:

$$F \cos\varphi - k_t N = 0 = F \cos\varphi - k_t(mg - F \sin\varphi) \text{ ali}$$
$$F = k_t mg/(\cos\varphi + k_t \sin\varphi)$$

Zaboj se ne prevrne okrog vodoravne osi skozi rob 0 (gl. sliko 3.48), če je navor teže zaboja ($mgb/2$) večji od navora vlečne sile ($Fb \cos\varphi$):

$$mgb/2 > Fb \cos\varphi \text{ ali}$$
$$F < mg/(2 \cos\varphi)$$

Vstavimo F iz zgornje enačbe za enakomerno drsenje in dobimo pogoj, ki mora biti izpolnjen, da se zaboj med enakomernim drsenjem ne prevrne:

$$\mathrm{tg}\varphi > 2 - 1/k_t$$

Pri zelo močnem trenju ($k_t \gg 1$) se torej zaboj ne prevrne, če je $\mathrm{tg}\varphi > 2$. Na povsem gladki podlagi ($k_t \to 0$) pa zaboja ni mogoče prevrniti, četudi je vlečna sila usmerjena skoraj navpično navzdol ($\varphi = -90°$).

7. Viseča palica. Homogena palica z enakomernim prerezom S ima maso m in dolžino b; z enim koncem je pritrjena na strop, tako da visi. Kolikšna je notranja sila F na različnih prerezih v palici? (Slika 3.49)

Na prerezu S v globini x pod pritrdiščem palice učinkuje sila $F(x)$, kar pomeni, da spodnji konec palice čuti silo $F(x)$, s katero ga zgornji del palice vleče navzgor (leva sila na sliki 3.48), sam pa obenem vleče zgornji del palice z enako veliko silo navzdol (desna sila na sliki). Na spodnji del palice torej delujeta sila $F(x)$ navzgor in teža $mg(b-x)/b$ navzdol. Ker palica miruje, je:

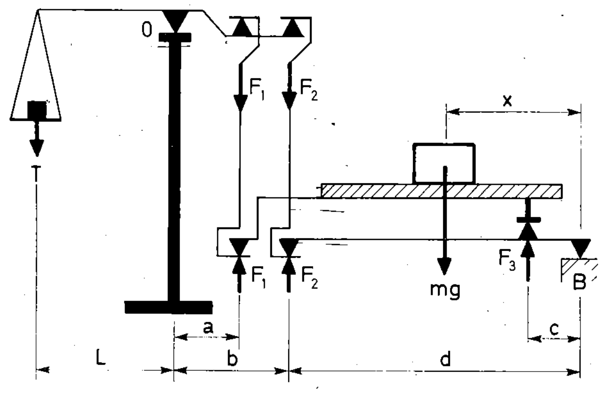
$$F(x) = mg(1 - x/b) \quad m = \varrho V = \varrho S b$$

Na spodnjem prostem koncu palice ($x = b$) seveda ni notranje sile: $F = 0$. Notranja sila enakomerno narašča navzgor in je največja na zgornjem (pritrjenem) koncu palice ($x = 0$), kjer je enaka celotni teži palice ($F = mg$).

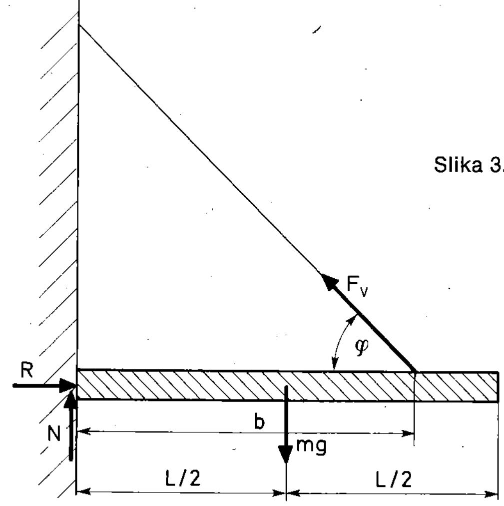
Natezna napetost v palici zaradi lastne teže palice je:

$$\sigma(x) = F(x)/S = \varrho g(b - x) \quad \text{(gl. 3.18)} \qquad (3.47)$$

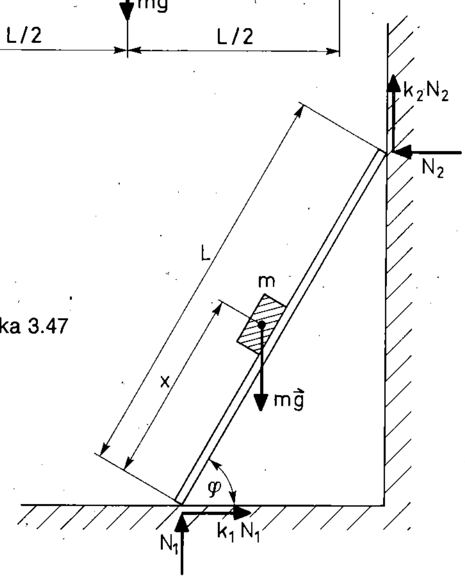
S kolikšno silo učinkuje palica na strop? Označi to silo na sliki.



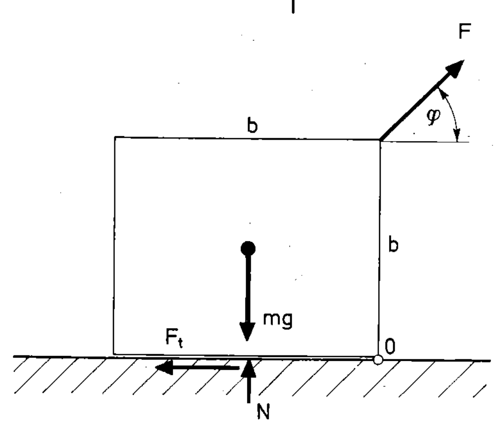
Slika 3.45



Slika 3.46



Slika 3.47



Slika 3.48

8. Verižnica je krivulja, v katero se povesi vrv ali veriga (kabel itd.) zaradi lastne teže; konca verige sta razmaknjena (npr. za a) in pritrjena enako visoko (slika 3.50).

Veriga z maso m in dolžino b je homogena; na enoto dolžine odpade masa $\mu = m/b$. Izhodišče koordinatnega križa (0) postavimo v najspodnejšo točko povešene verižnice, ki je na sredi med podpornima točkama A in B.

Enačbo verižnice najlažje poiščemo v parametrični obliki, s pomočjo parametra s (dolžina loka verižnice), ki ga merimo iz koordinatnega izhodišča 0 vzdolž krivulje verižnice. Za ločni element ds verižnice velja: $dx = ds\cos\theta$ in $dy = ds\sin\theta$, pri čemer je θ naklonski kót tangente na verižnico v točki P.

Ravnovesni pogoj za viseči del verižnice med izhodiščem 0 in točko P (gl. sliko 3.50a) dá enačbi:

$$F\sin\theta = \text{teža} = s\mu g \quad in$$
$$F\cos\theta = F_0$$

F je notranja sila v točki P verižnice, F_0 pa v najspodnejši točki verižnice. Enačbi kvadriramo in seštejemo in dobimo:

$$F = \sqrt{F_0^2 + \mu^2 g^2 s^2}$$

Sledi:

$$dx = ds\cos\theta = dsF_0/F = F_0(F_0^2 + \mu^2g^2s^2)^{-1/2}ds \quad \text{ter}$$
$$dy = ds\sin\theta = ds \cdot \mu gs/F = \mu gs(F_0^2 + \mu^2g^2s^2)^{-1/2}ds$$

Po integraciji obeh enačb dobimo enačbo verižnice v parametrični obliki:

$$x = p\ \ln(s/p + \sqrt{1 + s^2/p^2}\ ) = p\ \mathrm{arsh}\left(\frac{s}{p}\right)$$

kjer je $p = F_0/\mu g$

$$y = \sqrt{s^2 + p^2} - p$$

Iz prve enačbe najprej izračunamo:

$$s = p\ \mathrm{sh}(x/p)$$

in nato vstavimo v drugo enačbo, da dobimo enačbo verižnice v eksplicitni obliki:

$$y = p\,[\mathrm{ch}(x/p) - 1] \tag{3.48}$$

V parametru $p = F_0/\mu g$ nastopa notranja sila F_0 (v najspodnejšem delu povešene verižnice), ki je odvisna od dolžine verige (b) in od njenega razpona (a). Velja: $b = 2s$ za $x = a/2$, to je:

$$b = 2p\ \mathrm{sh}(a/2p)$$

Iz te enačbe z znanimi podatki za dolžino (b) in razpon (a) verižnice izračunamo parameter p, ki ga nato vstavimo v enačbo verižnice (3.48). Največji poves verižnice y_0 je dan z enačbo:

$$y_0 = y(a/2) = p\ [\mathrm{ch}(a/2p) - 1]$$

Dinamika togega telesa

Najenostavnejše gibanje togega telesa je **translatorno gibanje**: vsak del telesa ima enako hitrost in enak pospešek (gl. str. 76). Kakor se giblje težišče, tako se giblje vsak del telesa (slika 3.51). Na sliki (3.52) je skiciran translatorni poševni met palice. Kako moramo vreči palico poševno navzgor, da bo letela translatorno?

Drug enostaven primer gibanja togega telesa je **rotacija**, to je **vrtenje okrog stalne osi** skozi težišče telesa. Težišče miruje ($v_c = 0$) in z njim vred mirujejo vse točke telesa, ki so na vrtilni osi. Ostali deli telesa pa krožijo okrog osi z obodno (tangentno) hitrostjo $v' = r\omega$, kjer je ω kotna hitrost vrtenja telesa, r pa pravokotna oddaljenost od vrtilne osi (slika 3.53; vrtilna os je pravokotna na ravnino lista). Čim bolj je del telesa oddaljen od vrtilne osi, tem hitreje se giblje. Tako se npr. gibljejo rotorji v raznih strojih in motorjih, osi, gredi ipd. Vrteča se telesa so večinoma osno simetrična; simetrijska os telesa je vrtilna os.

S translacijo in rotacijo lahko sestavimo posebno vrsto gibanja – **kotaljenje**. Težišče telesa se giblje, obenem se telo vrti okrog osi skozi težišče, vendar tako, da se smer vrtilne osi med gibanjem ne spreminja. Pri kotaljenju se vrtilna os premika paralelno sami sebi.

Hitrost $\mathbf{v}$ poljubnega dela telesa je sestavljena iz hitrosti $\mathbf{v}_c$ zaradi gibanja težišča in iz obodne hitrosti $\mathbf{v}'$ zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}' \tag{3.49}$$

Na nekaterih mestih se hitrosti $\mathbf{v}_c$ in $\mathbf{v}'$ seštevata, drugje odštevata. Če je le telo dovolj veliko, obstaja na njemu mesto, kjer je hitrost zaradi gibanja težišča ravno nasprotno enaka hitrosti zaradi rotacije: $\mathbf{v}_c = -\mathbf{v}'$; trenutna hitrost tega mesta je nič ($\mathbf{v} = 0$). Če je takšno mesto dotikališče telesa s podlago, pravimo, da se telo **kotali** po podlagi (brez podrsavanja). Na sliki (3.54) so označeni vektorji hitrosti ($\mathbf{v}$) za nekatera mesta valjastega ali kroglastega telesa (s polmerom R), ki se kotali po vodoravni podlagi. Težišče telesa se giblje v desno s hitrostjo $\mathbf{v}_c$, obenem se telo vrti okrog vodoravne osi skozi središče telesa s kotno hitrostjo ω (v smeri vrtenja urnega kazalca), tako da je:

$$\boxed{v_c = v' = R\omega} \quad \textbf{pogoj za kotaljenje} \tag{3.50}$$

Dotikališče telesa s podlago bi se moralo gibati v desno s hitrostjo v_c in obenem v levo s hitrostjo $v' = R\omega$. Ker je $v_c = R\omega$, je njegova trenutna hitrost nič, kar pomeni, da ne podrsuje. Brž ko je $v_c \neq R\omega$, telo podrsuje po tleh, in sicer:

$v_c > R\omega$ **telo podrsuje v smeri gibanja**
$v_c < R\omega$ **telo podrsuje proti smeri gibanja**

Profil hitrosti posameznih mest kotalečega se telesa (gl. sliko 3.54) nakazuje, da lahko **kotaljenje predstavimo kot rotacijo okrog trenutne osi skozi dotikališče** telesa s podlago. Hitrosti posameznih mest kotalečega se telesa so takšne, kot da bi se telo vrtelo s kotno hitrostjo ω okrog trenutne osi skozi dotikališče (ta vrtilna os se premika s hitrostjo težišča v_c vzporedno sami sebi). Hitrost $\mathbf{v}$ poljubnega dela telesa je npr. pravokotna na veznico r mesta z dotikališčem in enaka $r\omega$. Med kotaljenjem se najhitreje giblje zgornja točka telesa – z dvakratno hitrostjo težišča ($= 2v_c$).

Translacija, rotacija in kotaljenje so enostavni primeri gibanja togega telesa. V splošnem je gibanje bolj zapleteno, saj se med gibanjem lahko spreminja tudi smer vrtilne osi. Takšnega splošnega gibanja togega telesa ne moremo obravnavati s preprostimi matematičnimi sredstvi, ki so nam na razpolago na tej stopnji.

Ne glede na to, kako se telo giblje, velja tole:

Pospešek težišča telesa je odvisen od rezultante **F** vseh zunanjih sil.

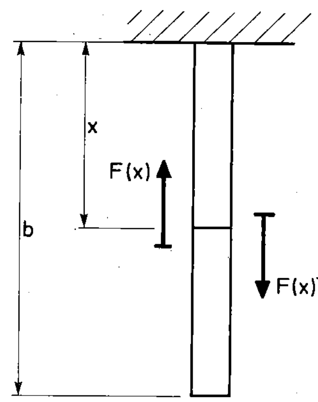
$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_c}$ (gl. 3.7)

Če težišče telesa miruje (ali se giblje enakomerno s stalno hitrostjo), je rezultanta vseh sil, ki učinkujejo na telo, enaka nič.

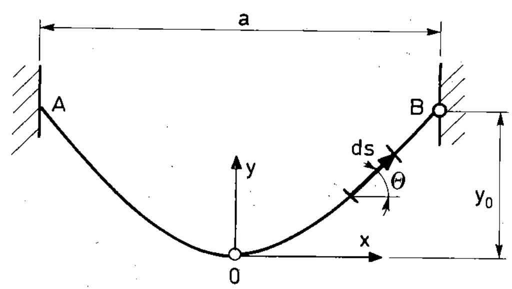
Vrtenje telesa določa rezultanta **M** navorov vseh zunanjih sil:

$\boxed{\mathbf{M} = J\alpha}$ (gl. 3.27)

kjer je α kotni pospešek, J pa vztrajnostni moment telesa glede na vrtilno os. Če se telo ne vrti (ali če se vrti enakomerno s stalno kotno hitrostjo), je rezultanta vseh zunanjih navorov enako nič.



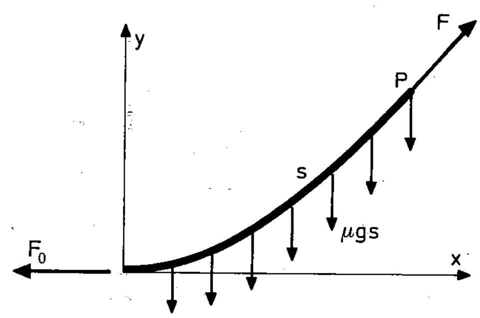
Slika 3.49



Slika 3.50

Primeri:

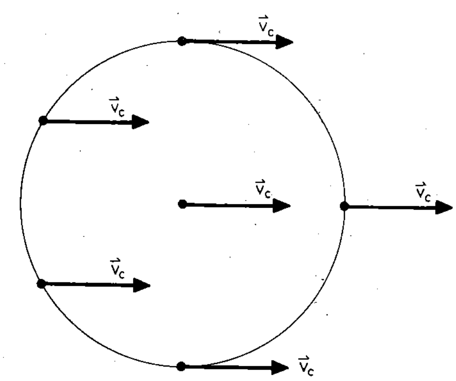
1. Prevrnitev avta na ovinku. Na strani 46 smo računali največjo hitrost, s katero lahko vozi avto skozi vodoravni ovinek, ne da bi zdrsnil. Četudi ne zdrsne, se pa lahko prevrne. Tokrat nas zanima, pri kolikšni hitrosti se avto prevrne. V tej zvezi sta pomembni predvsem višina h težišča nad tlemi ter razdalja b med kolesoma.



Slika 3.50a

Problem najhitreje razrešimo v neinercialnem koordinatnem sistemu, ki se giblje skupaj z avtom skozi ovinek (slika 3.55). Avto se začne prevračati okrog osi skozi podporno točko 0 kolesa na zunanji strani ovinka, ko je navor centrifugalne vztrajnostne sile mv^2/R (gl. str. 50) večji od navora teže avta:

$$(mv^2/R)h \geqslant mgb/2 \quad \text{ali}$$
$$v \geqslant \sqrt{gbR/2h}$$



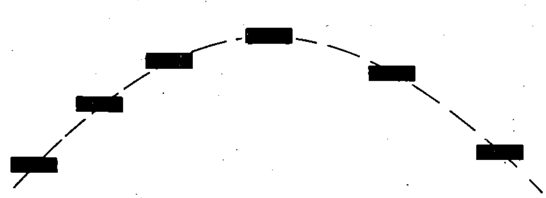
Slika 3.51

Nekoliko več dela je treba, če želimo primer razrešiti iz mirujočega inercialnega koordinatnega sistema (slika 3.56). Na avto učinkujejo sile: teža avta mg ter sili tal na kolesi; zadnji razstavimo na navpični komponenti N_1 in N_2 ter na vodoravni komponenti F_1 in F_2 (ti sta usmerjeni k središču ovinka in omogočata radialni pospešek). Ker se težišče C giblje s hitrostjo v po vodoravnem krogu s polmerom R, to je z radialnim pospeškom v^2/R v vodoravni smeri k središču ovinka, zadoščajo sile ravnovesnima enačbama:

$$N_1 + N_2 - mg = 0 \quad \text{in}$$
$$F_1 + F_2 = mv^2/R$$

Vsota navorov glede na os skozi težišče je nič (ker se avto ne prevrača):

$$(F_1 + F_2)h + N_1 b/2 - N_2 b/2 = 0 \quad \text{ali}$$
$$N_2 - N_1 = (2h/b)(F_1 + F_2) = (2h/b)(mv^2/R)$$



Slika 3.52

Ker je $N_1 + N_2 = mg$, dobimo:

$$N_1 = mg/2 - mv^2h/bR$$
$$N_2 = mg/2 + mv^2h/bR$$

Vidimo, da je kolo na zunanji strani ovinka bolj obremenjeno kot notranje kolo ($N_2 > N_1$); razlika je večja, če se avto giblje hitreje. Avto se začne prevračati v trenutku, ko se pritisk notranjega kolesa na tla zmanjša na nič , kar se zgodi pri hitrosti v_{max}, za katero velja:

$$N_1 = 0 = mg/2 - mv^2_{max}h/bR \text{ ali}$$
$$v_{max} = \sqrt{gbR/2h}$$

kar že poznamo. Skozi ovinek lahko vozimo hitreje (brez bojazni, da bi se avto prevrnil), če je težišče avta nižje (manjši h) in če sta kolesi bolj razmaknjeni (večji b) ter (seveda) če je ovinek blažji (večji R).

2. Uteži na škripcu (slika 3.57). Uteži m_1 in m_2 sta privezani na skupno vrv, ki vodi okrog oboda pritrjenega škripca. Ta se lahko prosto vrti okrog vodoravne osi. S kolikšnim pospeškom se gibljeta uteži in kolikšna je sila v vrvi?

Vzemimo, da težja utež m_2 pada s pospeškom a. Ker je vrv napeta, se lažja utež m_1 dviga z enako velikim pospeškom. Vrv ne podrsava po obodu škripca, zato se škripec vrti pospešeno; vrtita ga sili F_1 in F_2 v vrvi na obeh straneh, ki sta zato različni.

Na utež m_2 delujeta teža m_2g navzdol in sila F_2 v vrvi navzgor:

$$m_2g - F_2 = m_2a$$

Za utež m_1 pa velja:

$$F_1 - m_1g = m_1a$$

Pospešek a gibanja uteži je obenem tangentni pospešek vrtenja škripca (ker vrv ne podrsava po obodu škripca), torej se škripec vrti s kotnim pospeškom $\alpha = a/R$ (R je polmer škripca). Tega povzročata sili F_1 in F_2 (trenje v ležajih zanemarimo), ki vrtita škripec z navorom:

$$M = (F_2 - F_1)R = J\alpha = Ja/R$$
(J je vztrajnostni moment škripca)

Iz enačb dinamike za uteži in škripec izračunamo neznane količine a, F_1 in F_2:

$$a = (m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2 + J/R^2)$$
$$F_1 = m_1g(2m_2 + J/R^2)/(m_1 + m_2 + J/R^2)$$
$$F_2 = m_2g(2m_1 + J/R^2)/(m_1 + m_2 + J/R^2)$$

Če je škripec lahek v primerjavi z utežema, tako da je $J/R^2 \ll m_1$ oz. m_2, se zgornji izrazi poenostavijo v:

$$a \approx g(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)$$
$$F_1 \approx 2m_1m_2g/(m_1 + m_2) \approx F_2$$

Tedaj sta sili v vrvi na obeh straneh škripca enaki (saj škripec nima zadosti vztrajnosti, da bi se upiral potegu uteži). Druga skrajnost je izredno težak škripec, tako da je $J/R^2 \gg m_1$ oz. m_2 in $a \approx 0$ ter $F_1 \approx m_1g$ in $F_2 \approx m_2g$ (škripec se zaradi velike vztrajnosti praktično ne vrti, uteži na vrvi mirujeta).

S kolikšno silo učinkuje vrtilna os na škripec? Kolikšen je navor te sile (trenje zanemarimo)?

3. Padanje palice. Homogena palica z maso m in dolžino b stoji pokonci na vodoravnih tleh (slika 3.58). Palico rahlo sunemo, da začne padati. S kolikšno hitrostjo udari zgornji konec palice ob tla, če spodnji konec ne zdrsne?

Palica se med padanjem vrti okrog vodoravne osi skozi podnožišče O. Ko oklepa z navpičnico kót φ, deluje nanjo navor teže $M = mg(b/2)\sin\varphi$, ki vsiljuje kotni pospešek α:

$$M = J\alpha$$
$$mg(b/2)\sin\varphi = (mb^2/3)\alpha \text{ ali}$$
$$\alpha = (3g/2b)\sin\varphi = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} \text{ ali}$$
$$d(\omega^2) = (3g/b)\sin\varphi d\varphi$$

Enačbo integriramo od začetne lege ($\varphi = 0$ in $\omega = 0$) do vmesne lege (φ in ω). Dobimo:

$$\omega^2 = (3g/b)\int_0^\varphi \sin\varphi d\varphi = (3g/b)(1 - \cos\varphi)$$

Palica pade na tla ($\varphi = 90°$) s kotno hitrostjo $\omega_1 = \sqrt{3g/b}$. Konec palice torej udari ob tla s hitrostjo $v_1 = b\omega_1 = \sqrt{3gb}$.

S kolikšno hitrostjo bi konec palice padel na tla, če bi prosto padal?

4. Pol pospeška. Kadar udarjamo s težkim kladivom ali sekiro, moramo držati ročaj na pravem mestu, da sunek udarca ni premočan. Držati moramo na mestu, kjer je t. i. pol pospeška.

Vzemimo dolgo palico in jo udarimo s silo F (vpliv drugih sil zanemarimo). Če jo udarimo v težišču, se palica premakne translatorno s pospeškom $a_c = F/m$ (m = masa palice). Če pa jo udarimo izven težišča, se palica (dodatno translaciji) tudi zasuče okrog osi skozi težišče s kotnim pospeškom $\alpha = M/J = fF/J$, kjer je J vztrajnostni moment palice glede na os skozi težišče, f pa ročica sile (slika 3.59). Zaradi zasuka palice dobi vsak del palice (dodatno k pospešku a_c zaradi premika težišča) še tangnetni pospešek $a_t = x\alpha$, pri čemer merimo x iz težišča. Celoten pospešek dela palice na oddaljenosti x od težišča je torej:

$$a(x) = a_c + a_t = a_c + x\alpha = F/m + xfF/J$$

Levo od težišča (x negativen) si pospeška zaradi premika težišča in zaradi zasuka palice nasprotujeta. **Pol pospeška** je tista točka (P) na palici, kjer je celoten pospešek nič, kjer je pospešek težišča ravno nasprotno enak tangentnemu pospešku zaradi zasuka palice; to se zgodi pri $x = -p$:

$$a(-p) = 0 = F/m - pfF/J \quad \text{ali}$$
$$p = J/mf \tag{3.51}$$

Pol pospeška se kljub udarcu zunanje sile ne premakne; njegov pospešek je nič. Lega pola na palici je odvisna od mesta udarca (f) sile, vedno pa je na drugi strani težišča. Če npr. udarimo homogeno palico (z doližino b) na koncu ($f = b/2$), je pol pospeška oddaljen od drugega konca palice za $b/3$.

Podoben primer: Na kateri višini (h) nad tlemi moramo suniti biljardno kroglo v vodoravni smeri, da po udarcu ne zdrsne? Dotikališče krogle s tlemi mora biti pol pospeška ($p = R$), zato: $R = J/m(h - R)$, kjer je J vztrajnostni moment krogle ($= 2mR^2/5$, gl. 3.31). Sledi: $h = 7R/5$. Kroglo moramo suniti na višini $0{,}4R$ nad njenim središčem.

5. Valjar. Valj z maso m in polmerom R leži na vodoravnih tleh. S kolikšnim pospeškom se giblje njegovo težišče, če ga vlečemo v vodoravni smeri s silo F, katere podaljšek gre skozi težišče? (Slika 3.60)

Valj se kotali. Kotaljenje pa lahko obravnavamo kot rotacijo okrog trenutne osi skozi dotikališče 0. Okrog te osi pospešuje vrtenje le vlečna sila F; njen navor je $M = FR$. Valj se torej vrti okrog dotikališča 0 s kotnim pospeškom $\alpha = M/J$, kjer je J vztrajnostni moment valja glede na os skozi 0 ($= 3mR^2/2$, gl. 3.38b):

$$\alpha = 2F/3mR$$

Težišče valja se giblje s pospeškom:

$$a_c = R\alpha = 2F/3m$$

(Če bi bil valj prost – ne na tleh – bi se njegovo težišče zaradi vlečne sile F gibalo s pospeškom F/m, tako pa je zaradi kotaljenja po tleh pospešek manjši).

Enak rezultat dobimo, če napišemo enačbo za gibanje težišča in enačbo za vrtenje valja okrog osi skozi težišče:

$$N - mg = 0$$
$$F - F' = ma_c$$
$$F'R = J_c\alpha = J_c a_c/R$$

Odtod izračunamo:

$$a_c = F/(m + J_c/R^2) = 2F/3m \quad (J_c = mR^2/2)$$

Vodoravna komponenta sile podlage (ki vrti valj) je:

$$F' = J_c a_c/R^2 = F/(1 + mR^2/J_c) = F/3$$

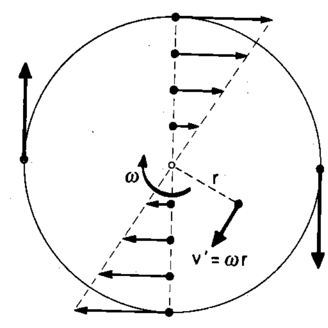
Dokler je ta komponenta manjša od statične torne sile ($= k_sN = k_smg$), se valj po podlagi še kotali. Pri $F \geqslant 3k_smg$ pa začne valj podrsavati po tleh.

Zgornjemu primeru je podobna znana igračka **jo-jo** (slika 3.61). Kolo ima gred s polmerom r; okrog gredi je navita vrv, katere prosti konec držimo v roki. Ko kolo spustimo, začne pospešeno padati, pri čemer se pospešeno vrti, vrv pa se odvija. S kolikšnim pospeškom pada težišče kolesa? Uporabimo zgornji rezultat, le da je vlečna sila F zdaj teža mg:

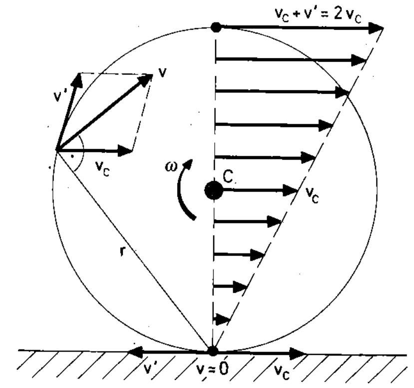
$$a_c = mg/(m + J/r^2) = g/(1 + J/mr^2)$$

Če se vrv pretrga, pada težišče kolesa s težnim pospeškom g; vrv pa zadržuje padanje, saj se mora kolo med padanjem tudi vrteti. Kolo pada s tem manjšim pospeškom, čim večji je njegov vztrajnostni moment.

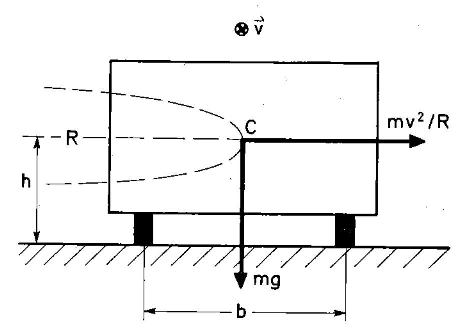
6. Balinanje. Kroglo zalučamo translatorno z začetno hitrostjo v_0 po vodoravnih tleh. S kolikšno hitrostjo se na koncu giblje težišče krogle? Na kolikšni razdalji (x_1) in po kolikšnem času (t_1) od mesta oziroma trenutka, ko se krogla dotakne tal, se krogla začne kotaliti? (Slika 3.62)



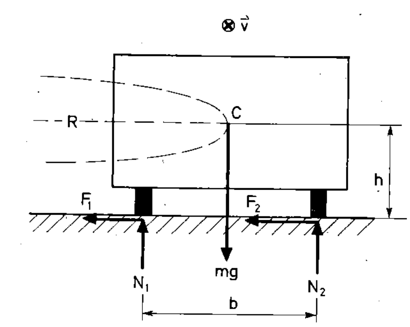
Slika 3.53



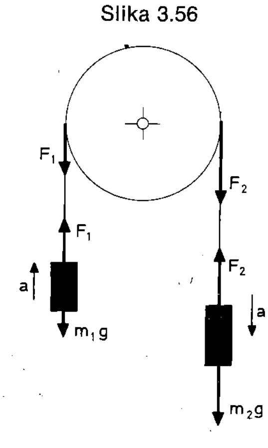
Slika 3.54



Slika 3.55



Slika 3.56



Slika 3.57

V začetku krogla drsi po tleh in njeno gibanje zavira dinamična torna sila $F_t = k_t N = k_t mg$, ki obenem kroglo tudi vrti z navorom $M = F_t R = k_t mgR$. Zaradi tega se težišče krogle giblje enakomerno pojemajoče s pojemkom $a_c = F_t/m = k_t g$ in njegova hitrost enakomerno pojema s časom:

$$v_c = v_0 - a_c t = v_0 - k_t gt$$

Obenem se krogla vrti enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom $\alpha = M/J_c = 5k_t g/2R$ in kotna hitrost se enakomerno povečuje:

$$\omega = \alpha t = 5k_t gt/2R$$

Dokler je $v_c > R\omega$, krogla še podrsuje po tleh. Ko postane $v_c = R\omega$, se začne kotaljenje:

$$v_0 - k_t gt_1 = 5k_t gt_1/2 \text{ ali}$$
$$t_1 = 2v_0/7k_t g$$

Pot podrsavanja znaša:

$$x_1 = v_0 t_1 - k_t gt_1^2/2 = 12v_0^2/49k_t g$$

Od tega mesta naprej se krogla kotali enakomerno (vodoravna komponenta sile tal izgine), težišče se giblje enakomerno s stalno hitrostjo $v_c = R\omega = 5v_0/7$ (če zanemarimo upor zraka in kotalno trenje, gl. str. 78). Na popolnoma gladkih tleh ($k_t \to 0$), bi krogla ves čas drsela translatorno, se ne bi mogla kotaliti.

Namesto da kroglo v začetku sunemo, jo zavrtimo z začetno kotno hitrostjo ω_0 in previdno položimo na tla (slika 3.63). Ker krogla v dotikališču drsi v levo, je dinamična torna sila usmerjena v desno. Ta sila pospešuje težišče krogle v desno s pospeškom:

$$a_c = k_t g$$

in obenem zavira vrtenje krogle s pojemkom $\alpha = 5k_t g/2R$. Zaradi tega se hitrost težišča povečuje s časom po enačbi:

$$v_c = a_c t = k_t gt$$

kotna hitrost ω pa zmanjšuje: $\omega = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - 5k_t gt/2R$. Slej ko prej se hitrost težišča toliko poveča, kotna hitrost pa toliko zmanjša, da je zadoščeno pogoju: $v_c = R\omega$, ki je potreben za kotaljenje. Krogla se prične kotaliti po času $t_2 = 2R\omega_0/7k_t g$.

Kako moramo zalučati kroglo, da drsi pojemajoče, se ustavi in se nato začne kotaliti nazaj?

7. Kotaljenje valja po klancu. Valj z maso m in polmerom R se kotali navzdol po klancu z naklonskim kotom φ (slika 3.64). Kolikšen je pospešek težišča valja?

Na valj učinkujeta teža mg in sila podlage; zadnjo razstavimo na pravokotno komponento N in na komponento F' v smeri klanca. Velja:

$$mg \sin\varphi - F' = ma_c$$

Med kotaljenjem se valj vrti pospešeno okrog osi skozi težišče s kotnim pospeškom α, ki ga povzroča sila F' z navorom $M = F'R$:

$$\alpha = M/J = F'R/J$$

Dokler se valj še kotali, velja zveza: $a_c = R\alpha$, zato dobimo:

$a_c = g\sin\varphi/(1 + J/mR^2) = (2/3)g\sin\varphi$ ($J = mR^2/2$ za valj) ter

$$F' = a_c J/R^2 = mg\sin\varphi/(1 + mR^2/J) = (1/3)mg\sin\varphi$$

Če bi valj drsel navzdol translatorno brez trenja, bi se gibal s pospeškom $g\sin\varphi$ (gl. str. 41), s kotaljenjem pa se pospešek zmanjša na $(2/3)g\sin\varphi$. Drsenje (translatorno) navzdol po klancu s trenjem pa je navadno precej počasnejše kot kotaljenje.

Če povečamo naklon φ klanca, se povečata tudi pospešek težišča valja in kotni pospešek vrtenja. V enakem razmerju se z naklonom povečuje tudi sila F', ki je potrebna za pospešeno kotaljenje. Toda ta je omejena, njena zgornja meja je statična torna sila $F_s = k_s N = k_s mg\cos\varphi$ (gl. str. 40). Ko F' doseže F_s, začne valj po klancu podrsavati. To se zgodi pri nagibu $\varphi = \varphi_s$, za katerega velja:

$$F' = F_s = k_s N$$
$$mg\sin\varphi_s/(1 + mR^2/J) = k_s mg\cos\varphi_s \text{ ali}$$
$$\mathrm{tg}\varphi_s = k_s(1 + mR^2/J) = 3k_s$$

Pri $\varphi > \varphi_s$ valj med kotaljenjem navzdol po klancu podrsuje, zato je torna komponenta sile podlage enaka $F_t = k_t N = k_t mg\cos\varphi$ in pospešek težišča valja je enak kot pri navadnem drsenju: $a_c = g(\sin\varphi - k_t\cos\varphi)$. Kotni pospešek valja tedaj določa dinamična torna sila F_t, ki vrti z navorom $F_t R$. Sledi: $\alpha = F_t R/J = (2k_t g/R)\cos\varphi$. Torej se kotni pospešek kotaljenja z večanjem strmine klanca zmanjšuje. Ob navpičnem zidu je celo nič. Valj se ob navpičnem zidu ne more kotaliti, saj ni sile, ki bi ga vrtela.

Kotalno trenje

S kotaljenjem koles se lahko vozila premikajo po tleh veliko lažje, kot če drsijo. Ker kolo ne podrsava po tleh, torna sila ne zavira gibanja. V idealnem primeru, če se niti kolo niti podlaga pod bremenom ne deformirata, tako da se dotikata v eni sami točki, se lahko kolo kotali po vodoravni podlagi s stalno hitrostjo (če le zanemarimo upor zraka). Na kolo tedaj učinkujeta teža mg navzdol in nasprotno enaka sila podlage (N) navzgor (slika 3.65).

Dejansko se kolo in podlaga zaradi bremena mg deformirata in se ne stikata le v eni točki temveč na širši stični površini (slika 3.66). Sila podlage je neenakomerno razporejena vzdolž stične površine (na sprednji strani kolesa je močnejša kot na zadnji); njena rezultanta N prijemlje v točki B, okrog katere se mora kolo na deformiranih tleh zakotaliti. Ker teža mg bremena nasprotuje tej zakotalitvi z navorom mgb (b je ročica teže glede na vodoravno os skozi kotalno točko B), je potrebna potisna sila F, ki prevlada navor teže:

$$FR = mgb \quad \text{ali}$$
$$F = (b/R)mg$$

Količnik b/R je torej **koeficient kotalnega trenja.** Kot merilo za velikost kotalnega trenja običajno navajamo kar ročico b (v cm), npr. za leseno kolo na leseni podlagi je b okrog 0,2 cm, jekleno kolo na jekleni podlagi 0,025 cm.

Proste osi togega telesa

Doslej smo obravnavali vrtenje telesa okrog osi, katere smer se med vrtenjem ne spreminja, bodisi da os miruje (vpeta v ležaje) ali pa se paralelno premika, npr. pri kotaljenju. Gibanje telesa se precej zamota, če dovolimo, da se smer osi med gibanjem spreminja.

Recimo, da je telo podprto v težišču, vendar tako da se lahko prosto vrti okrog poljubne osi skozi težišče. Telo zavrtimo s kotno hitrostjo ω okrog neke osi, ki naj ne sovpada z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa (gl. str. 66), in ga nato prepustimo samemu sebi.

Telo je sestavljeno iz masnih elementov dm (slika 3.67). Vsak vrteči se masni element dm vleče rotacijsko os s centrifugalno silo $x\omega^2$dm radialno proč (gl. str. 44); x je pravokotna oddaljenost masnega elementa dm od vrtilne osi. Navor te sile glede na vodoravno os skozi težišče C je $zx\omega^2$dm, pri čemer merimo koordinato z iz težišča (nad težiščem je pozitivna, pod njim pa negativna). Celotno togo telo potemtakem deluje na vrtilno os z navorom:

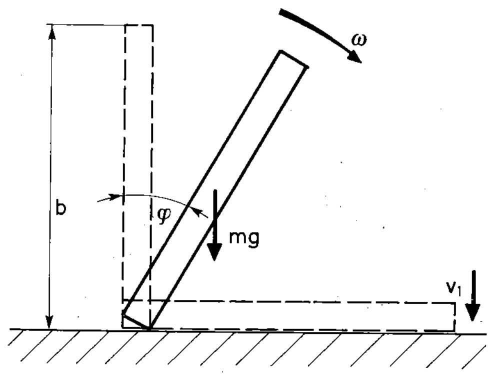
$$M_{cf} = \int xz\omega^2 \mathrm{d}m = \omega^2 J_{xz} \qquad (3.52)$$

ki se imenuje **centrifugalni navor.** J_{xz} je centrifugalni vztrajnostni moment telesa (gl. 3.35). Zaradi centrifugalnega navora se smer vrtilne osi med vrtenjem spreminja, če os ni vpeta v ležaje. Ležaji kompenzirajo učinek centrifugalnega navora in vrtilna os se ne spreminja.

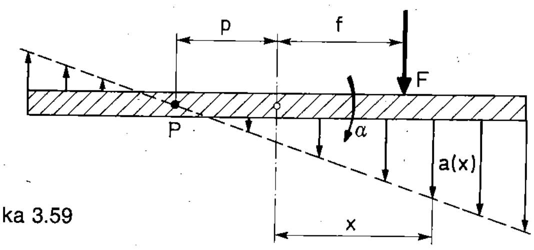
Centrifugalni navor je nič in ležaji niso potrebni, če je vrtilna os ena od glavnih osi vztrajnostnega elipsoida (gl. str. 67), glede na katero so centrifugalni vztrajnostni momenti J_{xz} itd. nič. Zaradi tega se glavne vztrajnostne osi telesa imenujejo tudi **proste osi**. Vsako togo telo (ne glede na obliko) ima najmanj tri proste osi, ki so pravokotne druga na drugo. Vrteče se telo ne obremenjuje ležajev, če se vrti okrog proste osi. Osi hitro vrtečih se rotorjev morajo zato biti proste osi, ker lahko drugače centrifugalni navor (ki narašča s kvadratom kotne hitrosti vrtenja) poškoduje ležaje.

Vrtilna os prostega telesa je stalna, če je ena od prostih osi telesa. Vendar pa vrtenje telesa okrog posameznih prostih osi ni enako stabilno. Pokaže se (dokaz presega okvir naše stopnje), da je vrtenje najbolj stabilno okrog tistih prostih osi, glede na katere ima telo ali **največji ali najmanjši vztrajnostni moment**. Te proste osi so **stabilne**. Če vrteče se telo malo zmotimo, da se izmakne iz stabilne proste osi, se po kratkem kolebanju samo povrne v prvotno stanje in se spet vrti okrog stabilne proste osi. Vrtenje telesa okrog prostih osi z **vmesnim vztrajnostnim momentom** pa je **labilno.** Že majhen zunanji dražljaj zadostuje, da se vrtilna os začne prekopicevati; gibanje telesa se umiri, ko telo najde eno od bližnjih stabilnih prostih osi, okrog katere se potem vrti. Na sliki (3.68a) vrtimo okroglo ploščico, ki visi na nitki, okrog njene diametralne osi. Ta os je labilna, zato se ploščica začne nemirno premetavati. Čez nekaj časa se težišče ploščice dvigne, tako da je ploščica vodoravna in se vrti okrog simetrijske osi (pravokotno na ploščico skozi njeno sredino), ki je stabilna prosta os (slika 3.68b). Geometrijska os rotacijsko simteričnih teles je večinoma stabilna prosta os.

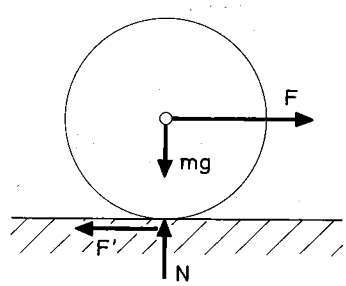
Metalec diska mora zavrteti disk okrog stabilne proste osi, da se ta med letenjem ne spreminja (zaradi česar bi se spreminjal upor zraka). Kako leti krogla iz puške?



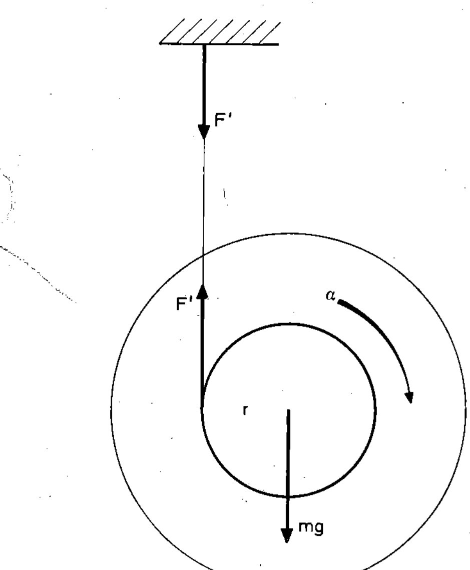
Slika 3.58



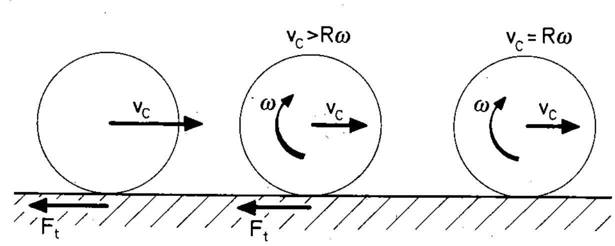
Slika 3.59



Slika 3.60



Slika 3.61



Slika 3.62

Vrtilna količina

Vrtilna količina $\mathbf{\Gamma}$ ima pri vrtenju podobno vlogo, kakršno ima gibalna količina **G** pri premem gibanju. Kakor lahko Newtonov zakon dinamike za premo gibanje napišemo v obliki: $\mathbf{F} = d\mathbf{G}/dt$ (gl. 2.3), ga lahko za vrtenje napišemo v obliki:

$$\boxed{\mathbf{M} = d\mathbf{\Gamma}/dt} \tag{3.53}$$

Z vrtilno količino se bomo najprej seznanili na enostavnem primeru: točkasto telo m se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$, torej z gibalno količino $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$. Nanj učinkuje sila **F**, ki spreminja njegovo gibalno količino: $\mathbf{F} = d\mathbf{G}/dt$. Navor te sile glede na os skozi koordinatno izhodišče 0 je $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kjer je **r** krajevni vektor telesa m iz koordinatnega izhodišča (gl. 3.39). Naprej postopamo takole:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (d\mathbf{G}/dt) = d(\mathbf{r} \times \mathbf{G})/dt - (d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{G}$$

Ker je $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, izpade zadnji člen, saj je vektorski produkt dveh kolinearnih vektorjev nič:

$$\mathbf{M} = d(\mathbf{r} \times \mathbf{G})/dt = d\mathbf{\Gamma}/dt$$

kjer je

$$\boxed{\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{G} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}} \tag{3.54}$$

vrtilna količina točkatega telesa glede na izhodišče 0.

Recimo, da telo m kroži po krogu s polmerom r okrog izhodišča 0. Vektorski produkt $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ tedaj znaša $rv = r^2\omega$ in ima smer osi kroženja. Vrtilna količina $\mathbf{\Gamma}$ krožečega točkastega telesa ima torej smer vrtilne osi (to je smer $\boldsymbol{\omega}$) in je enaka:

$$\boxed{\mathbf{\Gamma} = mr^2\boldsymbol{\omega} = J\boldsymbol{\omega}} \tag{3.55}$$

pri čemer je J vztrajnostni moment krožečega točkastega telesa. Vidimo, da je izraz za vrtilno količino $\mathbf{\Gamma}$ povsem analogen izrazu za gibalno količino $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ (namesto mase m imamo vztrajnostni moment J, namesto hitrosti **v** pa kotno hitrost $\boldsymbol{\omega}$).

Če na krožeče telo m učinkujoča sila **F** nima navora: $\mathbf{M} = 0$ (npr. da ima smer k središču kroženja, t. i. **centralna sila**), se **vrtilna količina krožečega telesa ohranja**: $\mathbf{\Gamma}$ = **konst**.; ohranja se tako hitrost kot ravnina kroženja.

Kroglico m položimo na vodoravno gladko ploščo (slika 3.69). Kroglica je privezana na vrvico, ki vodi skozi luknjo v sredini plošče. Zaženemo jo, da začne na plošči krožiti s kotno hitrostjo ω po krogu s polmerom r. Nato vlečemo vrvico s silo F navzdol, da se polmer kroženja r zmanjšuje. Sila F deluje na kroglico v radialni smeri, zato je njen navor nič in kroglica kroži s stalno vrtilno količino; produkt $r^2\omega$ se ohranja. Ker se r zmanjšuje, se povečuje kotna hitrost kroženja; kroglica kroži tem hitreje, čim krajša je vrvica: $r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$.

Planeti krožijo okrog Sonca po eliptičnih tirnicah; nanje učinkuje privlačna gravitacijska sila Sonca, ki je centralna sila (njen navor je nič), zato se vrtilna količina planetov ohranja: ravnina kroženja je stalna; ko se razdalja planeta do Sonca zmanjša (npr. pozimi), se hitrost planeta poveča (in obratno).

Izraz (3.54) bomo posplošili, da bomo dobili **vrtilno količino togega telesa**, ki se vrti s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}$ okrog dane osi (slika 3.70). Telo v mislih razdelimo na masne elemente dm. En tak element kroži okrog osi $\boldsymbol{\omega}$ z obodno hitrostjo $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (gl. 1.53c). Vrtilna količina $\mathbf{\Gamma}$ celotnega telesa je vsota (integral) vrtilnih količin posameznih delov telesa:

$$\mathbf{\Gamma} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm \tag{3.56}$$

Ker je $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, dobimo naprej:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = r^2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})$$

Vektorja **r in** $\boldsymbol{\omega}$ izrazimo s projekcijami v koordinatnem sistemu:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \qquad (gl.\ 1.1)$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_x + \omega_2\mathbf{e}_y + \omega_3\mathbf{e}_z$$

Zavrteti telo okrog osi $\boldsymbol{\omega}$ s kotno hitrostjo ω je enako, kot zavrteti ga okrog osi x s kotno hitrostjo ω_1 in obenem okrog osi y s ω_2 ter okrog osi z s ω_3.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= (\omega_1\mathbf{e}_x + \omega_2\mathbf{e}_y + \omega_3\mathbf{e}_z)(x^2 + y^2 + z^2) - \\ &- (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) = \\ &= \mathbf{e}_x[(y^2 + z^2)\omega_1 - \omega_2 xy - \omega_3 xz] + \\ &+ \mathbf{e}_y[(z^2 + x^2)\omega_2 - \omega_3 yz - \omega_1 yx] + \\ &+ \mathbf{e}_z[(x^2 + y^2)\omega_3 - \omega_1 zx - \omega_2 zy] \end{aligned} \tag{3.56a}$$

Zgornji izraz poenostavimo, če usmerimo koordinatni sistem tako, da se koordinatne osi x-y-z ujemajo z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa (gl. str. 67); potem izpadejo integrali, ki vsebujejo produkte xy, yz in zx, ter ostane:

$$\boxed{\mathbf{\Gamma} = J_1\omega_1\mathbf{e}_x + J_2\omega_2\mathbf{e}_y + J_3\omega_3\mathbf{e}_z} \tag{3.57}$$

pri čemer so J_1, J_2 in J_3 **glavni vztrajnostni momenti telesa** (gl. 3.37).

Vidimo, da vrtilna količina $\mathbf{\Gamma}$ vrtečega se telesa v splošnem nima enake smeri kot vrtilna os (to je $\boldsymbol{\omega}$). $\mathbf{\Gamma}$ ima smer $\boldsymbol{\omega}$ le za kroglasto telo ($J_1 = J_2 = J_3 = J$ in $\mathbf{\Gamma} = J\boldsymbol{\omega}$) ali če zavrtimo telo okrog ene od glavnih vztrajnostnih osi, tako da je npr.

$$\omega_2 = \omega_3 = 0 \text{ in } \omega_1 = \omega \text{ ter } \mathbf{\Gamma} = J_1\omega\mathbf{e}_x = J_1\boldsymbol{\omega}.$$

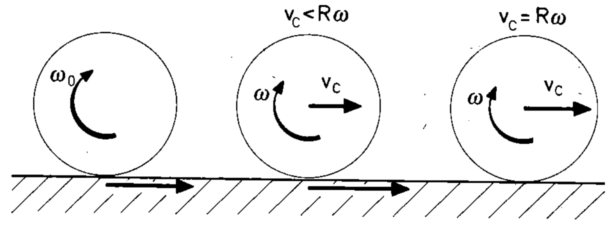
Geometrijska os rotacijsko simetričnih teles je ena od glavnih vztrajnostnih osi telesa. Če torej telo zavrtimo okrog te osi s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}$, dobi vrtilno količino $\mathbf{\Gamma} = J\boldsymbol{\omega}$, kjer je J vztrajnostni moment telesa glede na to os. Da je res tako, se prepričamo neposredno iz enačbe (3.56): $\mathbf{\Gamma} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm$.

Zaradi simetrije lahko od vektorja $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ upoštevamo le njegovo projekcijo na smer vrtilne osi, to je $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|\mathbf{e}_\omega = rv\sin\delta\mathbf{e}_\omega = r_1 v\mathbf{e}_\omega = r_1^2\omega\mathbf{e}_\omega = r_1^2\boldsymbol{\omega}$ ($v = r_1\omega$, gl. sliko 3.71).

$$\mathbf{\Gamma} = \int r_1^2\boldsymbol{\omega}\, dm = J\boldsymbol{\omega} \quad , \quad J = \int r_1^2\, dm$$

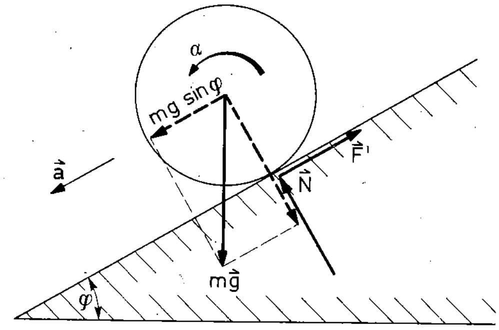
Kakor velja za točkasto telo, velja tudi za togo telo: če je **rezultanta navorov nič (M = 0), se vrtilna količina telesa ohranja:** $\mathbf{\Gamma}$ = **konst**.; ohranjata se tako njena velikost kot smer. Pri kroglastem telesu ali če zavrtimo telo okrog njegove glavne vztrajnostne osi, se potemtakem **ohranja tudi smer vrtilne osi** (saj ima $\mathbf{\Gamma}$ enako smer kot $\boldsymbol{\omega}$).

To lastnost vrtečega se telesa izkoriščamo pri **giroskopskem kompasu**. Osnosimetrično telo z velikim vztrajnostnim momentom je vgrajeno v posebno ohišje, tako da se lahko prosto vrti okrog poljubne osi skozi njegovo težišče. Telo v začetku zavrtimo z veliko kotno hitrostjo, da dobi čim večjo vrtilno količino, ki jo usmerimo natančno na sever. Ker je vpliv trenja in upora zraka na vrtenje gira zmanjšan na minimum, druge sile pa zaradi posebno oblikovanega ohišja ne morejo izmakniti vrtilne osi iz smeri sever-jug, se vrtilna količina gira in s tem tudi smer njegove vrtilne osi ohranjata. Četudi ladja z ohišjem giroskopa spreminja smer, os vrtečega se gira stalno kaže na sever.



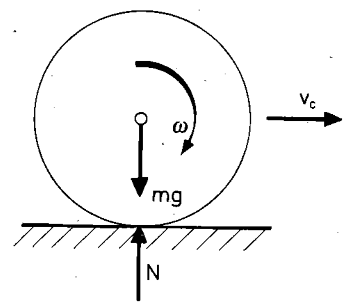
Slika 3.63

Vrtilna količina sestavljenih teles



Slika 3.64

Doslej smo razpravljali o vrtilni količini togega telesa. Netogo telo pa lahko med vrtenjem spreminja obliko oziroma velikost. Kako se zaradi tega spreminja njegova vrtilna količina? Pogosto se oblika telesa spremeni z učinkovanjem notranjih sil, ki učinkujejo med posameznimi deli telesa. Vemo, da se notranje sile vedno pojavljajo v parih nasprotno enakih sil (gl. str. 52). Tudi navori teh sil so nasprotno enaki, se medsebojno uničujejo, zato ne vplivajo na celotno vrtilno količino telesa. Kljub **spremembi oblike ali velikosti telesa** zaradi učinkovanja notranjih sil **se vrtilna količina telesa ne spremeni. Vrtilno količino telesa spreminjajo le navori zunanjih sil.**



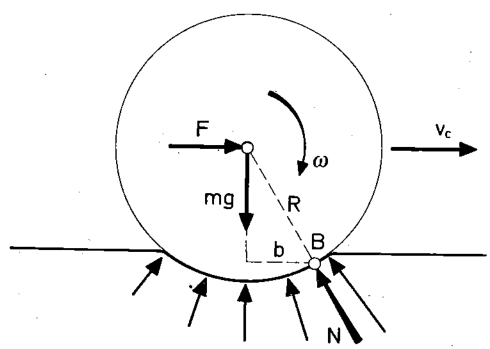
Slika 3.65

Recimo, da notranje sile razširijo telo, tako da se njegov vztrajnostni moment poveča. Ker se zaradi tega vrtilna količina $\Gamma = J\omega$ ne spremeni, se kotna hitrost ω vrtenja zmanjša, tako da je produkt $J\omega$ enak:

$$\Gamma = J\omega = konst. = J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

Primer:

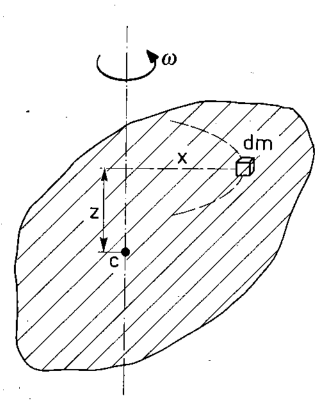
Sedimo na vrtljivem stolu in se vrtimo s kotno hitrostjo ω_1. Ko med vrtenjem iztegnemo roki, se poveča vztrajnostni moment (od J_1 na J_2), toda obenem se zmanjša kotna hitrost vrtenja (od ω_1 na $\omega_2 = \omega_1 J_1/J_2$). Skrčitev rok zopet pospeši vrtenje itd.



Slika 3.66

Umetnostna drsalka na ledu dela pirueto tako, da se najprej ob razprtih rokah (čim večji vztrajnostni moment) poganja z eno nogo, da dobi čim večjo vrtilno količino okrog vrtilne osi skozi drugo nogo (priskrbi jo navor zunanje sile med drsalko in ledom). Nato se postavi na konico drsalke in dvigne roki v smeri osi, da se njen vztrajnostni moment čimbolj zmanjša – ob tem se hitrost vrtenja zelo poveča.

Premisli, kako skače skakalec v vodo. Kako spreminja svoj vztrajnostni moment okrog vodoravne osi in kako se zaradi tega spreminja njegovo vrtenje?



Slika 3.67

Kar smo zgoraj povedali za vrteče se netogo telo, velja tudi za **sistem teles**, ki se vrtijo okrog skupne osi. **Vrtilna količina celotnega sistema je algebraična vsota vrtilnih količin posameznih teles** (upoštevati moramo predznak posameznih vrtilnih količin, to je smisel vrtenja). Med posameznimi telesi sistema v splošnem učinkujejo **notranje sile**. Te lahko spremenijo vrtilno količino posameznih teles, **ne morejo** pa **spremeniti celotne vrtilne količine sistema**. Ta se spreminja le zaradi navorov zunanjih sil. **Če zunanjih navorov ni** (če je njihova rezultanta nič), **se vrtilna količina sistema teles ohranja (zakon o ohranitvi vrtilne količine sistema)**.

Recimo, da mirujemo na vrtljivem stolu in držimo v rokah vrteče se kolo, tako da je os kolesa vzporedna vrtilni osi stola. Ker s stolom vred mirujemo, je vrtilna količina celotnega sistema kar enaka vrtilni količini kolesa ($= \Gamma_1 = J_1\omega_1$). Nenadoma zasukamo os vrtečega se kolesa za 180°, tako da je spet vzporedna osi stola, vendar se zdaj kolo vrti v nasprotni smeri kot prej. Opazimo, da se pri tem sami s stolom vred začnemo vrteti v enaki smeri, kot se je prvotno vrtelo kolo. Z navorom notranjih sil rok smo spremenili vrtilno količino kolesa od Γ_1 na $-\Gamma_1$. Ker mora biti vrtilna količina celotnega sistema še vedno Γ_1, se začnemo vrteti z vrtilno količino $\Gamma_2 = J_2\omega_2$ (J_2 je naš in stolov vztrajnostni moment), tako da je $\Gamma_1 = \Gamma_2 + (-\Gamma_1)$ ali $\Gamma_2 = 2\Gamma_1$ in $\omega_2 = 2\omega_1 J_1/J_2$.

Primer:

Kolo z vztrajnostnim momentom J_1 je nasajeno na navpično os, okrog katere se lahko prosto vrti; kolo v začetku miruje. Na isti osi je nasajeno drugo kolo z vztrajnostnim momentom J_2 (slika 3.72a). Drugo kolo zavrtimo s kotno hitrostjo ω_0 in nato spustimo, da pade na prvo, mirujoče kolo. Zgornje kolo se še vrti, vendar podrsuje po mirujočem kolesu. Med njima začne učinkovati drsno trenje. Zgornje kolo čuti navor torne sile, s katerim spodnje kolo zavira njegovo vrtenje. Obenem spodnje kolo čuti enako velik (a nasprotno usmerjen) navor, s katerim ga zgornje kolo začenja vrteti. Čez čas kolesi prenehata podrsavati in se vrtita s skupno kotno hitrostjo (slika 3.72b). Velja:

$$J_1\omega_1 = (J_1 + J_2)\omega \quad \text{ali} \quad \omega = \omega_1 J_1/(J_1 + J_2)$$

Kaj pa, če se spodnje kolo v začetku vrti v naprotni smeri kot zgornje kolo? Kako morata biti povezani začetni kotni hitrosti obeh koles, da se kolesi po končanem podrsavanju ustavita?

Vrtavka

Vrtavka je rotacijsko simetrično kolo z zelo velikim vztrajnostnim momentom (J) glede na geometrijsko os. Zavrtimo jo s precejšnjo kotno hitrostjo (ω) okrog stabilne geometrijske osi in jo postavimo na konico, tako da je njeno težišče nad dotikališčem (slika 3.73). Njena os v splošnem oklepa kot θ z navpičnico skozi dotikališče.

Vrtenje vrtavke je v splošnem precej zapleteno. Poleg tega da se vrti okrog lastne geometrijske osi (z vrtilno količino $\Gamma' = J\omega$), njena **os** tudi **precesira**, to je pri stalnem kotu θ se suče okrog navpičnice po plašču stožca. Možno je tudi (odvisno od tega, kako sprožimo njeno gibanje), da se med precesiranjem izmenično spreminja kót θ, tako da vrtavkina os niha gor (θ se zmanjšuje) in dol (θ se povečuje). Tej vrsti vrtavkinega gibanja pravimo **nutacija**.

Splošnega gibanja vrtavke ne bomo mogli obravnavati. Predpostavili bomo, da se vrtavka vrti tako hitro, da je vrtilna količina $J\omega$ zaradi njenega vrtenja okrog geometrijske osi velika v primerjavi z vrtilno količino zaradi precesije ali morebitne nutacije. Vektor celotne vrtilne količine $\mathbf{\Gamma}$ praktično sovpada z vrtavkino osjo, kar pomeni, da se smer vrtavkine osi spreminja s časom podobno kot smer celotne vrtilne količine $\mathbf{\Gamma}$. Ta predpostavka seveda odpove, ča se vrtavka vrti prepočasi; tedaj je pomembna tudi nutacija.

Recimo, da potegnemo vrh pokončno usmerjene vrteče se vrtavke s silo **F** k sebi. Pričakovali bi, da se vrtavkina os nagne k nam. Toda hitro vrteča se vrtavka reagira drugače. Vlečna sila **F** deluje na vrtavko z navorom **M**, ki je usmerjen v desno (slika 3.74). Zaradi tega navora se vrtilna količina vrtavke $\mathbf{\Gamma}$ v času dt spremeni za $d\mathbf{\Gamma} = \mathbf{M}dt$ (gl. 3.53). Os vrtavke se nagne v desno, nova vrtilna količina je $\mathbf{\Gamma}' = \mathbf{\Gamma} + \mathbf{M}dt$. Če je vrtilni moment **M** stalen, se os vrtavke nagiba toliko časa, dokler ne kaže v smer **M**, nato se v tej smeri umiri (čemur pomaga tudi trenje).

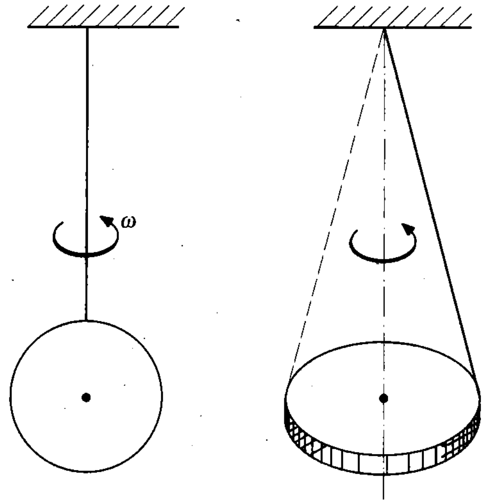
Premisli, kako reagira sprednje kolo z volanom pri biciklu, če se nagnemo v levo.

Precesijo vrtavkine osi povzroča navor vrtavkine teže. Vrtavko, ki se vrti z veliko vrtilno količino $\Gamma = J\omega$, previdno postavimo na mizo, tako da njena os oklepa kót θ z navpičnico. Ko jo previdno spustimo (da ne vzbudimo nutacije), začne njena os precesirati okrog navpičnice. Na vrtavko namreč deluje navor njene teže (glede na trenutno os skozi dotikališče): $mgL\sin\theta$, kjer je m masa vrtavke, L pa oddaljenost njenega težišča od podporne točke. Ker navor M deluje stalno, se vrtilna količina vrtavke spremeni v času dt za $d\Gamma = Mdt$ in njena os se zasuče (po plašču stožca s kotom 2θ ob vrhu – podporni točki) za kot $d\varphi = d\Gamma/(\Gamma\sin\theta) = (mgL/\Gamma)dt$ (gl. sliko 3.73). Sledi, da vrtavka precesira s kotno hitrostjo

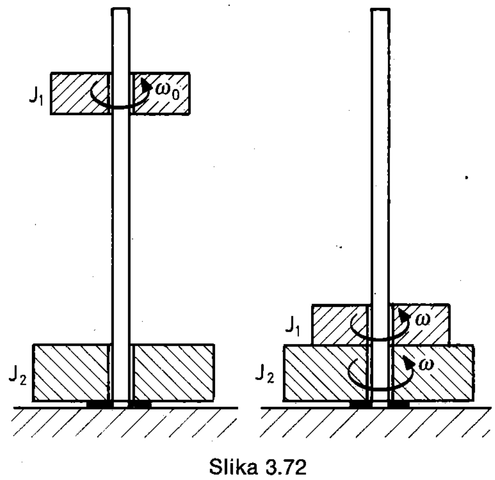
$$\Omega = d\varphi/dt = mgL/J\omega$$

Značilno je, da je kotna hitrost precesije neodvisna od naklonskega kota θ vrtavkine osi.

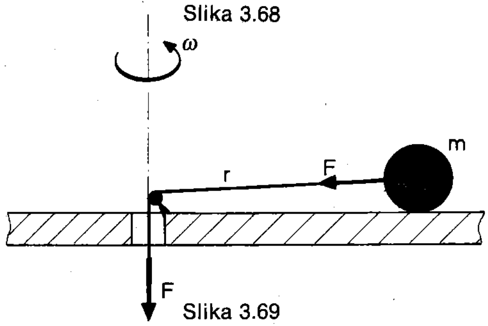
Zemlja ima zaradi dnevnega vrtenja vrtilno količino. Nanjo učinkuje gravitacijska privlačna sila Sonca (in deloma Lune). Ako bi bila popolna krogla, bi bil navor gravitacijske sile nič in smer Zemljine vrtilne količine (to je smer polarne osi) bi bila stalna. Toda Zemlja je ovalna in njena os je nagnjena za 23,5° glede na pravokotnico na ravnino ekliptike. Sonce učinkuje na odebljeni del Zemlje z gravitacijsko privlačno silo, ki je večja za bližnji del (F_2 na sliki 3.75) kot za oddaljeni del (F_1). Navor teh sil je različen od nič in stalno učinkuje na vrtavko – Zemljo, zaradi česar njena polarna os počasi precesira. Obhodni čas Zemljine precesije ($= 2\pi/\Omega$) je okrog 26 000 let. »Trenutno« kaže Zemljina os v smer zvezde Severnice.



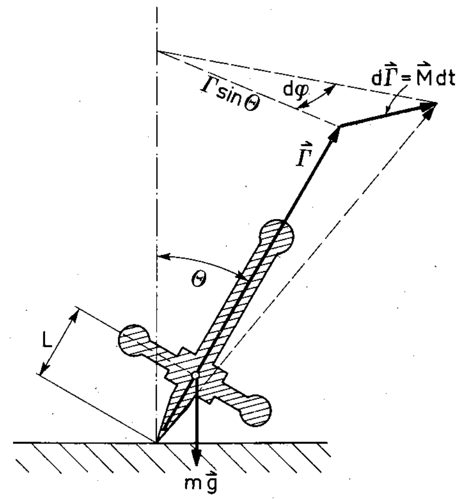
Slika 3.68



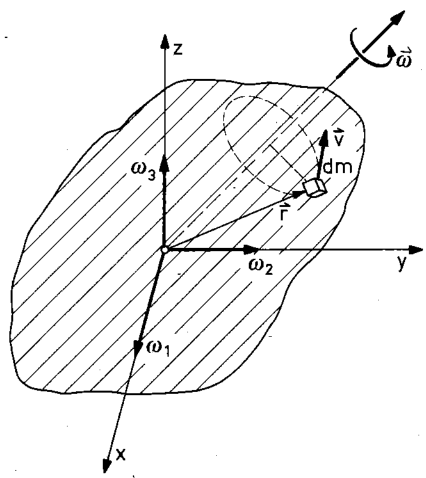
Slika 3.72



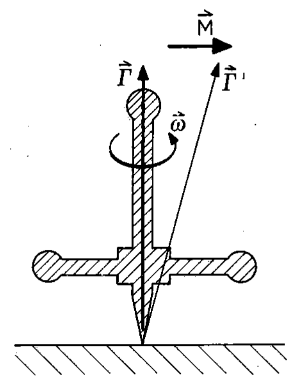
Slika 3.69



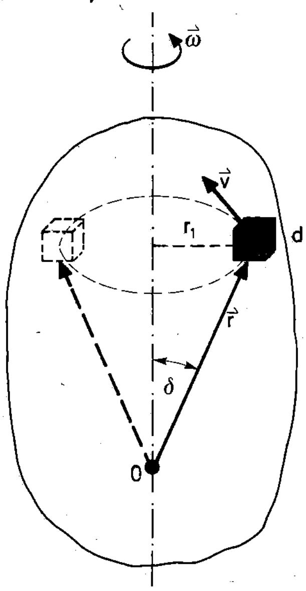
Slika 3.73



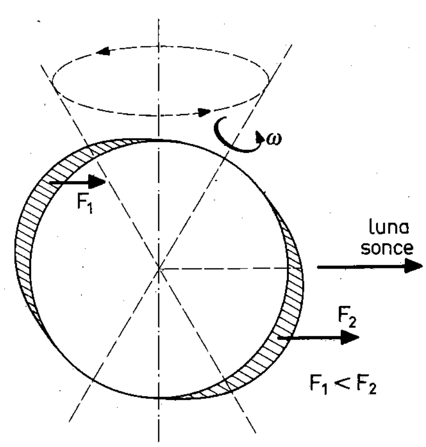
Slika 3.70



Slika 3.74



Slika 3.71



Slika 3.75